ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Estática –
Sistemas de Forças
(parte 2)

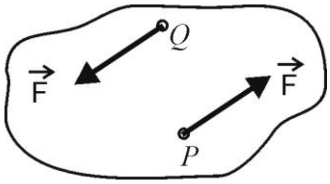
Prof. Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2020

PME3100 Mecânica I

2 – Estática

2.1.5 – Binário

Um binário é um sistema de forças constituído por duas forças opostas (mesmo módulo e sentidos opostos): $(\vec{F},P)$ e $(-\vec{F},Q)$.



A resultante é nula e, portanto, o momento de um binário independe do polo:

$$\vec{M}_{binário} = (P - Q) \wedge \vec{F}$$

2.1.6 – Sistemas equivalentes

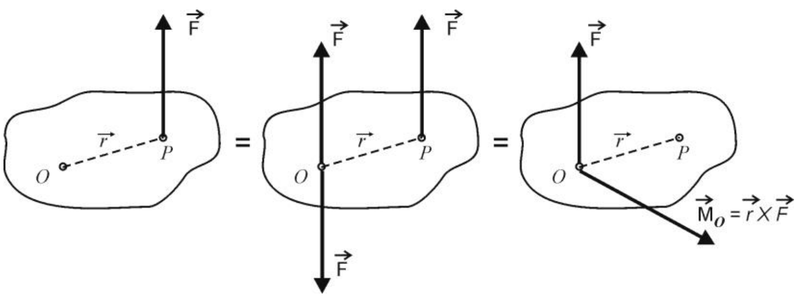
Sistemas equivalentes são aqueles sistemas de forças que têm mesma resultante e mesmo momento em relação a um polo.

Propriedades:

(a) O equilíbrio de um corpo não se altera se substituirmos as forças aplicadas em um ponto pela resultante delas aplicada no mesmo ponto, e reciprocamente.

(b) O equilíbrio de um sólido não é alterado se o ponto de aplicação de uma força for transportado ao longo de sua reta de aplicação.

(c) Teorema: Todo sistema de forças aplicado a um sólido é equivalente a uma única força aplicada num ponto e um binário.



(d) Como consequência do teorema anterior, sendo qualquer sistema equivalente a uma única força $\vec{R}$ aplicada num ponto O e um binário $\vec{M}_O$, temos quatro casos possíveis:

1º caso: $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$

Sistema equivalente a zero.

2º caso: $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O \neq \vec{0}$

Sistema equivalente a um binário.

3º caso: $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$

Neste caso, existem pontos E tais que $\vec{M}_E = \vec{0}$.

De fato, da fórmula de mudança de polo:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R} \Rightarrow \underbrace{(E - O)}_{incógnita} \wedge \vec{R} = \vec{M}_O - \vec{M}_E$$

Esta é uma equação vetorial do tipo $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$, que só terá solução se $\vec{u} \perp \vec{v}$. Como $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$, então $\vec{M}_O \perp \vec{R}$ ($\vec{M}_O \neq \vec{0}$) e a equação acima tem solução para $\vec{M}_E = \vec{0}$:

$$(E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O \Rightarrow (E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\left|\vec{R}\right|^2} + t\vec{R}, \text{ com } t \text{ arbitrário}$$

Esta é a equação de uma reta paralela a $\vec{R}$.

Assim, neste caso o sistema é equivalente a uma única força, aplicada num ponto E qualquer daquela reta.

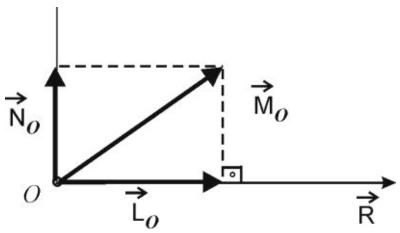
4º caso: $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$

O sistema é equivalente a $(\vec{R}, O)$ mais um binário $\vec{M}_O$.

2.1.7 – Momento mínimo – Eixo central

O momento das forças de um sistema depende do polo escolhido. Procuremos os pontos (polos) E tais que o momento em relação a eles tenha intensidade (módulo) mínima (não necessariamente zero).

Da fórmula de mudança de polo, já vimos que, sendo $\vec{M}_O$ o momento em relação a um polo O qualquer e $\vec{R}$ a resultante, o produto $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$ independe do polo escolhido. Ou seja, a componente do momento $\vec{M}_O$ na direção da resultante não depende do polo escolhido. Chamemos essa componente de $\vec{L}_O$ e a outra componente, ortogonal a $\vec{R}$, de $\vec{N}_O$:



O módulo de $\vec{M}_O$ será : $\left|\vec{M}_O\right|^2 = \left|\vec{L}_O\right|^2 + \left|\vec{N}_O\right|^2$

Como $\vec{L}_O$ não depende do polo O, o $\left|\vec{M}_O\right|$ mínimo será aquele calculado em relação a um ponto E tal que $\left|\vec{N}_E\right| = 0$, ou seja, $\vec{M}_E$ terá a direção de $\vec{R}$:

$$\vec{M}_E = h\vec{R}$$

<u>Teorema:</u> O L.G. dos pontos E para os quais um sistema de forças de resultante $\vec{R} \neq \vec{0}$ tem momento $h\vec{R}$ é uma reta paralela a $\vec{R}$. O escalar h independe do ponto E da reta.

De fato:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R} = h\vec{R} \Rightarrow (E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O - h\vec{R}$$

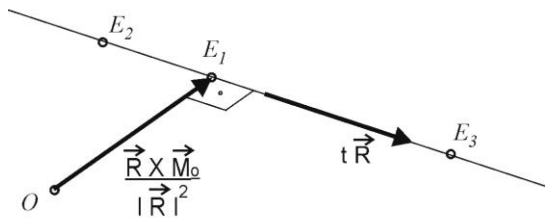
A equação acima tem solução para:

$$\left(\vec{M}_O - h\vec{R}\right) \perp \vec{R} \Rightarrow h = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|^2}$$

Os pontos E que satisfazem a equação acima são pontos de uma reta paralela a $\vec{R}$.

Esta reta é chamada eixo central do sistema de forças:

$$(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\left|\vec{R}\right|^2} + t\vec{R}, t \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$



2.1.8 – Equilíbrio dos sólidos

Definição de equilíbrio:

Dizemos que um sistema está em equilíbrio em relação a um referencial (ou que as forças que nele atuam estão equilibradas) quando a ação total dessas forças é tal a manter o corpo em repouso, isto é, não produz no corpo, a partir do repouso, nenhuma variação de posição.

Teorema: a condição necessária e suficiente para o equilíbrio de um sólido (corpo rígido) é que sejam nulos a resultantes e o momento total de todas as forças aplicadas nele, em relação a um polo *O* qualquer:

$$\left\| \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{array} \right. \qquad \text{forças} \left| \begin{array}{l} \text{internas} \\ \text{externas} \end{array} \right.$$

<u>- Princípio da ação e reação</u>:" A cada força, proveniente da ação de um corpo *C* sobre um corpo *C'*, corresponde uma força oposta proveniente da ação de *C'* sobre *C*."

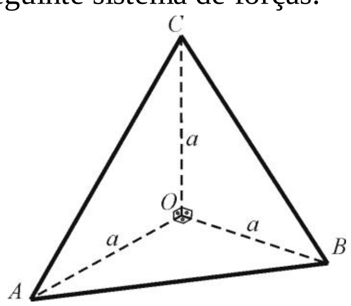
No equilíbrio, o sistema de forças internas, pelo princípio da ação e reação, será equivalente a zero. Assim, para obter o equilíbrio, necessitamos apenas que:

$$\left\| \begin{array}{l} \vec{R}_{ext} = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oext} = \vec{0} \end{array} \right. \qquad (2.6)$$

2.1.9 – Exemplos

1) No tetraedro *OABC* age o seguinte sistema de forças:

$\vec{P} = \lambda(A - O);\ (\vec{P}, A)$
$\vec{Q} = \mu(B - A);\ (\vec{Q}, B)$
$\vec{R} = \nu(C - B);\ (\vec{R}, C)$
$\vec{S} = \rho(O - C);\ (\vec{S}, O)$



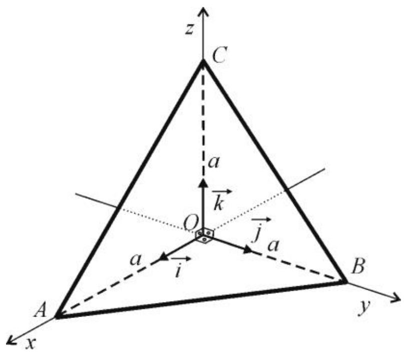
Determine:

(a) A resultante $\vec{F}$ e o momento $\vec{M}_O$, em relação a *O*, do sistema de forças;
(b) As relações entre λ, μ, ν e ρ para que os sistema seja equivalente a:

b1) uma única força
b2) um binário

Resolução:

(a) Adotemos o sistema de coordenadas:



As componentes das forças nas direções de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ serão:

$$\vec{P} = \lambda(A - O) = \lambda a\vec{i}$$
$$\vec{Q} = \mu(B - A) = \mu[(B - O) + (O - A)] = \mu[a\vec{j} + a(-\vec{i})] = -\mu a\vec{i} + \mu a\vec{j}$$
$$\vec{R} = \nu(C - B) = \nu[(C - O) + (O - B)] = \nu\left[a\vec{k} + a(-\vec{j})\right] = -\nu a\vec{j} + \nu a\vec{k}$$
$$\vec{S} = \rho(O - C) = \rho a\left(-\vec{k}\right) = -\rho a\vec{k}$$

A resultante $\vec{F}$ será a soma de todas as forças do sistema:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S} = (\lambda a\vec{i}) + (-\mu a\vec{i} + \mu a\vec{j}) + \left(-\nu a\vec{j} + \nu a\vec{k}\right) + \left(-\rho a\vec{k}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{F} = (\lambda - \mu)a\vec{i} + (\mu - \nu)a\vec{j} + (\nu - \rho)a\vec{k}}$$

O momento em relação a O será:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= (A - O) \wedge \vec{P} + (B - O) \wedge \vec{Q} + (C - O) \wedge \vec{R} + (O - O) \wedge \vec{S} = \\ &= (a\vec{i}) \wedge (\lambda a\vec{i}) + (a\vec{j}) \wedge (-\mu a\vec{i} + \mu a\vec{j}) + \left(a\vec{k}\right) \wedge \left(-\nu a\vec{j} + \nu a\vec{k}\right) + \vec{0} = \\ &= \vec{0} + \left(-\mu a^2\vec{j} \wedge \vec{i} + \vec{0}\right) + \left(-\nu a^2\vec{k} \wedge \vec{j} + \vec{0}\right) = \\ &= -\mu a^2\left(-\vec{k}\right) - \nu a^2(-\vec{i}) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{M}_O = \nu a^2\vec{i} + \mu a^2\vec{k}}$$

b)

b1) A condição necessária e suficiente para que o sistema seja equivalente a uma única força é:

$$\vec{M}_O \cdot \vec{F} = \vec{0}, \text{ com } \vec{F} \neq \vec{0}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O \cdot \vec{F} &= \left(\nu a^2\vec{i} + \mu a^2\vec{k}\right) \cdot \left[(\lambda - \mu)a\vec{i} + (\mu - \nu)a\vec{j} + (\nu - \rho)a\vec{k}\right] = \\ &= \nu a^3(\lambda - \mu) + \vec{0} + \mu a^3(\nu - \rho) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nu(\lambda - \mu) + \mu(\nu - \rho) = 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \nu\lambda = \mu\rho}$$

Assim, se $\nu\lambda = \mu\rho$, o sistema é equivalente a uma única força.

b2) Para o sistema ser equivalente a um binário, basta que a resultante seja nula:

$$\vec{F} = \vec{0}, \text{ com } \vec{M}_O \neq \vec{0}$$

Assim, com $a \neq 0$:

$\vec{F} = (\lambda - \mu)a\vec{\imath} + (\mu - \nu)a\vec{\jmath} + (\nu - \rho)a\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ \mu - \nu = 0 \\ \nu - \rho = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \mu \\ \mu = \nu \\ \nu = \rho \end{cases}$ ou $\boxed{\lambda = \mu = \nu = \rho}$

Assim, se $\lambda = \mu = \nu = \rho \neq 0$, o sistema será equivalente a um binário.