SEL0356

Aplicação de Processamento Digital de Sinais

Programa do Curso

- ✓ **Revisão da teoria de probabilidade,**
- ✓ **Sinais aleatórios contínuos no tempo,**
- ✓ **Sinais aleatórios discretos no tempo,**
- ✓ **Ruído,**
- ✓ **Estimação espectral clássica,**
- ✓ **Estimação espectral paramétrica,**
- ✓ **Introdução aos filtros de Wiener.**

⇨ **Critério de aprovação:**

- ✓ **Exercícios, trabalhos e 1 Prova**

Bibliografia

- **B. P. Lathi, *An introduction to randon variables and communication theory*, Textbook Co. 1968. cap. 2 e 3.**
- **Openheim, A. V. and Schafer, R. W. *Discrete-Time Signal Processing,* Prentice-Hall, 1989.**
- **Proakis, J. G. and Manolakis, D. G. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications,* MacMillan, 1992.**
- **De Fatta, D. J., Lucas, J. G. and Hodgkiss, W. S. *Digital Signal Processing: A System Approach,* John Wiley & Sons, 1988.**
- **Diniz, P. S. R., Barros da Silva, E. A. e Netto S. L., *Processamento Digital de Sinais*, Bookman Editora, 2004.**
- **Hsu, H. P., *Probability, random variables and random processes, Schaum's outlines, McGraw_Hill, 1997.***

- **Material de apoio na rede:**
  - ✓ **E-disciplina**

Revisão da Teoria de Probabilidades

Introdução

⇨ **Sinais determinísticos:**

- ✓ **Seus valores são conhecidos em todos os instantes de tempo: conhece-se uma descrição analítica ou gráfica.**

⇨ **Sinais aleatórios:**

- ✓ **Conhece-se somente algumas especificações parciais. Existem incertezas em relação ao seu comportamento. Eles são descritos com base em algumas médias estatísticas.**

⇨ **Probabilidade:**

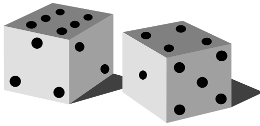
- ✓ **Trata dos efeitos de possibilidades, utilizando médias de fenômenos que ocorrem sequencialmente ou simultaneamente.**
- ✓ **Exemplos: Emissão de elétrons, chamadas telefônicas, ruído, ...**

Introdução

- **Propósito da teoria de probabilidades:**
  - **Descrever e predizer tais médias em termos das probabilidades dos eventos.**
- **Estudo:**
  - **Variáveis e processos aleatórios permitem trabalhar com quantida-des que não são conhecidas totalmente, tais como:**
    - **Ruído, interferências,**
    - **Sinais de informação,**
    - **Sinais de voz, biológicos, etc..**
    - **Em transmissão digital o desempenho é medido através da probabilidade de erro de bits.**
  - **A base matemática é a teoria de probabilidades.**

Espaço amostral e eventos

- **Espaço amostral [S] é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.**
  - **Um elemento de S é chamado de ponto amostral (um resultado).**
  - **Exemplo: Considere o experimento do arremesso de um dado.**
    - **Os resultados possíveis são: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**



- **Evento: é um subconjunto dos resultados possíveis de um espaço amostral.**
  - **Exemplos: No arremesso de um dado:**
    - **A = {1, 2} é um evento.**
    - **O = {o resultado é um número ímpar} é um evento.**
- **Evento complementar: $\bar{A}$ = S - A**
    - **$\bar{A}$ = {3, 4, 5, 6}**
    - **$\bar{O}$ = {resultado é um número par}**

Espaço amostral e eventos

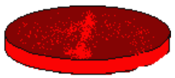
- **O conjunto de todos os resultados de um experimento é o evento certeza S.**
  - **Evento nulo: ϕ**
  - **Outro exemplo de espaço amostral:**
    - **O tempo de duração, antes de se danificar, de um circuito integrado:**
      - **$S = \{\tau : 0 \leq \tau \leq \infty\}$ em que τ representa o tempo de duração do CI.**

- **Conceito de Probabilidade**
  - **A probabilidade P(A) é um número que mede a possibilidade de ocorrência de um evento A.**
  - **Tem-se três definições de probabilidade:**

Definições de Probabilidade

1. Definição de Frequência Relativa

⇨ **Considere o arremesso de uma moeda ideal:**



- ✓ **Tem-se a certeza que o resultado é CARA ou COROA,**
- ✓ **Eles são igualmente prováveis,**
- ✓ **Se a moeda for arremessada um grande número de vezes, pode-se interpretar estes resultados como uma média.**
- ✓ **Este exemplo é uma pista da definição de frequência relativa:**

⇨ **A Probabilidade de ocorrência de um evento A é o seguinte limite:**

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N}$$

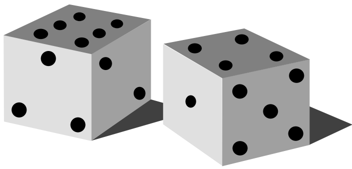
em que: n_A é o número de ocorrências de A, e N é o número de tentativas

- ✓ **Segue desta definição que P(A) é um número positivo tal que:**

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Eventos Mutuamente Exclusivos

⇨ **Dois eventos são mutuamente exclusivos se a ocorrência de um deles elimina a ocorrência do outro.**



⇨ **Exemplo: Arremesso de dois dados**

- ✓ **A1: o número total de pontos é 10: [4,6] - [6,4] - [5,5]**
- ✓ **A2: o número total de pontos é 11: [5,6] - [6,5]**
- ✓ **A3: pelo menos um dos resultados é 6**
  - ➢ **[A1 e A2]: são mutuamente exclusivos.**
  - ➢ **[A1 e A3] e [A2 e A3]: não são mutuamente exclusivos.**

Probabilidade Total

⇨ **Considere um evento cujo resultado é um dos dois eventos A ou B.**

- ✓ **Tal evento é denotado por A + B ou $A \cup B$**
- ✓ **Se eles forem mutuamente exclusivos então:**

$$P(A+B) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A + n_B}{N} = P(A) + P(B)$$

- Se um experimento apresenta N resultados : A_1, A_2, ... A_N, mutuamente exclusivos, e nenhum mais. Então:

$$P(A_1 + A_2 + \cdots A_N) = 1$$

  - ✓ desse modo, S = {A_1, A_2, ..., A_N}, é o evento certeza.

- Se A_1, A_2, ... A_N, não forem mutuamente exclusivos, então:

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_N) < P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_N)$$

2. Definição Axiomática

- **Na definição axiomática o conceito de probabilidade não é inicialmente definido. São postulados três axiomas e nada mais:**
  - **A probabilidade é um número positivo: $P(A) \geq 0$,**
  - **A probabilidade do Evento certeza é 1: $P(S) = 1$ e $P(A) \leq 1$,**
  - **Para dois eventos mutuamente exclusivos: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.**
- **Todas as outras leis saem destes três axiomas.**

- **Propriedades:**
  - **$0 \leq P(A) \leq 1$,**
  - **Evento Impossível: $P(\phi) = 0$,**
  - **$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, em que $\bar{A}$ é o evento complementar de A,**
  - **$P(A) \leq P(B)$ se $A \subset B$,**

- Para A e B eventos quaisquer que não sejam mutuamente exclusivos:

  - P(A U B) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),

- Se A_1, ... A_n são n eventos não mutuamente exclusivos em S então:

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$$

  - Para eventos mutuamente exclusivos:

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

⇨ A definição axiomática utiliza a definição de frequência relativa, mas evita a responsabilidade de uma definição imprecisa.

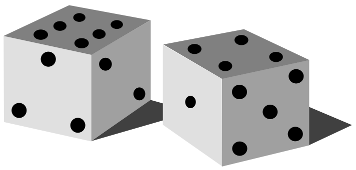
3. Definição Clássica de Probabilidade

- **"A probabilidade de ocorrência de um evento A é igual à razão dos resultados favoráveis ao evento A dividido pelo número total dos resultados, dado que eles sejam igualmente prováveis." Assim:**

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

- **Exemplo:**
  - **No arremesso de um dado, determine a probabilidade de se obter um resultado impar:**
    - **são três resultados ímpares em um total de seis, assim:**

$$P(impar) = \frac{n_A}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

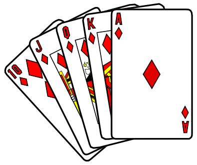


Probabilidade Conjunta

⇨ **É a probabilidade de observação de um resultado particular A de um conjunto, e a probabilidade de se observar um resultado B do mesmo ou de um outro conjunto.**

⇨ **Exemplo:**

- ✓ **Retirar duas cartas em sucessão (com ou sem reposição em um baralho:**



  - ➢ **EVENTO A: retirar um ás na primeira tentativa.**
  - ➢ **EVENTO B: retirar um ás na segunda tentativa.**
  - ➢ **$A \cap B$ ou AB é o evento de se retirar dois ases.**

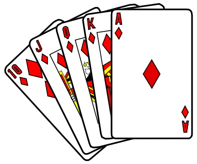
- ✓ **A probabilidade de se obter o evento A e o B é chamada de Probabilidade Conjunta do evento AB ($A \cap B$) e é denotada por:**

$$P(A \cap B) = P(AB)$$

Probabilidade Condicional

⇨ **A probabilidade de um evento está condicionada à de um outro evento:**

⇨ **Exemplo: Considere o exemplo anterior da retirada de duas cartas em sucessão de um baralho:**



✓ **Caso a primeira carta não é recolocada no baralho:**

➢ **Fica evidente então que a segunda tentativa está condicionada à primeira.**

⇨ **Define-se então a Probabilidade Condicional:**

✓ **"Probabilidade de ocorrência de um evento A dado que o evento B ocorreu." : P(A/B)**

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad ou \quad P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

Regra de Bayes

⇨ **Combinado as duas equações anteriores chega-se à regra de Bayes:**

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}$$

Eventos Independentes

⇨ **Um evento A é independente do evento B se:**

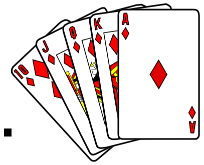
$$P(A/B) = P(A)$$

⇨ **Se dois eventos A e B são independentes então:**

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A)P(B)$$

⇨ **No exemplo anterior do baralho:**

⇨ **A primeira carta retirada é recolocada novamente no baralho.**



⇨ **Generalizando, se {A_1, ..., A_n} é uma sequência de n eventos independentes, então:**

$$P\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) = P\left(A_1 . A_2 \cdots . A_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$$

Variáveis Aleatórias

⇨ **Definições**

- **Espaço amostral (S):**
  - **É o conjunto dos elementos distintos de todos os resultados de um experimento.**
- **Ponto amostral (x_i):**
  - **É um resultado distinto de um experimento.**

⇨ **Em geral associa-se um número real $x_1, ..., x_N$ a cada resultado:**

- **Estes resultados formam uma variável aleatória "$x(\gamma)$ ou $x(x_i)$", que assume N resultados distintos.**
- **No sentido convencional uma variável aleatória é uma função.**

⇨ **Podemos definir de duas maneiras uma variável aleatória:**

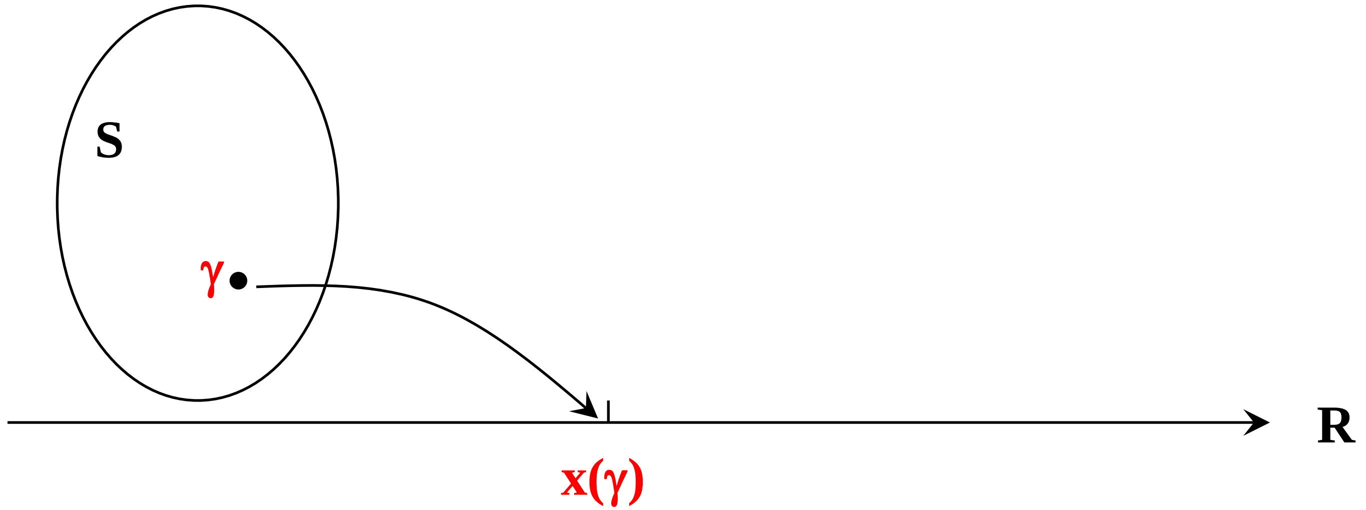
- **DEF 1:**

Uma função cujo domínio é um espaço amostral, e cuja faixa de valores é um conjunto de números reais é chamada de variável aleatória do experimento.

- **DEF 2:**

  - ✓ **Uma variável aleatória "$x(\gamma)$ ou $x(x_i)$", é uma função real de um único valor que associa um número real chamado valor de $x(\gamma)$ a cada ponto amostral γ ou x_i do espaço amostral S.**

- **Figura: Variável aleatória como uma função.**



- **Exemplo:** **arremesso de uma moeda: Cara = 1 e COROA = -1** 
  - $x_i \in$ **S = { 1, -1 } =>** x_i **é um resultado particular,**
    - **x(cara) = 1 e x(coroa) = -1**
  - **neste caso investiga-se a probabilidade de se observar um resultado particular.**
- **Para cada ponto amostral γ de S tem-se:**
  - **O conjunto { γ: x(γ) ≤** x **} é um evento para todo real** x**.**
  - $P\{ \gamma: x(\gamma) \leq \infty \} = 1$
  - $P\{ \gamma: x(\gamma) = -\infty \} = 0$
- **A variável aleatória x conduz as seguintes medidas de probabilidade:**
  - $P(x = x_0) = P\{ \gamma: x(\gamma) = x_0 \}$
  - $P (x \leq x_0) = P\{ \gamma: x(\gamma) \leq x_0 \}$
  - $P (x_1 \leq x \leq x_2) = P\{ \gamma: x_1 \leq x(\gamma) \leq x_2 \}$

Tipos de Variáveis Aleatórias

- ⇨ **Variável aleatória discreta**
  - ✓ **Faixa finita { 0, 1, 2, 3 } ou enumerável infinita { 0,1, 2, ... }**
  - ✓ **Investiga-se a probabilidade de se obter um resultado particular** x_i**.**
- ⇨ **Variável aleatória contínua**
  - ✓ **Faixa é contínua: incontável infinita {** $\in$ **R }**
  - ✓ **Investiga-se a probabilidade de obter um resultado menor ou igual a** x_0 **.**
- ⇨ **Descrição de uma variável aleatória**
  - ✓ **Nome: x (em geral, notação em negrito)**
  - ✓ **faixa de valores: { x** $\in$ **R }**
  - ✓ **Descrição: através de sua função densidade de probabilidade.**
- ⇨ **Há sempre uma probabilidade associada a uma variável aleatória:**

Variável Aleatória Discreta

⇨ **Tem-se em geral um número finito de pontos amostrais**

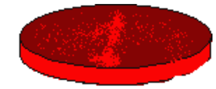
✓ **A cada valor da variável associa-se uma probabilidade:**

➢ **$P_x(x_i)$ = Prob(x = x_i)**

⇨ **Para um total de N eventos mutuamente exclusivos:**

$$\sum_{i=1}^{N} P_{\mathrm{x}}\left(x = x_i\right) = 1$$

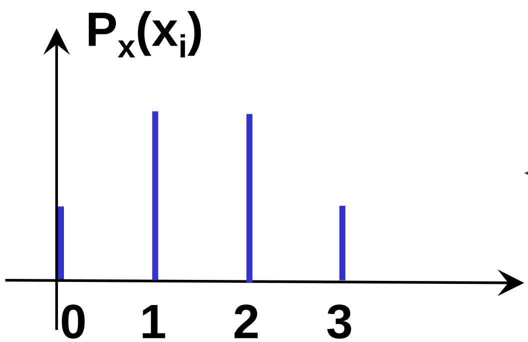
⇨ **Exemplo:** **considere o arremesso de três moedas ideais:**



- ✓ **Seja o evento: obtenção de k caras.**
  - ✓ **x_0 = 0 cara - x_1 = 1 cara - x_2 = 2 caras x_3 = 3 caras**

$$P_x(x_0) = \frac{1}{8} \quad P_x(x_1) = \frac{3}{8} \quad P_x(x_2) = \frac{3}{8} \quad P_x(x_3) = \frac{1}{8}$$

$$\sum_{i=0}^{3} P_x(x_i) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$



Função densidade de probabilidade.

⇨ **Tem-se um número infinito de pontos amostrais:**

- ✓ **A probabilidade de se observar um dado valor é zero.**
- ✓ **Neste caso investiga-se a probabilidade de se observar x abaixo de algum valor x_0.**

$$F_{\mathbf{x}}(x_0) = Prob(\mathbf{x} \leq x_0) = Prob(-\infty < \mathbf{x} \leq x_0)$$

- ✓ **Em que $F_x(x)$ é definida para todo x entre ± ∞.**
- ✓ **$F_x(x)$ é chamada de função distribuição de probabilidade ou distribuição cumulativa de x.**
  - ✓ **A maior parte das informações sobre um experimento aleatório é determinada pelo comportamento de $F_x(x)$.**

Função Distribuição de Probabilidade

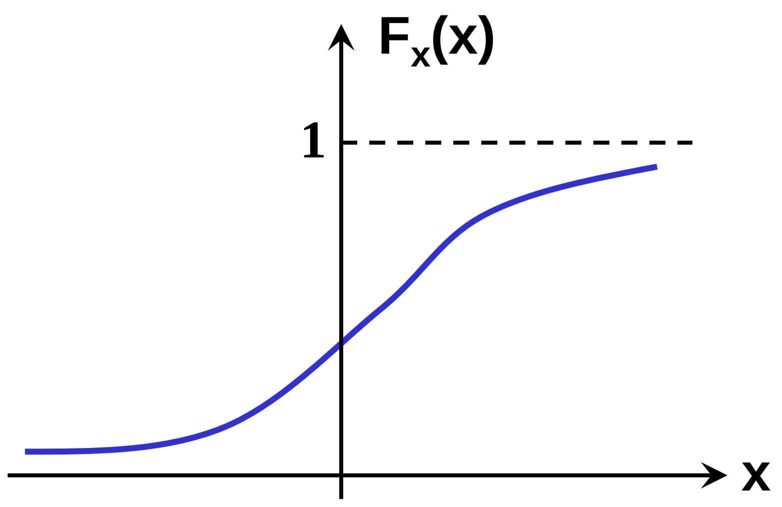
⇨ **A probabilidade de observação de um resultado particular é nula,**

⇨ **DEF: "É a probabilidade de se observar uma v. a. x na faixa $(-\infty , x_0]$ ou $x \leq x_0$"**

$$F_{\mathbf{x}}(x_0) = \Pr ob(\mathbf{x} \leq x_0)$$

⇨ **Propriedades:**

- **$F_x(-\infty) = 0$**
- **$F_x(\infty) = 1$**
- **$0 \leq F_x(x) \leq 1$**
- **$F_x(x)$ é uma função crescente de x**
  - ✓ **$F_x(x_1) < F_x(x_2)$ se $x_1 < x_2$**
- **$P(\mathbf{x} > x_0) = 1 - F_x(x_0)$**
- **$P(a < \mathbf{x} \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$**



Função Densidade de Probabilidade - pdf

$$p_{\mathbf{x}}(x) = p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

⇨ **p(x) mede o quão rápido F(x) está aumentando ou o quanto é provável um resultado estar em torno de algum valor.**

- **Propriedades:**
  - $p_{\mathbf{x}}(x) \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{x}}(x)dx = 1$
  - $P(a < x \leq b) = \int_{a}^{b} p_{\mathbf{x}}(x)dx$
  - $F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p_{\mathbf{x}}(x)dx$

- **O fato de que a probabilidade de se observar algum valor particular ser zero não significa que a variável aleatória não assuma aquele valor.**

- **Alguns tipos de funções densidade de probabilidade**

    - **Bernoulli**
    - **Uniforme**
    - **Poisson**
    - **Gaussiana**
    - **Exponencial**
    - **Rayleigh**
    - **Chi-quadrado**

Distribuição Conjunta

⇨ **Sejam x e y duas variáveis aleatórias. A Função distribuição de probabilidade conjunta de x e y é a seguinte função:**

$$F_{\mathbf{xy}}(x,y) = Prob(\mathbf{x} \leq x, \mathbf{y} \leq y)$$

⇨ **Função densidade de probabilidade conjunta**

$$p_{\mathbf{xy}}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\mathbf{xy}}(x,y)$$

$$Prob(x_1 < \mathbf{x} \leq x_2, y_1 < \mathbf{y} \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{x_2} p_{\mathbf{xy}}(x,y)dxdy$$

Propriedades:

$$Eventocerteza = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{xy}}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$p_{\mathbf{xy}}(x,y) \geq 0$$

Densidades Marginais

⇨ **São as densidades de probabilidades individuais:**

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{xy}}(x,y)\,dy \qquad p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{xy}}(x,y)\,dx$$

Densidades Condicionais

$$p(x/\mathbf{y}=y)=\frac{p_{\mathbf{xy}}(x,y)}{p_{\mathbf{y}}(y)} \qquad p(y/\mathbf{x}=x)=\frac{p_{\mathbf{xy}}(x,y)}{p_{\mathbf{x}}(x)}$$

- **O evento de se observar x no intervalo (-∞,∞) é uma certeza:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{x}}(x/\mathbf{y}=y)dx=1$$

⇨ **Independência:**

- **Duas variáveis aleatórias são independentes se:**

$$p_{\mathbf{x}}(x/\mathbf{y}=y)=p_{\mathbf{x}}(x) \qquad p_{\mathbf{y}}(y/\mathbf{x}=x)=p_{\mathbf{y}}(y)$$

- **Como consequência:** $p_{\mathbf{xy}}(x,y)=p_{\mathbf{x}}(x)p_{\mathbf{y}}(y)$

Funções de variáveis aleatórias

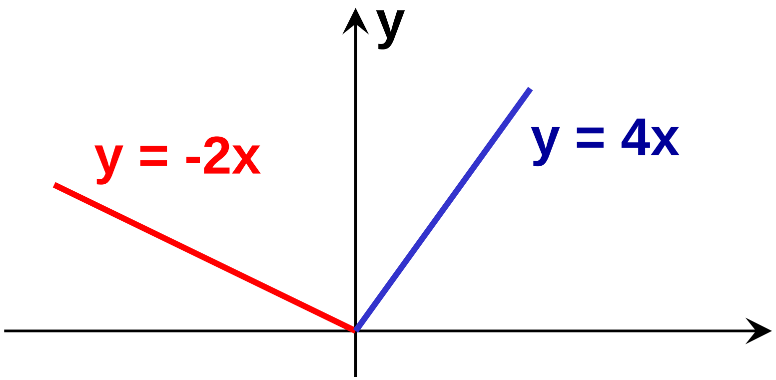
- **Seja x uma variável aleatória. Seja y uma nova variável aleatória tal que:**

$$Y = g(X)$$

- **Função densidade de probabilidade**

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1)}{|dy/dx_1|} + \cdots + \frac{p_X(x_k)}{|dy/dx_k|}$$

- **Exemplo:**



$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$p_Y(y)$ = ?

Valores Esperados (médias)

"é um modo de descrever uma v. a. de forma resumida."

- **Valor médio:** $$m_x = E[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx$$

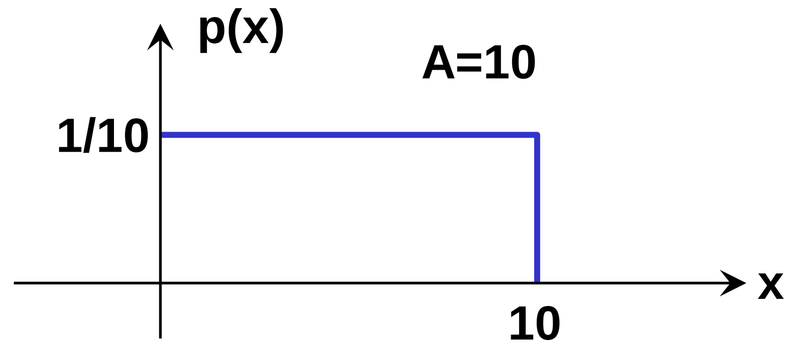
- **Valor quadrático médio:** $$E[\mathbf{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x) dx$$

- **Variância:** $$\sigma_x^2 = E\left[(\mathbf{x} - \mathbf{m_x})^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p_x(x) dx$$

- **Com funções:** $$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_x(x) dx$$

exemplo: função densidade de probabilidade uniforme

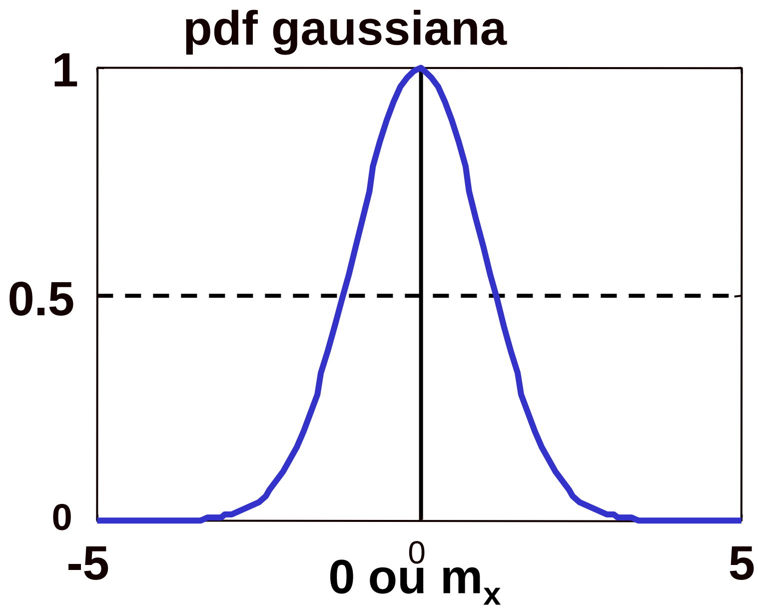
$$p(x) = \begin{cases} 1/A, & 0 \le x \le A \\ 0, & c.c. \end{cases}$$



- **Valor médio:** $$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_0^{10} x \frac{1}{10} dx = 5$$
- **Variância:** $$\sigma_x^2 = \int_0^{10} (x-5)^2 \frac{1}{10} dx = \frac{5}{6}$$
- **Probabilidade:** $$P(6 < x \le 9) = \int_6^9 \frac{1}{10} dx = 0.3$$

exemplo: função densidade de probabilidade gaussiana

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} (e)^{\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$



"Uma v. a. gaussiana é completamente determinada pela sua média e pela sua variância"

- **$P(-\sigma < x < \sigma) \approx 0{,}7$**
- **$P(x < 4) \approx 1$**

- **O ruído branco é modelado como uma pdf Gaussiana.**

Teorema do limite central

⇨ **Sejam x_1 , x_2 , ... x_N um conjunto de v. a. independentes, todas com pdf iguais.**

⇨ **Seja y uma v. a. que é a soma das v. a. acima:**

⇨ $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_N$

⇨ **Neste caso, a pdf de Y será dada por:**

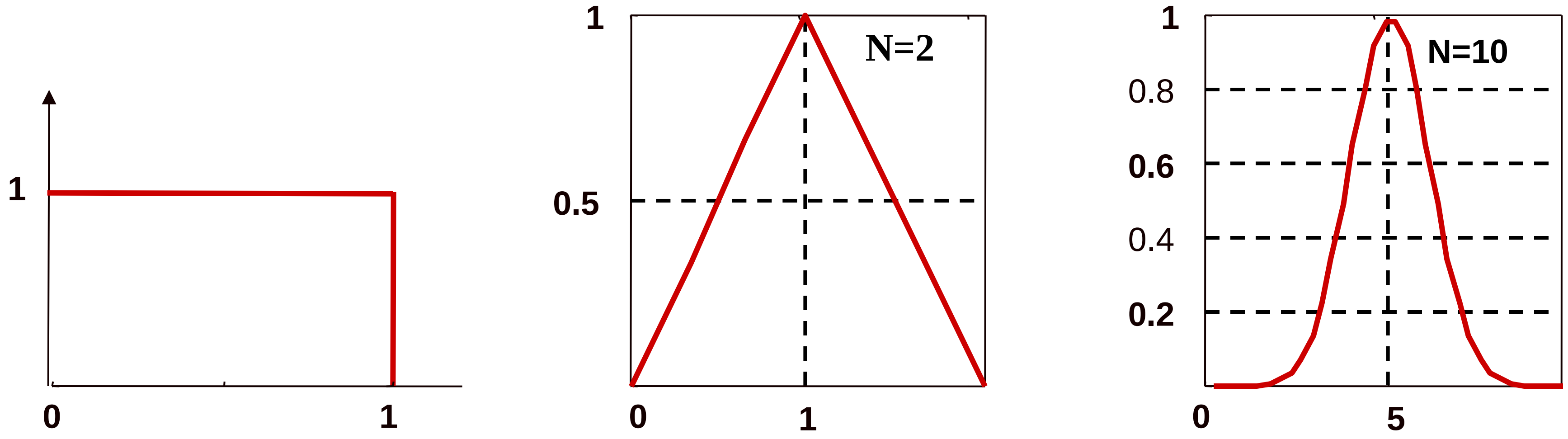
$$p_{\mathbf{y}}(y) = p_{\mathbf{x_1}}(x_1) * p_{\mathbf{x_2}}(x_2) * \cdots * p_{\mathbf{x_N}}(x_N)$$

- ✓ **A operação de convolução tende a "alisar" as funções.**
- ✓ **Assim, conforme N tende ao infinito a v. a. y tende a apresentar, no limite, uma pdf gaussiana.**
- ✓ **Este resultado é conhecido como o "TEOREMA DO LIMITE CENTRAL".**

teorema do limite central

- Na prática N = 10 é suficiente para observar esta tendência.

$$m_x = \sum m_{xi} \qquad || \qquad \sigma_x^2 = \sum \sigma_{xi}^2$$



- **Exemplo:**
  - ✓ O ruído térmico resulta do movimento aleatório dos elétrons livres em um dispositivo elétrico. Como existem muitos elétrons, ele é bem modelado por uma distribuição gaussiana.

Médias estatísticas
e
Funções densidade de probabilidade

Média de uma variável aleatória

⇨ **Seja x uma v. a. discreta que assume os valores x_1, x_2, ... x_n.**

✓ **Se um experimento é repetido N vezes e m_1, m_2, ... m_n são os números de resultados favoráveis a x_1, x_2, ... x_n. Então o valor médio de x é definido como:**

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\left[m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n\right]$$

$$se\ N \to \infty \quad então \quad p_{\mathbf{x}}(x_i) = \frac{m_i}{N}$$

✓ **Logo o valor médio de x é determinado pela seguinte equação:**

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_{\mathbf{x}}(x_i)$$

- Para o caso de eventos igualmente prováveis as probablidades $p_x(x_i)$ são iguais para todo i, assim :

$$p_{\mathbf{x}}(x_i) = m / N = 1/n \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad pois: N = m \times n$$

- Neste caso o valor médio de x é dado por:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- para variáveis aleatórias contínuas o valor médio é dado por:

$$\bar{x} = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

⇨ **média de uma função de uma variável aleatória:**

✓ **Sendo y = g(x) tem-se que:**

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} y p_{\mathbf{y}}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{\mathbf{x}}(x) dx$$

✓ **Para o caso discreto:**

$$\bar{y} = \overline{g(x)} = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) p_{\mathbf{x}}(x_i)$$

- **Variáveis aleatórias múltiplas: z = g(x,y)**

$$\bar{z} = \int_{-\infty}^{\infty} z p_{\mathbf{z}}(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) p_{\mathbf{xy}}(x,y) dx dy$$

- **Caso discreto:**

$$\bar{z} = \overline{g(x,y)} = \sum_{i=1}^{n} g(x_i, y_i) p_{\mathbf{x}}(x_i, y_i)$$

resultados importantes (propriedades)

- **Soma de variáveis aleatórias:**

$$\overline{x+y+z} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

- **Multiplicação por uma constante (ganho):**

$$\overline{kx} = k\bar{x}$$

- **Média com funções de variáveis aleatórias:**

$$z = g_1(x)g_2(y) \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = \overline{g_1(x)g_2(y)}$$

- ✓ **Se x e y forem independentes:**

$$\bar{z} = \overline{g_1(x)}.\overline{g_2(y)}$$

consequência: => $\overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y}$

Valor quadrático médio

✓ **Para o caso de eventos igualmente prováveis:**

$$\boxed{\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

✓ **admitindo duas v. a. independentes:**

$$\overline{(x+y)^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + 2\overline{x}\,\overline{y}$$

✓ **Considerando um caso mais geral define-se os momentos de uma variável aleatória como segue:**

- **n-ésimo momento**

$$E\left[x^n\right]=\overline{x^n}=\int_{-\infty}^{\infty}x^n\,p_{\mathbf{x}}(x)dx$$

- **n-ésimo momento central**

$$E\left[(x-m)^n\right]=\overline{(x-m)^n}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^n\,p_{\mathbf{x}}(x)dx$$

- **Variância e desvio padrão**

$$\sigma_x^2=\overline{(x-m)^2}=\overline{x^2}-m^2$$

OBS: $\sigma_{\mathbf{x}}$ é o desvio padrão

Mediana

⇨ **A mediana mede a localização do centro da distribuição dos dados:**

✓ **"Sendo ordenados em ordem crescente os valores da amostra, a mediana é o valor que a divide ao meio, isto é, 50% dos valores da amostra são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana."**

✓ **A mediana é determinada da seguinte maneira: Se n é ímpar, a mediana é o valor central dos dados. Se n é par, a mediana é a média dos dois elementos centrais.**

✓ **Representando os valores da amostra ordenada por : x_1, x_2, ... , x_N, então uma expressão para o cálculo da mediana é dada por:**

$$med = \begin{cases} x_{(N+1)/2} & se\ N\ é\ ímpar \\ \frac{1}{2}\left(x_{N/2} + x_{(N/2)+1}\right) & se\ N\ é\ par \end{cases}$$

- **Exemplo:**
  - **x = [1 2 2 3 4 5 6 6 7 7 8]**
    - **mediana = 5**
    - **média = 4,63**
  - **x = [1 2 2 3 4 5 6 6 7 7 8 9]**
    - **mediana = (5 + 6)/2 = 5.5**
    - **média = 5**

- **Como medida de localização, a mediana é mais robusta do que a média, pois não é tão sensível aos dados.**
- **A mediana é aplicada em processamento de sinais para filtrar ruídos**
  - **Veja as funções: medfilt1 e medfilt2 no Matlab.**
  - **Em imagens a mediana filtra muito bem o ruído *salt and pepper.***

apêndice

distribuições de probabilidade

Função densidade de probabilidade (pdf)

- Se a função distribuição de probabilidade, F(x), é contínua e diferenciável, então a pdf é determinada por:

$$p_{\mathbf{x}}(x) = p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

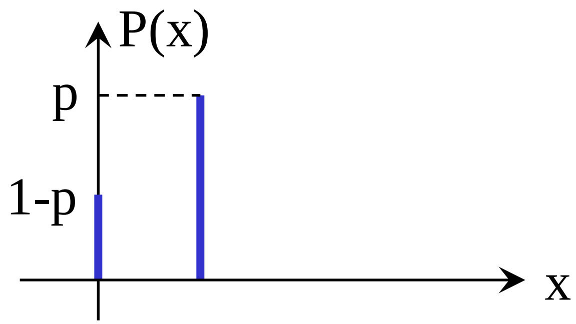
  - p(x) Mede o quão rápido F(x) está aumentando ou o quanto é provável um resultado estar em torno de algum valor.

- **Propriedades:**
  - $p_{\mathbf{x}}(x) \geq 0$
  - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{\mathbf{x}}(x)dx$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{x}}(x)dx = 1$
  - $P(a < x \leq b) = \int_{a}^{b} p_{\mathbf{x}}(x)dx$

distribuição de Bernoulli

⇨ **Uma v.a. aleatória de Bernoulli apresenta a seguinte pdf:**

$$p(k) = P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k} \qquad k = 0,1$$



✓ **Média e variância**

$$\bar{x} = p \qquad \overline{\sigma_x^2} = p(1 - p)$$

⇨ **A v.a. aleatória de Bernoulli é associada a experimentos com dois resultados, como por exemplo os estados "zero" e "um" de um sistema de comunicação digital.**

- **Seja uma variável (processo) composta de N observações independentes com probabilidades iguais a *p*. Esta variável apresenta uma distribuição binomial se:**

$$p(k) = P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, N$$

- **Em que x = k representa o número de observações tomadas e,**

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k!)}$$

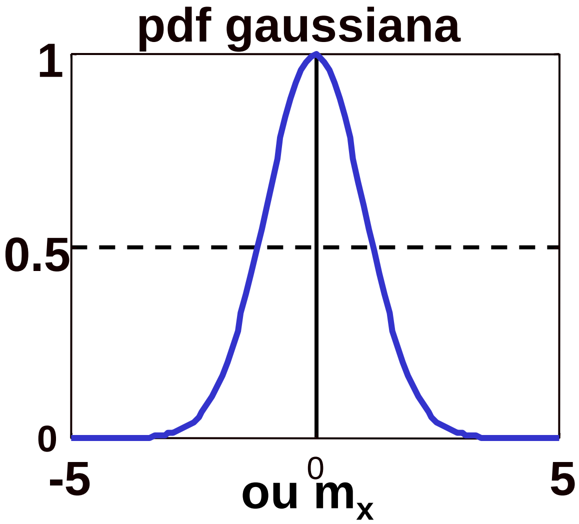
  - ✓ **Média e variância**

$$\bar{x} = Np \qquad \sigma_x^2 = Np(1-p)$$

distribuição Gaussiana ou Normal

⇨ **Uma v.a. aleatória gaussiana apresenta a seguinte pdf:**

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma_x^2}$$



- **"Uma v. a. gaussiana é completamente determinada pela sua média e pela sua variância"**

$$\bar{x} = m_x \qquad \overline{x^2} = \sigma_x^2 + m_x^2$$

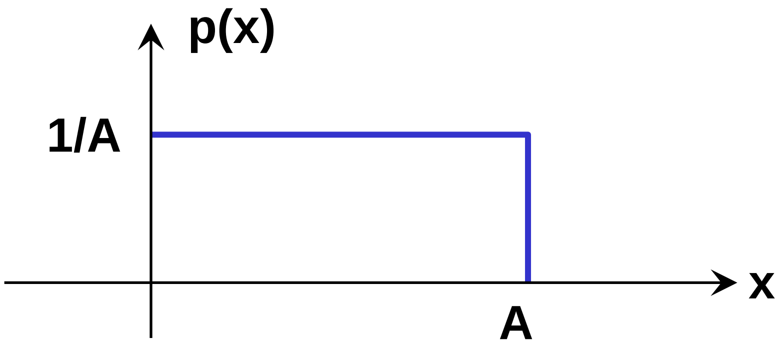
- **P(-σ < x< σ) ≈ 0.7**

- **P(x < 4) ≈ 1**

distribuição uniforme

⇨ **Uma v.a. aleatória uniformemente distribuída apresenta a seguinte pdf:**

$$p(x) = \begin{cases} 1/A, & 0 \le x \le A \\ 0, & c.c. \end{cases}$$



➢ **Valor médio:**

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_{0}^{A} x \frac{1}{A} dx = \frac{A}{2}$$

➢ **Variância:**

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{A}{2} \right)^2 \frac{1}{A} dx = \frac{A^2}{12}$$

➢ **Exemplo de aplicação: "ruído de quantização na conversão AD"**

distribuição de Poisson

⇨ **Uma v. a. X tem uma distribuição de Poisson com parâmetro α se ela assume valores 0, 1, 2, n, ... tal que:**

$$P(X = k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \qquad k = 0, 1, \cdots$$

⇨ **Função densidade e distribuição de probabilidades:**

$$p_x(x) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \delta(x - k) \qquad F_x(x) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha^k}{k!} \qquad 0 \leq x < N + 1$$

- **O valor médio e a variância são iguais:**

$$\bar{x} = \alpha \qquad e \qquad \sigma_x^2 = \alpha$$

⇨ **Exemplo: o número de chamadas telefônicas em algum intervalo de tempo**

distribuição Exponencial

⇨ **Uma v. a. X tem uma distribuição exponencial com parâmetro λ se sua pdf é dada por:**

$$P(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

✓ **Média e variância**

$$\bar{x}=\frac{1}{\lambda} \qquad \sigma_x^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

distribuição de Rayleigh

⇨ **Uma v. a. X tem uma distribuição de Rayleigh se sua pdf é dada por:**

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} u(x) \qquad \sigma > 0$$

✓ **Média, valor quadrático médio e variância:**

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \qquad \overline{x^2} = 2\sigma^2 \qquad \sigma_x^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

⇨ **A função $u(x)$ é a degrau unitário, isto é, $u(x) = 1$, $x \geq 0$, $u(x) = 0$, $x < 0$. Assim, $p(x) = 0$ para $x < 0$.**

⇨ **Um exemplo da pdf de Rayleigh: ela é utilizada na modelagem de flutuações aleatórias da envoltória de certas formas de onda.**

distribuição chi-quadrado

⇨ **Uma v. a. X tem uma distribuição chi-quadrado se ela assume valores tais que:**

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} x_i^2$$

⇨ **Função distribuição de probabilidades:**

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{N/2}\Gamma(N/2)} y^{\frac{N-2}{2}} e^{-y/2} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

✓ **Média e variância**

$$\bar{y} = N \qquad \sigma_y^2 = 2N$$