

MAE0116/MAE0110
Aula 2(b): INDEPENDÊNCIA
Ministrante Prof. Dr. Vladimir Belitsky,
IME-USP

9 de março de 2019

Independência. Definição formal.

Começo com a definição, e logo em seguida pretendo demonstrar que esta é uma formalização fiel daquilo que nossa intuição concebe como a independência.

Definição intuitiva, mas não tradicional: Sejam A e B dois eventos arbitrários definidos num mesmo experimento aleatório, também arbitrário. Então diz-se que o evento B **não depende** do evento A , caso valer a igualdade entre a probabilidade incondicional de B e a probabilidade condicional de B dada a ocorrência do evento A , isto é, caso

$$P[B | A] = P[B] \quad (1)$$

O verbo **independer** usa-se comumente como o sinônimo de “não depender”. Já quando a igualdade (1) não vale, diz-se que B **depende** de A .

Quase que esqueci de avisar que A da definição precisa ter probabilidade não nula (veja a explicação na lousa).

Independência. Uso cotidiano.

Levei meu carro a oficina mecânica e falei:

“Está escapando água do sistema de refrigeração e parece também haver problema na rede elétrica. Só posso deixar carro na sua oficina por uma hora. Será que vale a pena levar o carro ao elétrico antes de pedir de você tratar a perda de água?”

O mecânico respondeu:

“A perda de água não depende dos problemas da rede elétrica”.

Isso pode ser formalizado assim:

Saber onde fica o problema na rede elétrica não afeta em nada o serviço de procura e eliminação do problema de perda de água.

O que pode ser re-escrito na forma mais próxima a nossa notação científica:

A probabilidade de eliminar o problema de perda de água em uma hora é a mesma que a probabilidade de eliminar o problema de perda de água em uma hora sabendo o local do problema da rede elétrica.

Independência. Uso cotidiano.

Segundo conta minha empregada, o avô dela tomava café de manhã observando o curral. Se visse o primeiro boi virar à esquerda após sair do portão, então levava guarda-chuva pois acreditava que que tal comportamento de boi indicava a maior chance de chuva.

Na Faculdade de Geociências da USP explicaram para mim que a chuva não tem nada a ver com tal comportamento do animal.

Após a discussão que esclareceu que ambos os eventos são aleatórios, a afirmação dos cientistas adquiriu a seguinte forma:

A probabilidade de chover num dia é a mesma que a probabilidade de chover nesse dia sabendo que em sua manhã o primeiro boi do rebanho do avô virou a esquerda ao sair de seu curral.

Independência. Formal versus cotidiano.

Comentário: o uso cotidiano/intuitivo do conceito de independência bate SEMPRE com a definição formal. O problema é que a demonstração da relação pode ser trabalhosa devido à dificuldade na revelação da presença de probabilidade em situações cotidianas.

Um apostador num cassino: “Quando começo a jogar, aposto em números ímpares, e, na segunda rodada, independentemente do resultado da primeira, aposto na cor vermelha.”

Minha empregada doméstica: “Independentemente da previsão de tempo, sempre levo guardachuva”.

Meu pior aluno: “É uma ... de disciplina; vou reprovar independente se estudar ou não”.

Minha amada filha: “Vou para Europa nas próximas férias independentemente de sua concordância”.

Minha (ainda) esposa: “O divórcio vai acontecer independentemente se você desejar ou não!!!”

Um ministro do meu querido Brasil: “Política do Brasil independe da política dos Estados Unidos.”

Independência. Ilustração por meio do Diagrama de Venn.

Veja o desenho na lousa.

Independência. Propriedades matemáticas.

Um pouquinho de argumentos formais que vão nos levar à definição alternativa de independência e ensinar resolver alguns exercícios (coisa útil, se for lembrar das provas que lhe esperam no futuro).

Teorema 1 (*troca por complementar do evento condicionador*):
Se B independe de A então B independe de A^c .

Demonstração intuitiva: Se “chover” não dependia do “boi virar à esquerda”, então “chover” não pode depender do “boi virar à direita”.

Teorema 2 (*troca de lugares*):
Se B independe de A então A independe de B .

Independência. Propriedades matemáticas.

Esta transparência é para ser espreitada por um bom tempo até que seu interior concorde com o fato de que ser complicada e complexa, a demonstração do Teorema 2 não tem como.

Teorema 2 (*troca de lugares*):

Se B independe de A então A independe de B .

Tenho:

$$P[B \mid A] = P[B]$$

quero deduzir disto que

$$P[A \mid B] = P[A]$$

Independência. Propriedades matemáticas.

Tomo um B que não depende de A , faço a seguinte conta

$$\begin{aligned} & P[A | B] \\ &= \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \quad (\text{usamos a fórmula da probabilidade condicional}) \\ &= \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \frac{P[A]}{P[A]} = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} \frac{P[A]}{P[B]} \quad (\text{multiplicamos por } 1 = \frac{P[A]}{P[A]} \\ & \hspace{15em} \text{e remanejamos}) \\ &= \frac{P[B | A]}{P[B]} P[A] \quad (\text{usamos a fórmula da probabilidade condicional}) \\ &= P[A] \quad (\text{usamos a hipótese que } P[B | A] = P[B]) \end{aligned}$$

e conluo que então A não depende de B .

Independência. Propriedades matemáticas.

B independe de A

Teorema 1 ↙

B independe de A^c

Teorema 2 ↓

A^c independe de B

Teorema 1 ↓

A^c independe de B^c

Teorema 2 ↘

B^c independe de A^c

↘ Teorema 2

A independe de B

↓ Teorema 1

A independe de B^c

↓ Teorema 2

B^c independe de A

↙ Teorema 1

Independência. Propriedades matemáticas.

O diagrama da transparência anterior mostra que a relação de independência é simétrica. A definição abaixo reflete esta simetria:

Definição de independência, tradicional mas não intuitiva:

Diz-se que events A e B são independentes, caso

$$P[B \cap A] = P[B] \times P[A] \quad (2)$$

As duas definições são equivalentes, fato decorrente da definição da probabilidade condicional:

$$P[B | A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]}$$

Mas a segunda possui a simetria intrínseca da independência já embutida em sua formulação. É por isto, que é mais usada.

Independência. Exercícios.

Exercício. Há três moedas, cada uma das quais dá “cara” (h) com a probabilidade $\frac{2}{3}$, e “coroa” (t) com a probabilidade $\frac{1}{3}$. As moedas serão lançadas em sequência (assuma que as moedas têm cores diferentes para que seja claro que trata-se aqui de um experimento aleatório sequencial). Considere dois eventos:
 A = “obter uma “cara” (h) e uma “coroa” (t) nos dois primeiros lançamentos, em qualquer ordem”,
e
 B = “obter duas “caras” nos dois últimos lançamentos”.

Verifique se A e B são eventos são independentes.

Independência. Exercícios.

Por método de diagrama de árvore, tempos Ω :

$$\{(h \rightarrow h \rightarrow h), (t \rightarrow h \rightarrow h), (h \rightarrow t \rightarrow h), (h \rightarrow h \rightarrow t), (t \rightarrow t \rightarrow h), (t \rightarrow h \rightarrow t), (h \rightarrow t \rightarrow t), (t \rightarrow t \rightarrow t)\},$$

e, em termos dessa codificação, temos:

$$A = \{(t \rightarrow h \rightarrow h), (h \rightarrow t \rightarrow h), (t \rightarrow h \rightarrow t), (h \rightarrow t \rightarrow t)\}$$

$$B = \{(h \rightarrow h \rightarrow h), (t \rightarrow h \rightarrow h)\}$$

Para saber se os eventos são independentes temos que comparar

$$P[A \cap B] \text{ com } P[A] \times P[B].$$

Independência. Exercícios.

Diretamente das expressões para A e B , deduzimos que

$$A \cap B = \{(t \rightarrow h \rightarrow h)\}$$

Da definição de probabilidade para eventos, temos:

$$P[A] = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{12}{27}$$

$$P[B] = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P[A \cap B] = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

e como

$$P[A] \times P[B] = \frac{12}{27} \times \frac{12}{27} \neq \frac{4}{27} = P[A \cap B]$$

conclua-se que os eventos A e B são **DEPENDENTES**.

Independencia. Exercícios.

Eis a solução **ERRADA** deste mesmo exemplo: Começa assim como a solução certa:

Por método de diagrama de árvore, tempos Ω :

$$\{(h \rightarrow h \rightarrow h), (t \rightarrow h \rightarrow h), (h \rightarrow t \rightarrow h), (h \rightarrow h \rightarrow t), (t \rightarrow t \rightarrow h), (t \rightarrow h \rightarrow t), (h \rightarrow t \rightarrow t), (t \rightarrow t \rightarrow t)\},$$

e, em termos dessa codificação, temos:

$$A = \{(t \rightarrow h \rightarrow h), (h \rightarrow t \rightarrow h), (t \rightarrow h \rightarrow t), (h \rightarrow t \rightarrow t)\}$$

$$B = \{(h \rightarrow h \rightarrow h), (t \rightarrow h \rightarrow h)\}$$

$$A \cap B = \{(t \rightarrow h \rightarrow h)\}$$

Para saber se os eventos são independentes temos que comparar

$$P[A \cap B] \text{ com } P[A] \times P[B].$$

Independência. Exercícios.

Vamos calcular as probabilidades:

$$P[A] = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{12}{27}$$

$$P[B] = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P[A \cap B] = P[A] \times P[B] = \frac{12}{27} \times \frac{12}{27} = \frac{12 \times 12}{27^2}$$

e como

$$P[A] \times P[B] = \frac{12}{27} \times \frac{12}{27} = \frac{12 \times 12}{27^2} = P[A \cap B]$$

conclua-se que os eventos A e B são INDEPENDENTES.

O erro está no uso antecipado da independência não verificada para o cálculo de $P[A \cap B]$ como $P[A] \times P[B]$; o CORRETO é calcular $P[A \cap B]$ diretamente a partir de sua expressão como conjunto de resultados.

Independência

Os eventos de uma coleção chamam-se **independentes** se, ao tomar qualquer dois subcoleções da coleção que não tenham eventos comuns, as intersecções das subcoleções forem independentes.

Por exemplo, se alguém lhe disse que A, B, C, D, E, F são independentes, então você tem, segundo a definição, que, por exemplo,

$$\begin{aligned}P[(A \cap C) \cap (B \cap E \cap F)] &= P[A \cap C] \times P[B \cap E \cap F] \\P[A \cap C] &= P[A] \times P[C] \\P[A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F] &= P[A] \times P[B] \times \\ &\quad \times P[C] \times P[D] \times P[E] \times P[F]\end{aligned}$$

Não haverá neste curso necessidades que exijam um aprofundamento maior no presente assunto. Tb não será cobrado em exercícios e provas.

Independência

No nosso curso, não vamos VERIFICAR a independência entre eventos. Vamos aproveitar das propriedades decorrentes da independência, sendo que a presença desta será GARANTIDA pela estrutura dos experimentos aleatórios considerados.

É sobre isto que versa o resto da presente aula.

Estou mentindo, mas um pouco só: vamos verificar a independência, sim, mas somente nos exercícios referentes a presente tema.

Independência

EXEMPLO. Três dados equilibrados são lançados em sequência: primeiramente, o branco, depois o cinza e por último, o preto. Definimos:

$A = \{\text{obter face par no primeiro dado}\}$

$B = \{\text{obter no segundo dado número maior que no terceiro}\}$

Demonstre que A e B são independentes.

Antes da demonstração, vamos formular uma propriedade genérica que garante a independência entre A e B no exemplo acima. É a propriedade mencionada na transparência anterior. Ela será frequentemente usada para identificar independência, a qual, por sua vez, será usada em contas específicas envolvendo esperanças matemáticas e variâncias.

Independência

PROPRIEDADE que garante independência: Seja um experimento aleatório composto. Sejam suas etapas proferidas de maneira independente, quer dizer, em cada etapa, profere-se o mesmo (simples) experimento aleatório, que pode depender do número da etapa, mas não depende dos resultados dos experimentos aleatórios proferidos em outras etapas. Suponha que hajam dois eventos, A e B . Suponha que A foi definido por resultados de algumas etapas, enquanto que B foi definido por resultados de outras etapas. Então A e B são eventos

Independência

Solução do EXEMPLO:

O diagrama de árvore nos dá que

$$\Omega = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), \dots, (6, 6, 6)\}$$

e que a probabilidade de cada uma das $6 \times 6 \times 6 = 216$ é $\frac{1}{216}$.

Temos que

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (2, 1, 1), \dots, (2, 6, 6), \\ (4, 1, 1), \dots, (4, 6, 6), \\ (6, 1, 1), \dots, (6, 6, 6) \end{array} \right\}$$

está composto de $3 \times 6 \times 6$ realizações. Logo, $P[A] = \frac{3 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{2}$.

Independência

Temos que

$$B = \{ \begin{array}{l} (1, 2, 1), \\ (1, 3, 1), (1, 3, 2), \\ (1, 4, 1), (1, 4, 2), (1, 4, 3), \\ (1, 5, 1), (1, 5, 2), (1, 5, 3), (1, 5, 4), \\ (1, 6, 1), (1, 6, 2), (1, 6, 3), (1, 6, 4), (1, 6, 5), \end{array} \}$$

e mais tudo isto repetido para 2, 3, 4, 5, 6 no lugar do primeiro 1.

São 6×15 realizações. Logo $P[B] = \frac{6 \times 15}{6 \times 6 \times 6}$.

Independência

A intersecção entre A e B acha-se sorteando realizações, uma por uma:

$$A \cap B = \{ (2, 2, 1), \\ (2, 3, 1), (2, 3, 2), \\ (2, 4, 1), (2, 4, 2), (2, 4, 3), \\ (2, 5, 1), (2, 5, 2), (2, 5, 3), (2, 5, 4), \\ (2, 6, 1), (2, 6, 2), (2, 6, 3), (2, 6, 4), (2, 6, 5), \}$$

e mais tudo isto repetido para 4 e 6 no lugar do primeiro 2.

São, então 3×15 realizações que compõem $A \cap B$, portanto

$$P[B] = \frac{3 \times 15}{6 \times 6 \times 6}.$$

Independência

Vamos à verificação da independência. Precisamos comparar

$$P[A \cap B] \text{ com } P[A] \times P[B]$$

Do lado esquerdo, temos $\frac{3 \times 15}{6 \times 6 \times 6}$, e do lado direito, temos

$$\frac{3 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6} \times \frac{6 \times 15}{6 \times 6 \times 6} = \frac{3 \times 15}{6 \times 6 \times 6}$$

São valores iguais, e, portanto, podemos alegar que A e B são eventos independentes.