Sistemas Mecânicos

- Introdução
- Translacionais → elementos puros
  - ❖ exemplos
- Rotacionais → elementos puros
  - ❖ Exemplos

- Analogias
- Exemplos:
  - ❖ ¼ de carro
  - ❖ ½ de carro
  - ❖ Outros

Introdução

Sistemas mecânicos podem ser modelados por meio de leis físicas, como por exemplo, as três Leis de Newton:

- ação / reação
- lei da inércia
- teorema fundamental (2ª Lei)

Ou pelas

- Eq. de Lagrange
- TEC
- .....

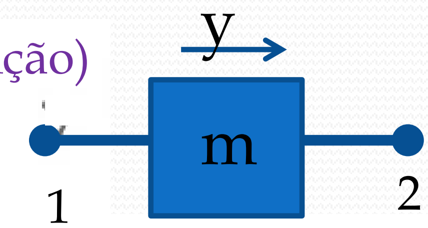
Estes sistemas também podem ser modelados pelo método de identificação de sistemas, que não é objeto desta disciplina. Neste método, as equações que descrevem a dinâmica do sistema são sintetizadas a partir da relação entre as respostas e entradas do sistema.

Sistemas Mecânicos Translacionais

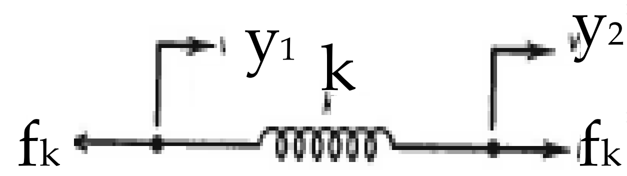
Elementos puros: (parâmetros concentrados: só uma função)

a) armazenadores de energia (E)

- massa: (inércia) (rígida)



- mola:



(elasticidade, sem massa, sem amortecimento)

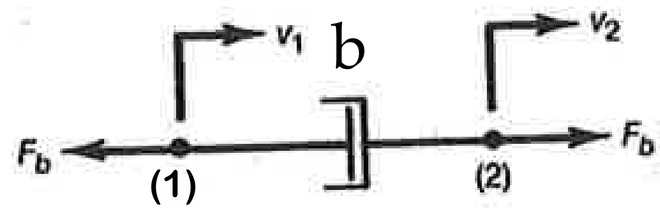
unidades:

$$[m] = kg \qquad [k] = \frac{kg}{s^2} = \frac{N}{m}$$

b) dissipadores de Energia:

- amortecedor:

(amortecimento, sem massa, inelástico)



unidades:

$$[b] = \frac{N.s}{m} = \frac{kg}{s}$$

Modelos para elementos puros lineares

→ Massa:

2ª Lei : $f = m\ddot{y}$ (hipóteses: só inércia, inelástica e sem amortecimento)

→ Mola:

(hipóteses: só elasticidade, sem massa, sem amortecimento)

Lei de Hooke: $f_r = k\Delta y$ (contrária ao movimento)

→ Amortecedor:

(hipóteses: viscoso, linear, sem massa, inelástico):

$f_r = b\Delta\dot{y} = b\Delta v$ (contrária ao movimento)

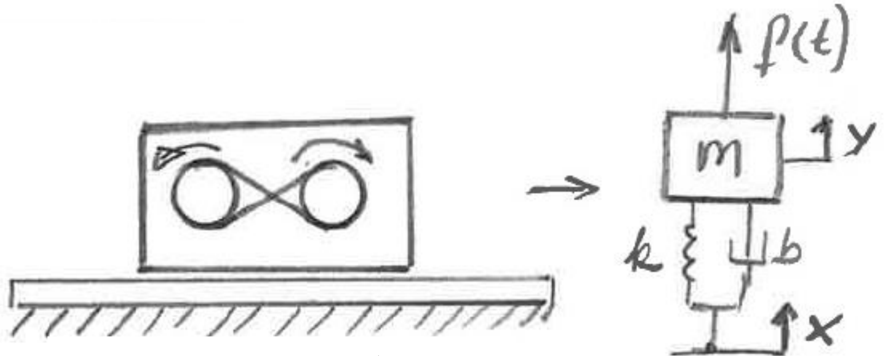
Lei fundamental: $\vec{Q} =$ quantidade de movimento $= m\vec{v}$

$\therefore \dot{\vec{Q}} = \vec{R}_{ext}$ $(m = cte)$

$m\dot{\vec{v}} = \vec{R}ext = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} \xrightarrow{1\,D} m\ddot{y} = f$

Exemplo: vibração de máquina

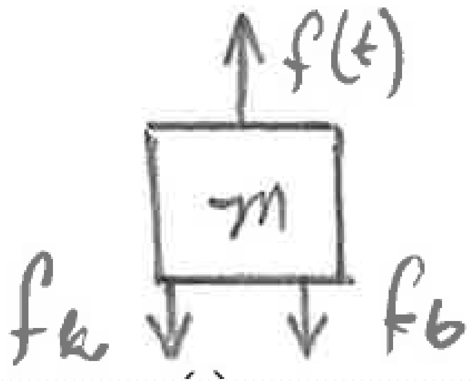
Máquina Desbalanceada sobre base rígida ou elástica



Sistema real

Modelo Físico

- diagrama de corpo livre:



Hipóteses simplificadoras:

1. Elementos puros
2. Modelos lineares
3. Só movimento vertical, não há rotação➔ 1 GL

$$f_k = k(y-x) \qquad f_b = b(\dot{y} - \dot{x})$$

Exemplo: vibração de máquina

2ª lei de Newton:

$$m\ddot{y} = +f(t) - f_k - f_b$$

- base elástica: $m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x) = f(t)$
- base rígida : x=0

$$m\ddot{y} = +f(t) - ky - b\dot{y}$$
$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f(t)$$

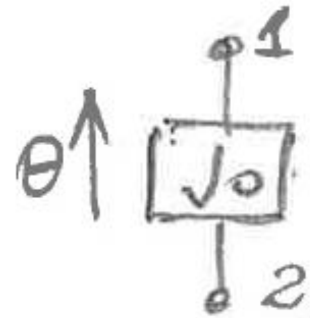
Como $\dfrac{dy}{dt} = v$

$$m\,\dot{v} + b\,v + k\int v\,dt = f(t) \qquad (1)$$

Mecânica Rotacional

- Elementos puros:

a) armazenadores de E
- inércia:



- mola torcional:

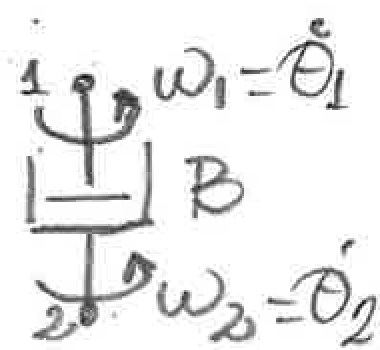
Unidades:

$$[J_o] = kg.m^2$$

$$[K] = \frac{N.m}{rad} = \frac{kg}{rad}.\frac{m}{s}.m$$

b) dissipadores de E

- amortecedor rotacional:



Unidades:

$$[w] = \frac{rad}{s}$$

$$[B] = \frac{N.m.s}{rad}$$

Modelos Lineares

<u>Lei fundamental:</u> $\vec{H}_o = J_o \vec{w} \rightarrow$ <u>quantidade de movimento angular</u>

$$\therefore \dot{\vec{H}}_o = J_o \dot{\vec{w}} = \vec{M}_o \rightarrow \text{TMA}$$

$\rightarrow$ inércia $\quad \vec{M}_o = J_o \, \dot{\vec{w}} \rightarrow$ vetorial

$$M_o = J_o \, \dot{w} = J_o \, \ddot{\theta} \rightarrow \text{escalar}$$

$\rightarrow$ mola torcional

$$M_k = k\Delta\theta \rightarrow \text{escalar, contrário ao movimento}$$

$\rightarrow$ amortecedor

$$M_B = B\Delta w \rightarrow \text{escalar, contrário ao movimento}$$

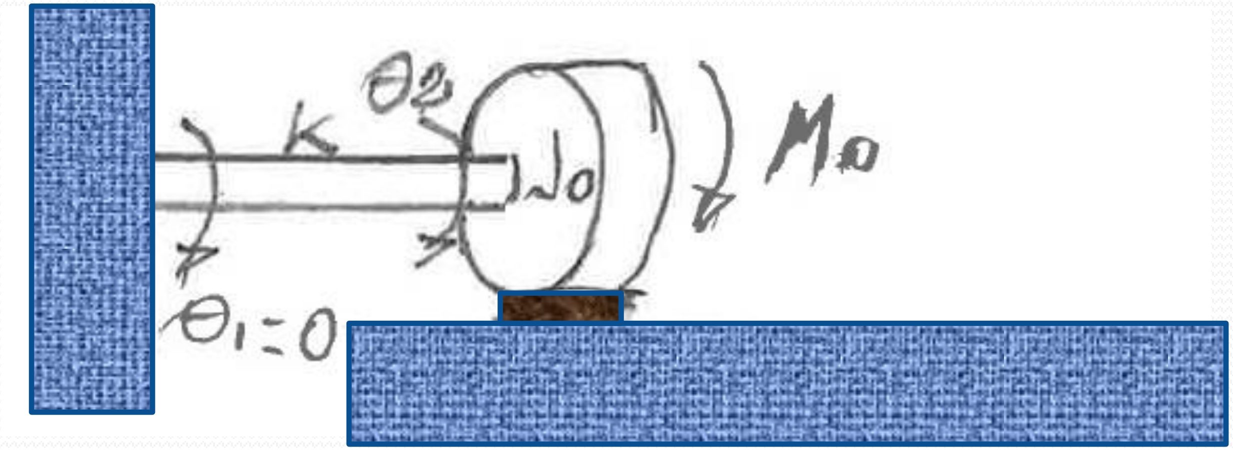
Lei fundamental: 2^a lei $\rightarrow$ TMA

$$\vec{H}_o = J_o \, \vec{w}$$

$$\therefore \dot{\vec{H}}_o = J_o \, \dot{\vec{w}} = \vec{M}_{oext}$$

$$\vec{v}_o = \vec{0} \qquad ou \qquad \vec{v}_o // \vec{v}_G$$

Exemplo: Vibração torcional



Hipóteses simplificadoras:

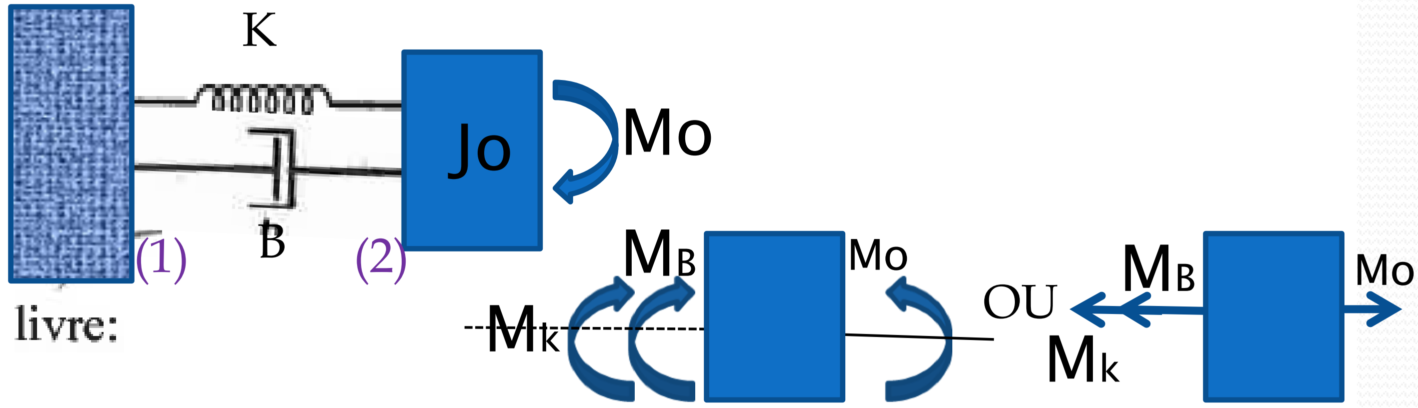
- Elementos puros com comportamento linear
- Eixo longo, sem massa, sem amortecimento por histerese
- Eixo flexível
- Amortecimento viscoso no contato entre o disco e o solo
- Engastamento perfeito

Exemplo: Vibração torcional

Deformação do eixo: $\theta_2 - \theta_1 = \theta_2 = \theta$

- modelo físico:

- diagrama de corpo livre:



modelo matemático: TMA (2a. Lei de Newton) $\rightarrow J_o\dot{\vec{w}} = \vec{M}_{o\,ext}$

$$J_o\dot{w} = M_o - M_x - M_o$$

$$J_o\dot{w} = M_o - K\theta - B\dot{\theta}$$

$$J_o\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = M_o$$

$$J_o\dot{w} + Bw + K\int wdt = M_o \qquad (2)$$

Analogias

Observando as equações do sistema translacional e do rotacional, reproduzidas abaixo, percebe-se a analogia do modelo, das variáveis e parâmetros:

$$m\dot{v} + bv + k\int v\,dt = f(t) \qquad (1)$$ → Sistema translacional

$$J_o\dot{w} + Bw + K\int w\,dt = M_o(t) \qquad (2)$$ → Sistema rotacional

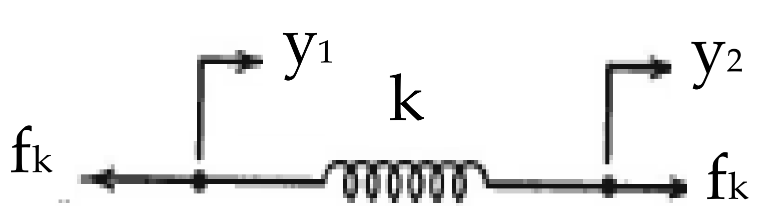
$$\begin{array}{cccccc} m & v & y & f(t) & k & b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ J_o & w & \theta & M_o(t) & K & B \end{array}$$

$m \quad v \quad y \quad f(t) \quad k \quad b$ → Sistema translacional

$J_o \quad w \quad \theta \quad M_o(t) \quad K \quad B$ → Sistema rotacional

variável entre

variável através



Analogias

A partir desta analogia podemos determinar outras expressões:

$$EC \rightarrow T_c = \frac{mv^2}{2} \rightarrow T_c = \frac{J_o w^2}{2}$$

unidades: $[T_c] = Joules$

$$TEC \rightarrow \Delta T = \tau_{ext}$$

$$\tau = \int f dx = \int f . v dt \qquad \leftarrow v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = vdt$$

unidades:

$$[\tau] = N.m = Joule$$

$$\tau_R = \int M_o \omega \, dt = \int M_o . d\theta$$

Analogias

$$P = potência = f.v$$

unidades:

$$[P] = N.\frac{m}{s} = Watts = W$$

<u>Mecânica Rotacional</u>

- Potência dissipada: $\overbrace{P_d = F_b.v = bv^2}^{\text{tRANS.}} \Longrightarrow \overbrace{P_d = M_o w = Bw^2}^{\text{ROT.}}$

- Energia potencial: (ligada aos acumuladores de E):

  Obs: força é apenas função da posição

→ <u>Massa</u>: $V = mgh$

unidades:

$$[V] = Joule = N.m$$

→ Mola linear: $V = \frac{kx^2}{2}$

analoga à mola torcional: $V = \frac{K\theta^2}{2}$

Analogias

obs.: Na verdade a analogia não é total para sistemas tridimensionais. Veja abaixo:

Na translação no espaço: Teorema da resultante (2a. Lei):

$$\dot{\vec{Q}} = M\vec{a}_c = M\dot{\vec{v}} = \vec{\mathrm{R}}\mathrm{e}\,xt$$

para movimentos roto-translacionais: TMA (2a. Lei):

$$\dot{\vec{H}}_O = J_o\dot{\vec{w}} = \vec{M}_{oext} + m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O$$

A analogia só ocorre quando $\vec{v}_G // \vec{v}_o$ ou $\vec{v}_o = \vec{O}$ ($\exists$ polo fixo)

No caso do CG:

$\dot{\vec{H}}_G = J_G\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_{Gext}$ e a analogia volta ser completa.

Momento angular:

$$\vec{H}o = m\vec{r}_G \wedge \vec{v}o + \begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{bmatrix}\underbrace{[J_o]}_{\text{matriz de inércia}}\,\vec{\omega}$$

Analogias

No caso de polo fixo ou coincidente com a origem:

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} [J]_G \, \vec{\omega}$$

No caso de figura plana movimentando-se no seu plano:

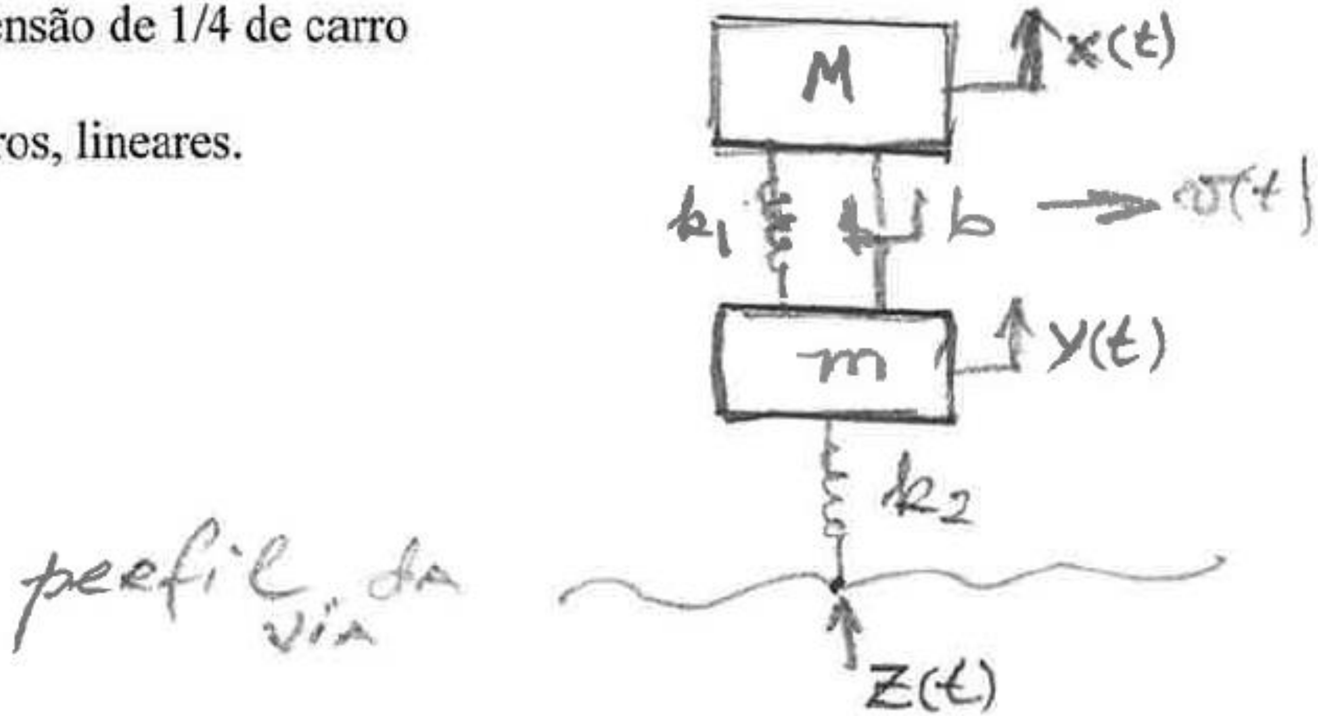
$$\vec{H}_G = J_G \, \vec{\omega}$$

TMA: $\dot{\vec{H}}_G = J_G \, \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_{Gext}$

Exemplo: ¼ de carro

Ex. Modelagem de Suspensão de 1/4 de carro

Hipóteses: Elementos puros, lineares.



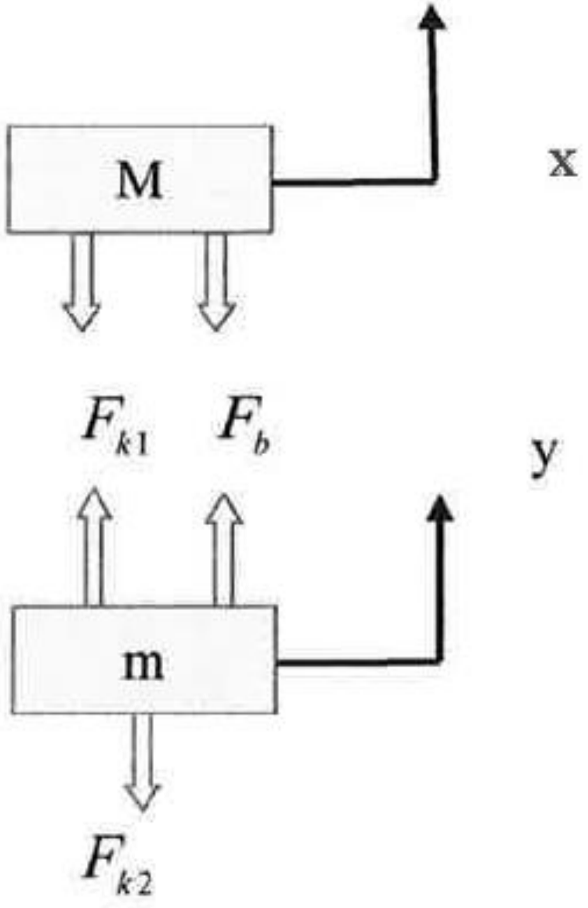
Hipóteses simplificadoras: elementos puros, lineares, movimentos verticais....

Exemplo: ¼ de carro

Obs. : 2 GL
Diagramas de corpo livre:

→ massa suspensa:

→ massa não suspensa:



Exemplo: ¼ de carro

$$F_b = b(\dot{x} - \dot{y})$$

$$F_{k1} = k_1(x - y)$$

$$F_{k2} = k_2(y - z)$$

2a. lei na massa suspensa:

$$M\ddot{x} = -F_b - F_{k1} = -b(\dot{x} - \dot{y}) - k_1(x - y)$$

$$\therefore M\ddot{x} + b\dot{x} + k_1 x = b\dot{y} + k_1 y$$

2a. lei na massa não-suspensa:

$$m\ddot{y} = F_b + F_{k1} - F_{k2} = b(\dot{x} - \dot{y}) + k_1(x - y) + k_2(z - y)$$

$$\therefore m\ddot{y} + b\dot{y} + (k_1 + k_2)y = b\dot{x} + k_1 x + k_2 z$$

O sistema de equações (acoplado) que descreve este sistema é:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{y} + ky \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + (k_1 + k_2)y = b\dot{x} + k_1 x + k_2 z \end{cases}$$

Exemplo: ¼ de carro

Alternativa usando as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}=Q_i$$

$$L=T-V$$

$$T=\frac{M\dot{x}^2}{2}+\frac{m\dot{y}^2}{2}$$

$$V=\frac{1}{2}k_1(x-y)^2+\frac{1}{2}k_2(y-z)^2$$

$$R=\frac{1}{2}b(\dot{x}-\dot{y})^2$$

Grau de Liberdade x:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=M\dot{x}\Rightarrow\frac{d}{dt}(M\dot{x})=M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-k_1(x-y)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}}=b(\dot{x}-\dot{y})$$

$$\therefore M\ddot{x}+k_1(x-y)+b(\dot{x}-\dot{y})$$

Grau de Liberdade y:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}\Rightarrow\frac{d}{dt}(m\dot{y})=m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=k_1(x-y)-k_2(y-z)$$

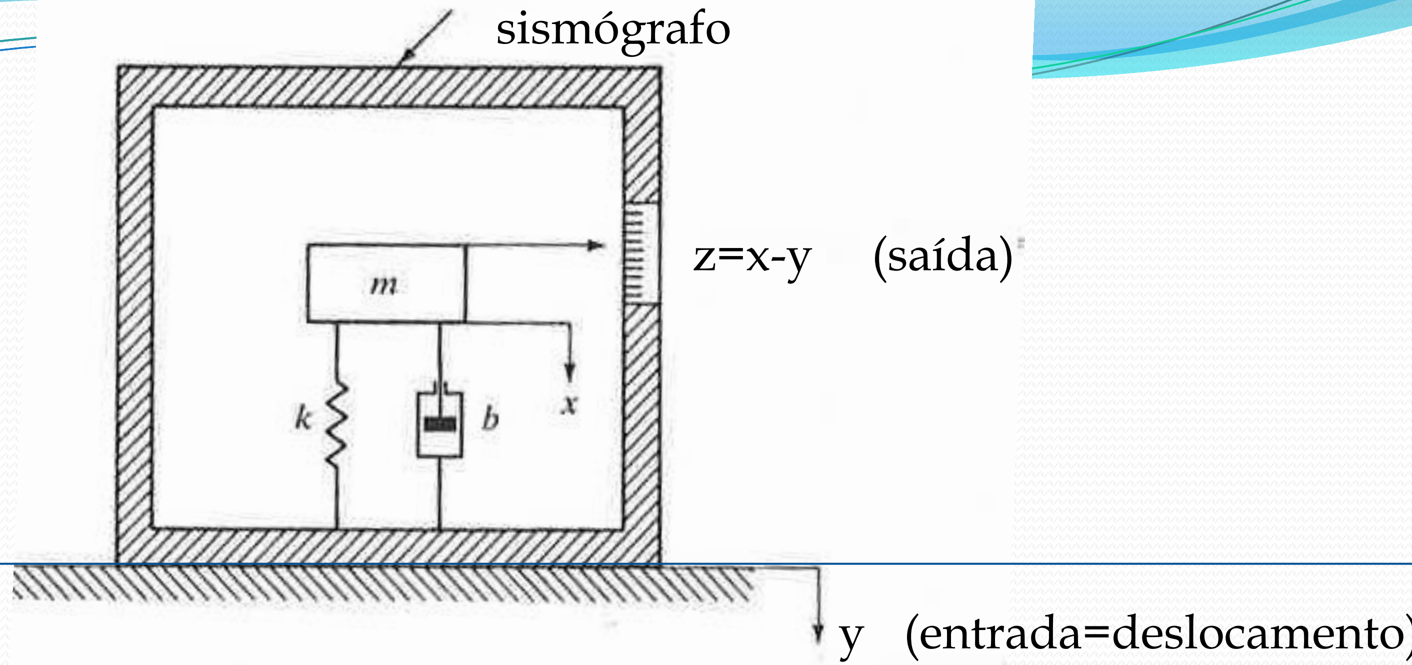
$$\frac{\partial R}{\partial \dot{y}}=-b(\dot{x}-\dot{y})$$

$$\therefore m\ddot{y}-k_1(x-y)+k_2(y-z)-b(\dot{x}-\dot{y})=0$$

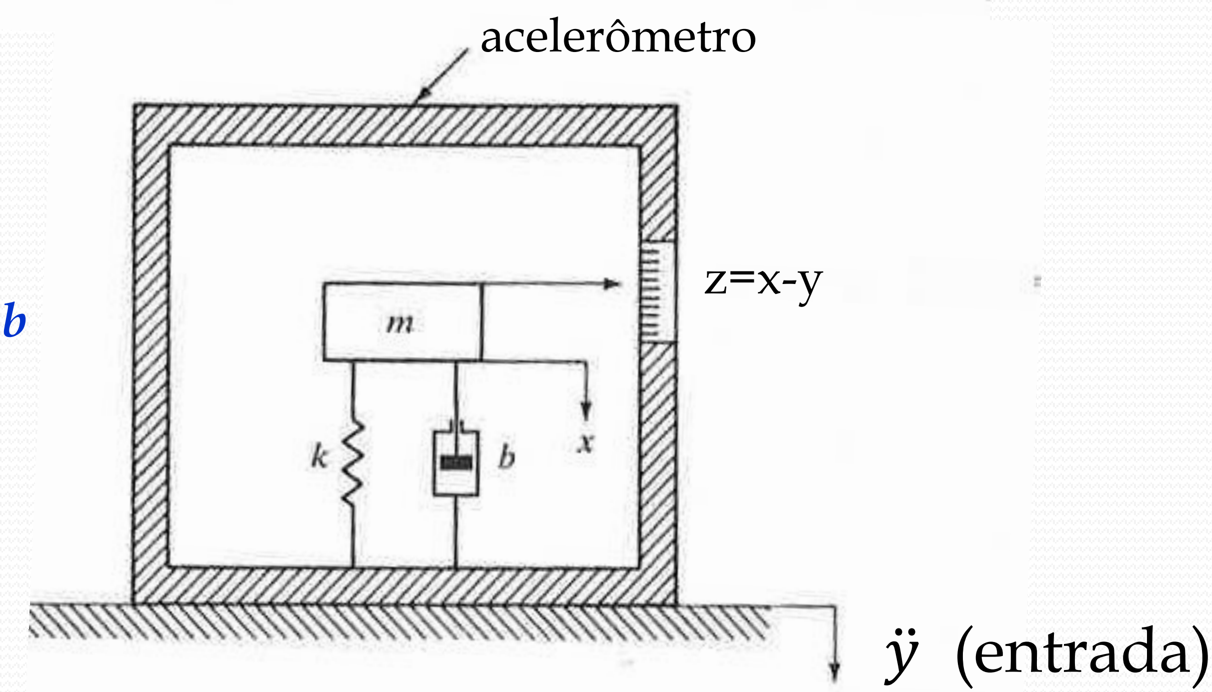
Exercícios para casa:

1) sismógrafo 1b) acelerômetro
2) máquina rotativa com absorvedor de vibração
3) carrinho de transporte: 3.1) massa da carreta desprezível 3.2) massa da carreta não desprezível
4) ½ carro para movimentos verticais usando a Equação de Lagrange : carro avança com velocidade ***v(t), z(t)*** é o deslocamento devido ao perfil da via (calcular α), *l* distância entre os pontos de contato dos pneus com o solo.
   a) ângulo de inclinação grande do chassi
   b) ângulo de inclinação pequeno do chassi
5) Pêndulo invertido montado em carrinho ("Segway")
   a) Leis de Newton
   b) Lagrange.

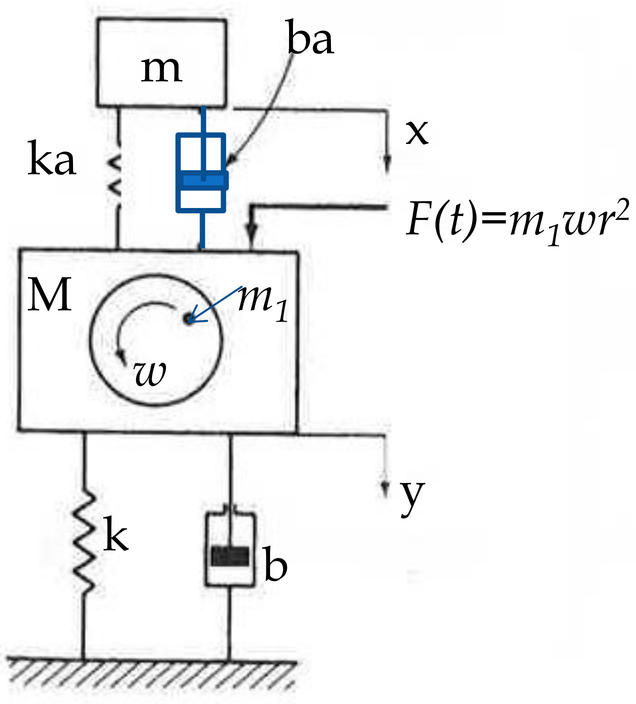
Ex.1


sismógrafo
z=x-y (saída)
m
k
b
x
y (entrada=deslocamento)

Ex.1b


acelerômetro
z=x-y
m
k
b
x
$\ddot{y}$ (entrada)

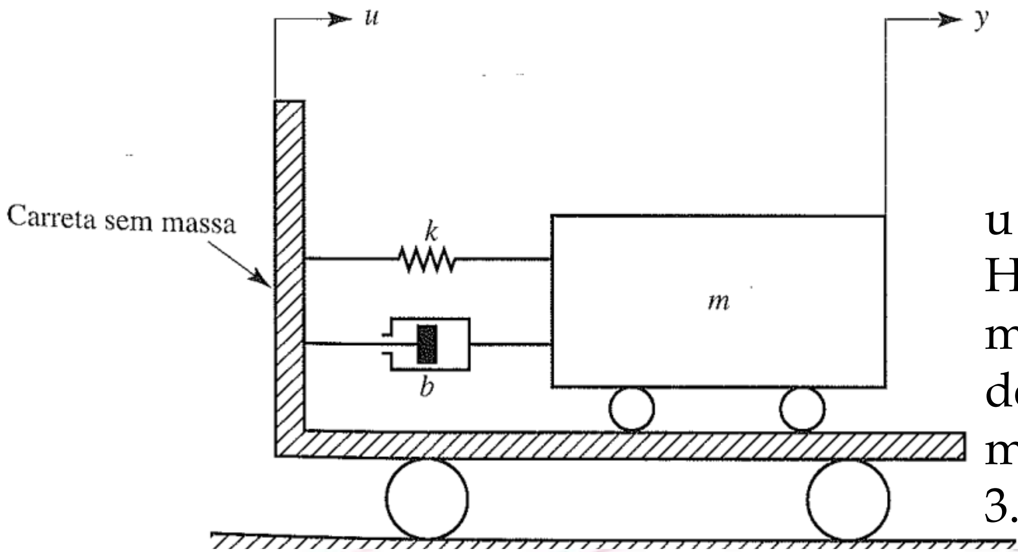
Ex. 2



R →distância entre m1 e o centro do disco.

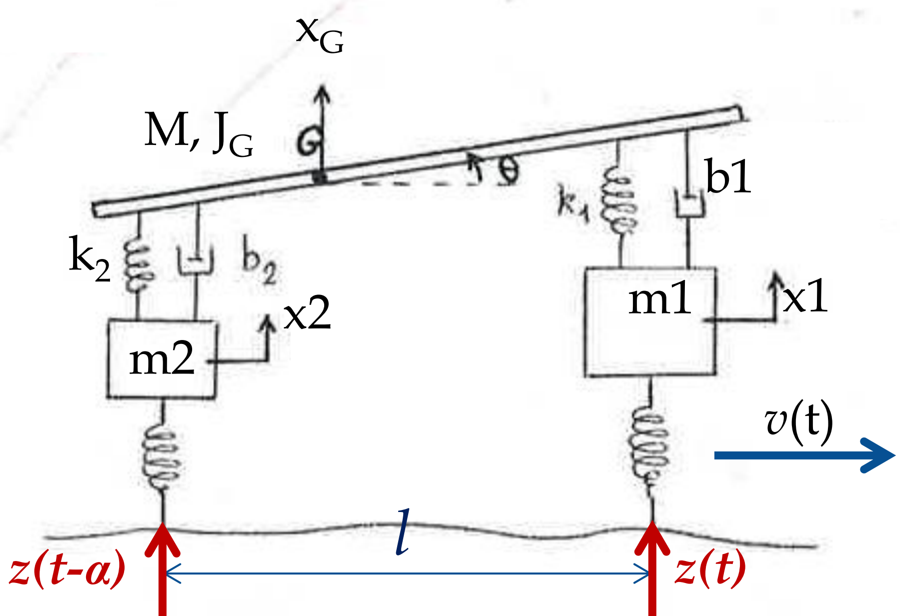
Hipótese: admitir que a massa m_1 é desprezível frente à M, levando em conta apenas a força F(t) devida à rotação w muito alta.

Ex. 3



u → força y→ deslocamento
Hipótese: 3.1) admitir que a massa da carreta é desprezível frente à massa m do bloco.
3.2) admitir que a massa da carreta não seja desprezível.

Ex. 4



4a) grandes movimentos
4b) pequenos movimentos: senΘ≈ Θ e cosΘ=1.

(Θ = inclinação do chassi)

Ex. 5