Fluxo de água no solo

PEF-3304 Poluição do Solo

EPUSP

Engenharia Ambiental

Fluxo unidimensional de água no solo

$$Q = k\, i\, A \quad \text{ou} \quad v = k\, i$$

(Lei de Darcy, 1856)

Q ... vazão
k ... coeficiente de permeabilidade
i ... gradiente hidráulico
A ... área total da seção transversal de solo
v ... velocidade
Hipótese: fluxo laminar

Coeficiente de permeabilidade

$$k = K\,\gamma/\mu$$

k ... coeficiente de permeabilidade (condutividade hidráulica)
K ... permeabilidade intrínseca do solo
γ ... peso específico do fluido
μ ... viscosidade dinâmica do fluido

Percolação

A água sempre se movimenta devido a diferenças de energia, sempre de pontos de maior energia para pontos de menor energia.
A energia da água em movimento pode ser expressa por:

$$E = mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{mp}{\rho_w}$$

Equação de Bernoulli (fluido ideal escoando em um tubo com energia constante)

E: energia
m: massa
g: aceleração da gravidade
h: distância vertical em relação a um referencial de nível
v: velocidade do fluxo
p: pressão
ρ_w: massa específica da água

Percolação

Em Geotecnia prefere-se expressar o estado de energia da água em movimento por meio da carga hidráulica, que é a energia dividida pelo produto da massa com a aceleração da gravidade (mg), em metros.

$$H = z + \frac{v^2}{2g} + \frac{u}{\gamma_w}$$

H: carga hidráulica total

z: distância vertical em relação a um referencial de nível

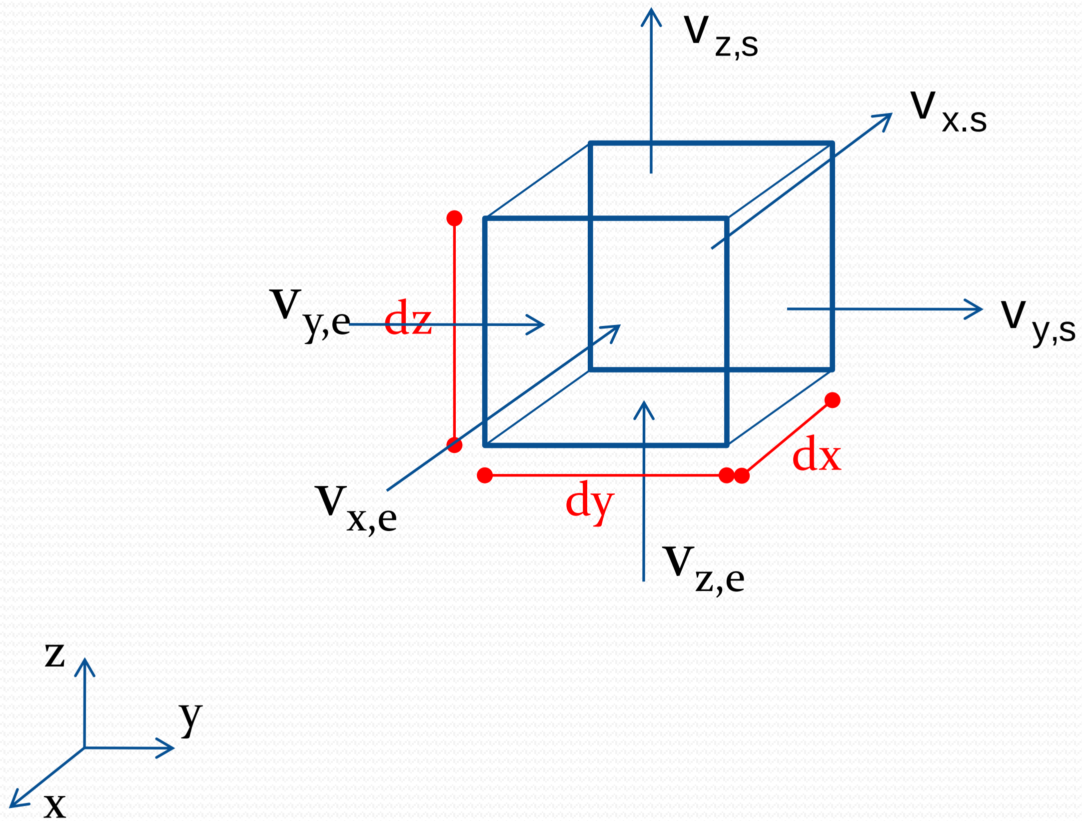
γ_w: peso específico da água (=ρ_wg)

u: pressão neutra (=p-p_{at})

p: pressão absoluta

p_{at}: pressão atmosférica

Fluxo permanente e equação da continuidade



Fluxo de massa

$$J = \frac{M_w}{At}$$

J: fluxo de massa de água
M: massa de água
A: área da seção transversal
t: tempo

$$M_w = JAt$$

Fluxo de massa

fluxo de volume

$$q = \frac{V_w}{At} = \frac{Q}{A} = \frac{L}{t} = v$$

L: comprimento de percolação na direção do fluxo
v: velocidade de Darcy

$$J = \frac{M_w}{At}$$

$$J = \frac{V_w \rho_w}{At} = v\rho_w = q\rho_w$$

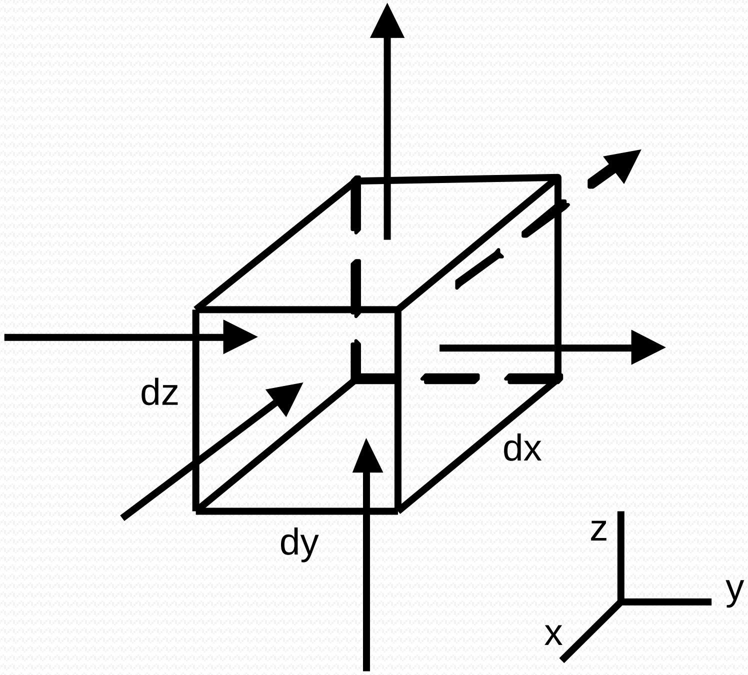
Relação entre fluxo de massa e fluxo volumétrico

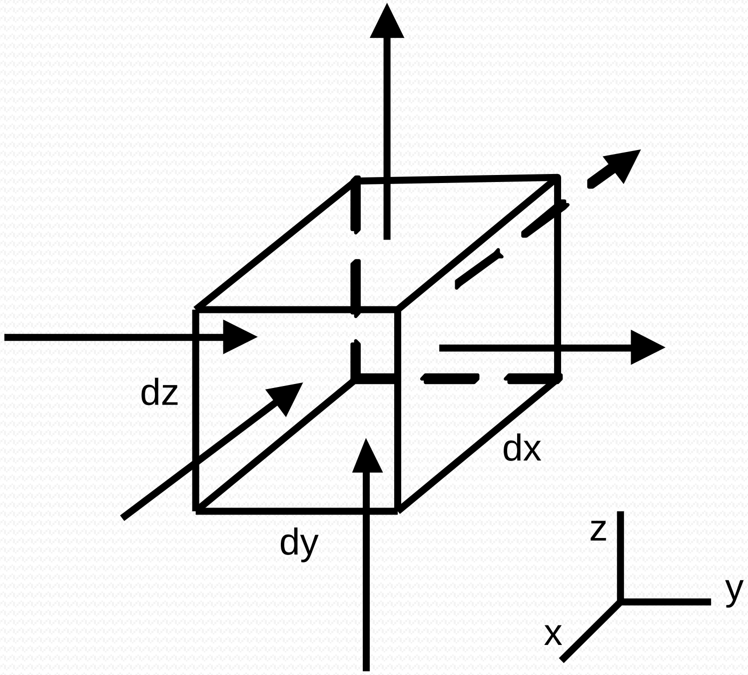
J: fluxo de massa de água
M: massa de água
A: área da seção transversal
t: tempo

$$M_w = JAt$$

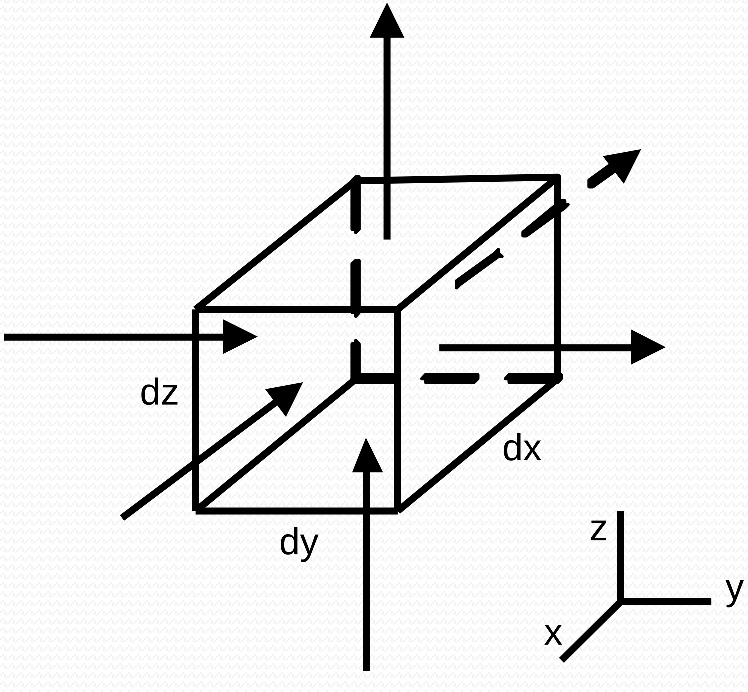
Equação da continuidade

Equação da conservação da massa



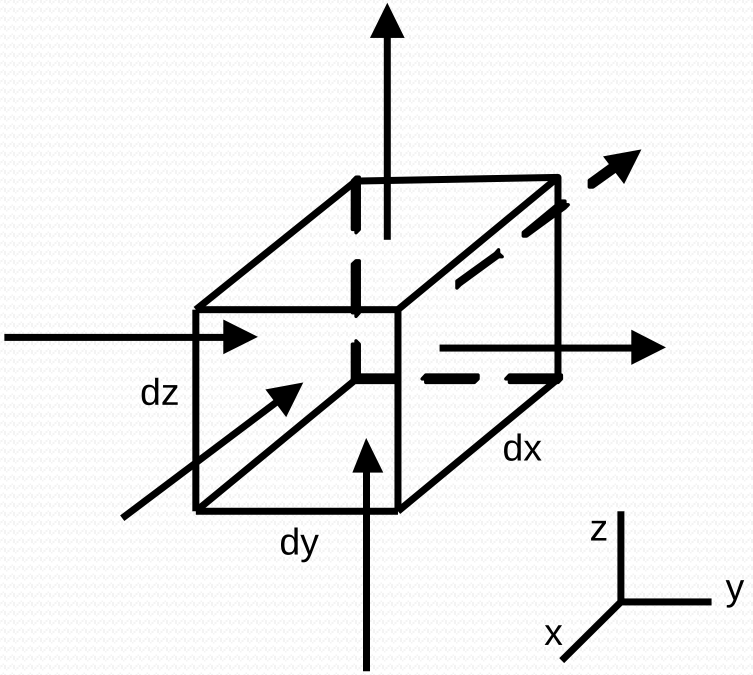


$$M_w = JAt$$



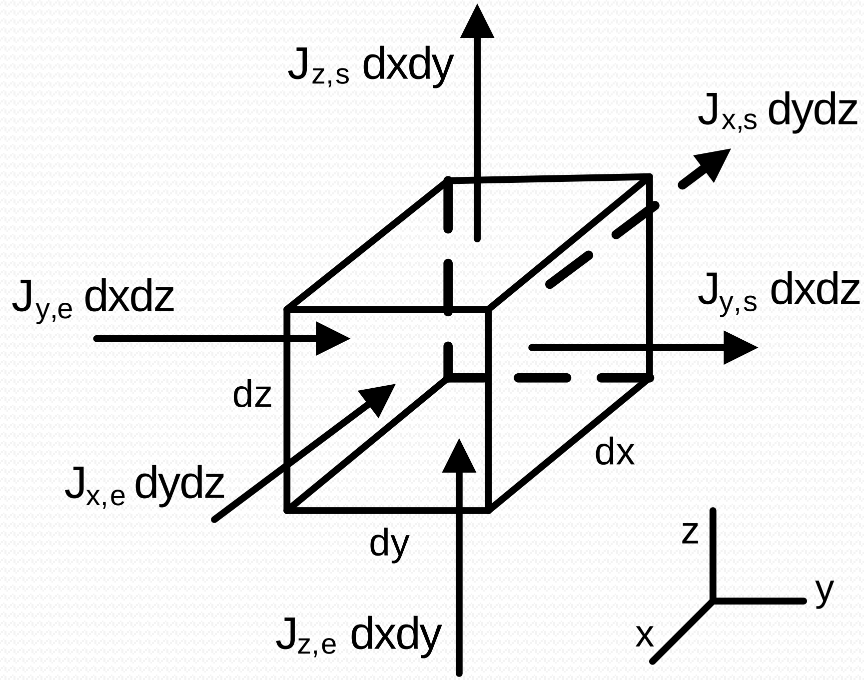
$$M_w = JAt$$

$$JA = \frac{M_w}{t}$$



massa de água que entra no elemento segundo a direção x por unidade de tempo.

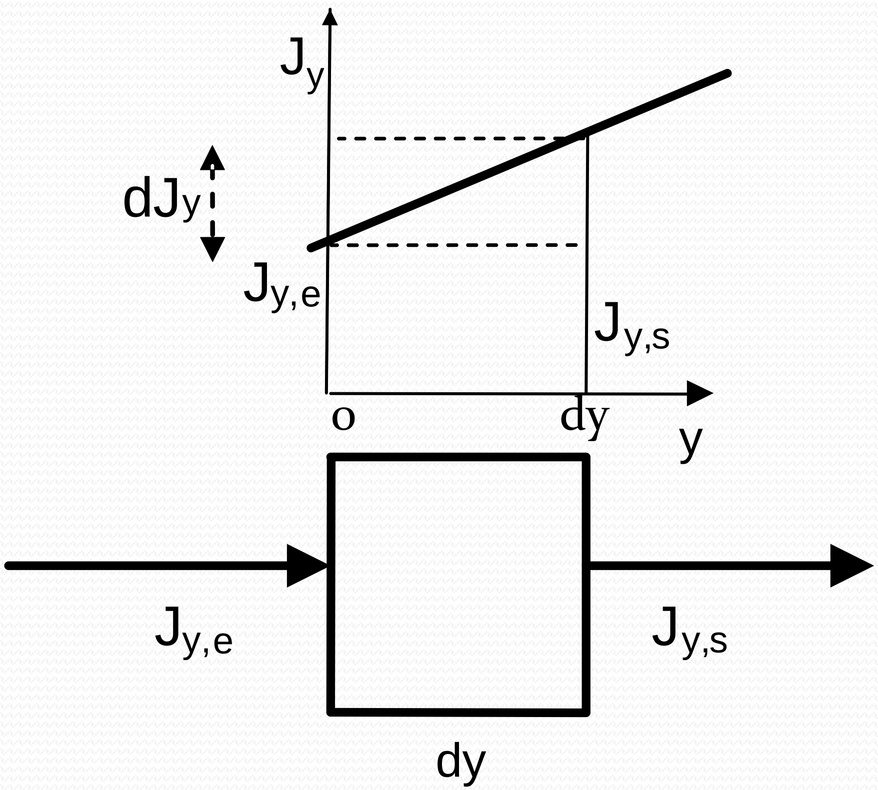
$$J_{x,e} dydz = \frac{dM_{x,e}}{dt}$$



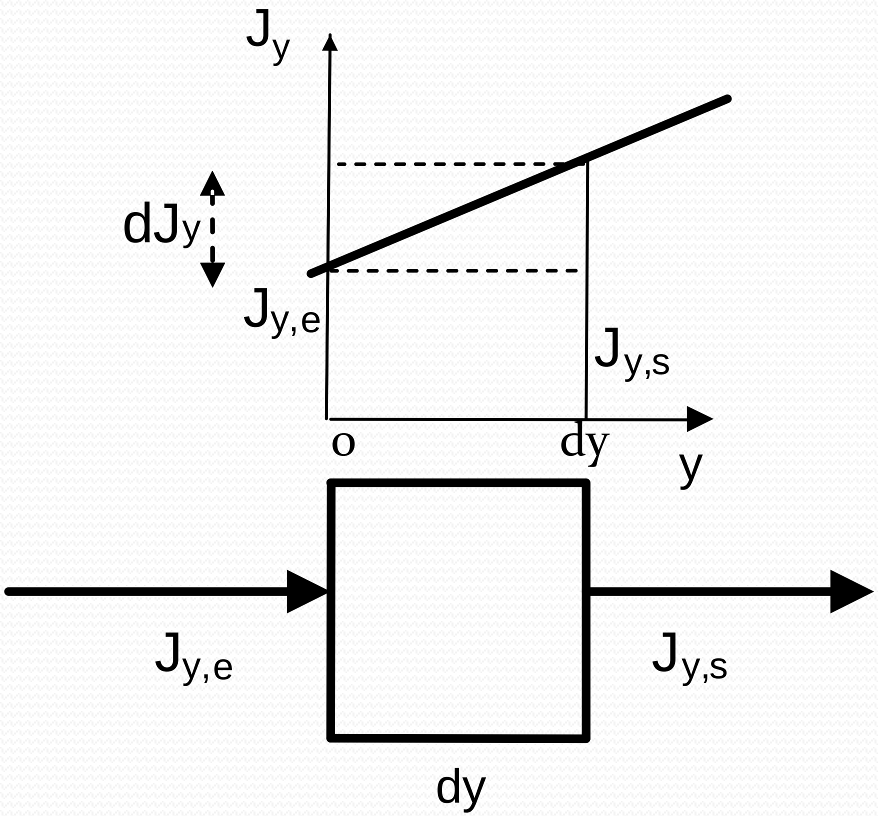
$$J_{x,e}dydz = \frac{dM_{x,e}}{dt}$$

massa de água que entra no elemento segundo a direção x por unidade de tempo.

$$J_{x,e}dydz + J_{y,e}dxdz + J_{z,e}dxdy - J_{x,s}dydz - J_{y,s}dxdz - J_{z,s}dxdy = \frac{dM_{w,arm}}{dt}$$

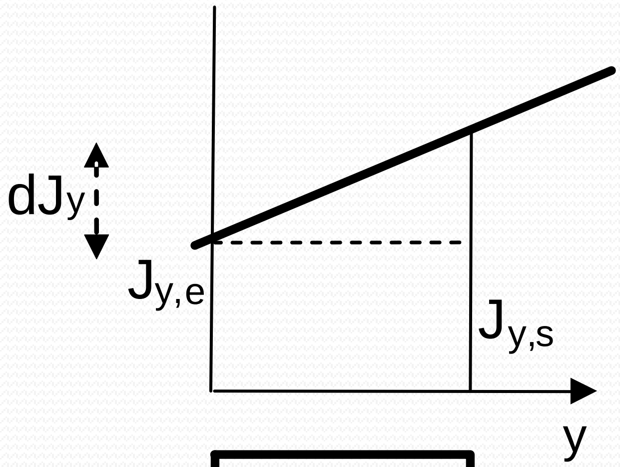


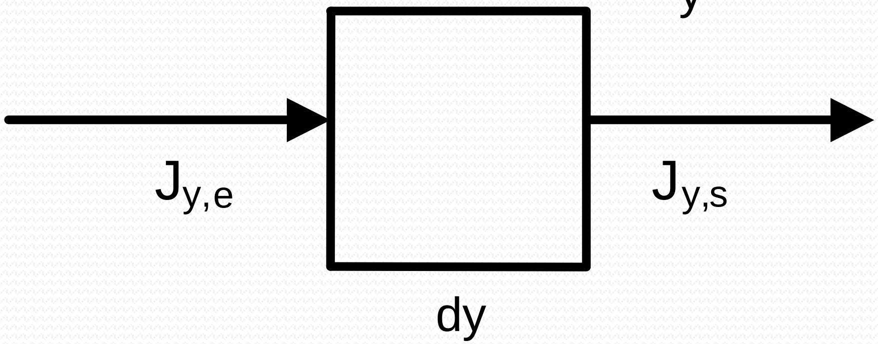
Jy
dJy
Jy,e
Jy,s
o
dy
y
Jy,e
Jy,s
dy



$$dJ_y = \frac{\partial J_y}{\partial y} dy$$

$$J_{y,s} = J_{y,e} + \frac{\partial J_y}{\partial y} dy$$





$$J_{x,e}dydz + J_{y,e}dxdz + J_{z,e}dxdy - J_{x,s}dydz - J_{y,s}dxdz - J_{z,s}dxdy = \frac{dM_{w,arm}}{dt}$$

$$J_{x,e}dydz + J_{y,e}dxdz + J_{z,e}dxdy - (J_{x,e} + \frac{\partial J_x}{\partial x}dx)dydz - (J_{y,e} + \frac{\partial J_y}{\partial y}dy)dxdz$$

$$-(J_{z,e} + \frac{\partial J_z}{\partial z}dz)dxdy = \frac{dM_{w,arm}}{dt}$$

Variação linear do fluxo em função da distância

$$-\frac{\partial J_x}{\partial x}dxdydz - \frac{\partial J_y}{\partial y}dxdydz - \frac{\partial J_z}{\partial z}dxdydz = \frac{dM_{w,arm}}{dt}$$

$$-\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right)dxdydz = \frac{dM_{w,arm}}{dt}$$

$$-\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}\right)dxdydz=\frac{dM_{w,arm}}{dt}$$

$$\mathrm{J} = \mathrm{v}\rho_{\mathrm{w}} = \mathrm{q}\rho_{\mathrm{w}}$$

$$J_x = v_x \rho_{\mathrm{w}} = q_x \rho_{\mathrm{w}}$$

$$J_y = v_y \rho_{\mathrm{w}} = q_y \rho_{\mathrm{w}}$$

$$J_z = v_z \rho_{\mathrm{w}} = q_x \rho_{\mathrm{w}}$$

$$-\left(\frac{\partial(q_x\rho_w)}{\partial x}+\frac{\partial(q_y\rho_w)}{\partial y}+\frac{\partial(q_z\rho_w)}{\partial z}\right)dxdydz=\frac{dM_{w,arm}}{dt}$$

$$\rho_w=\frac{M_w}{V_w}$$

$$M_w=V_w\rho_w$$

$$-\left(\frac{\partial(q_x\rho_w)}{\partial x}+\frac{\partial(q_y\rho_w)}{\partial y}+\frac{\partial(q_z\rho_w)}{\partial z}\right)dxdydz=\frac{d(V_{w,arm}\rho_w)}{dt}$$

$$-\left(\frac{\partial(q_x\rho_w)}{\partial x}+\frac{\partial(q_y\rho_w)}{\partial y}+\frac{\partial(q_z\rho_w)}{\partial z}\right)dxdydz=\frac{d(V_{w,arm}\rho_w)}{dt}$$

ρ_w não varia no espaço e no tempo

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)dxdydz=\frac{dV_{w,arm}}{dt}$$

$$s = \frac{V_w}{V_v}$$

$$n = \frac{V_v}{V_t}$$

$$s = \frac{V_w}{nV_t}$$

$$V_w = sn\,V_t$$

$$n = \frac{e}{1+e}$$

$$V_w = s\,\frac{e}{1+e}\,V_t$$

$$-\left(\frac{\partial(q_x\rho_w)}{\partial x}+\frac{\partial(q_y\rho_w)}{\partial y}+\frac{\partial(q_z\rho_w)}{\partial z}\right)dxdydz=\frac{d(V_{w,arm}\rho_w)}{dt}$$

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)dxdydz=\frac{dV_{w,arm}}{dt}$$

$$V_{w,arm}=S\frac{e}{1+e}V_t$$

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)dxdydz=\frac{d\left(s\frac{e}{1+e}V\right)}{dt}=0$$

Volume não é alterado pelo fluxo de água
Fluxo saturado

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0$$

Lei de Darcy

$$-\frac{\partial\left(-k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-k_y \frac{\partial h}{\partial x}\right)_y}{\partial y} + \frac{\partial\left(-k_z \frac{\partial h}{\partial x}\right)}{\partial z} = 0$$

Solo homogêneo: k não varia com a posição

$$k_x \frac{\partial\left(-\frac{\partial h}{\partial x}\right)}{\partial x} + k_y \frac{\partial\left(-\frac{\partial h}{\partial x}\right)_y}{\partial y} + k_z \frac{\partial\left(-\frac{\partial h}{\partial x}\right)}{\partial z} = 0$$

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

$$k_x = k_y = k_z = k$$

Solo isotrópico

$$\mathrm{k}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Fluxo bidimensional

$$\frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{z}^2} = 0$$

EQUAÇÃO DE LAPLACE

$$-\left(\frac{\partial \mathrm{q_x}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{q_y}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{q_z}}{\partial \mathrm{z}}\right)\mathrm{dxdydz}=0$$

$$-\left(\frac{\partial\left(-k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)_y}{\partial y}+\frac{\partial\left(-k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)}{\partial z}\right)dxdydz=0$$

$$\frac{\partial^2 h_T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h_T}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{z}^2}=0$$

Água

- Viscosidade cinemática:

  Sua unidade no S.I. é *stoke* (1stoke = $1cm^2/s$).

  Viscosidade da água a 20^oC: $\boldsymbol{\nu = 1{,}01.10^{-6} m^2/s}$

- Viscosidade dinâmica: *poise* (1 poise = $0{,}1N.s/m^2$).

  Água fria: $\boldsymbol{\mu = 1{,}03.10^{-4}}$ **kgf.s/m^2**

Densidade e viscosidade da água sob condições normais de pressão

Temperatura - q (°C)	**Densidade absoluta - r (kg/m³)***	**Viscosidade dinâmica - m (10^{-3} N.s/m²)**	**Viscosidade cinemática - n (10^{-6}m²/s)**	**Densidade relativa - d**
0 (gelo)	917,0	-	-	0,9170
0(água)	999,8	1,781	1,785	0,9998
4	1000,0	1,558	1,558	1,0000
5	1000,0	1,518	1,519	1,0000
10	999,7	1,307	1,308	0,9997
15	999,1	1,139	1,140	0,9991
20	998,2	1,002	1,003	0,9982
25	997,0	0,890	0,893	0,9970
30	995,7	0,798	0,801	0,9967
40	992,2	0,653	0,658	0,9922
50	988,0	0,547	0,553	0,9880
60	983,2	0,466	0,474	0,9832
70	977,8	0,404	0,413	0,9788
80	971,8	0,354	0,364	0,9728
90	965,3	0,315	0,326	0,9653
100	958,4	0,282	0,294	0,9584

(*) Para converter para $kgf.s^2/m^4$ divide-se o valor tabelado por 9,80665

Densidade da água em função da temperatura

	Décimos de grau									
°C	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998
10	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9991	0,9990	0,9988	0,9986	0,9984
20	0,9982	0,9980	0,9978	0,9976	0,9973	0,9971	0,9968	0,9965	0,9963	0,9960
30	0,9957	0,9954	0,9951	0,9947	0,9944	0,9941	0,9937	0,9934	0,9930	0,9926
40	0,9922	0,9919	0,9915	0,9911	0,9907	0,9902	0,9898	0,9894	0,9890	0,9885
50	0,9881	0,9876	0,9872	0,9867	0,9862	0,9857	0,9852	0,9848	0,9842	0,9838
60	0,9832	0,9827	0,9822	0,9817	0,9811	0,9806	0,9800	0,9765	0,9789	0,9784
70	0,9778	0,9772	0,9767	0,9761	0,9755	0,9749	0,9743	0,9737	0,9731	0,9724
80	0,9718	0,9712	0,9706	0,9699	0,9693	0,9686	0,9680	0,9673	0,9667	0,9660
90	0,9653	0,9647	0,9640	0,9633	0,9626	0,9619	0,9612	0,9605	0,9598	0,9591

máxima a 4°C = **0,999973 g**/cm^3

Fluxo através do solo

Hipótese:

fluxo não modifica o solo

$$J_i = L_{ii} \; X_i$$

J_i velocidade de fluxo

L_{ii} coeficiente de condutividade

X_i agente motriz

Mitchell, J. K. (1991). "Conduction phenomena: from theory to geotechnical practice". *Géotechnique*. **41** (3): 299–340. doi:10.1680/geot.1991.41.3.299 (acesso gratuito)

$$v = -k \frac{\partial H}{\partial z}$$ Lei de Darcy fluido

$$J = -K_T \frac{\partial T}{\partial z}$$ Lei de Fourier calor

$$i = -\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial z}$$ Lei de Ohm eletricidade

$$J = -D_d \frac{\partial c}{\partial z}$$ Lei de Fick substâncias químicas

Os coeficientes das equações acima são quantidades diretamente mensuráveis.

Fluxos acoplados

Fluxos simultâneos de tipos diferentes com um único agente motriz.

$$J_i = L_{ij} X_j$$

L_{ij} coeficiente de acoplamento

Exemplo: gradiente hidráulico em água contaminada causa fluxo advectivo.

FLUXO	GRADIENTE			
	Carga hidráulica	Temperatura	Eletricidade	Concen-tração química
Fluido	Lei de Darcy	Termo-osmose	Eletro-osmose	Osmose química
Calor	Transferência de calor isotérmica	Lei de Fourier	Efeito Peltier	Efeito Dufour
Corrente	Corrente	Termo-eletricidade: efeito de Seebeck	Lei de Ohm	Potenciais de membrana e difusão
Íon	Advecção	Difusão térmica de eletrólito: efeito Soret	Eletro-forese	Lei de Fick