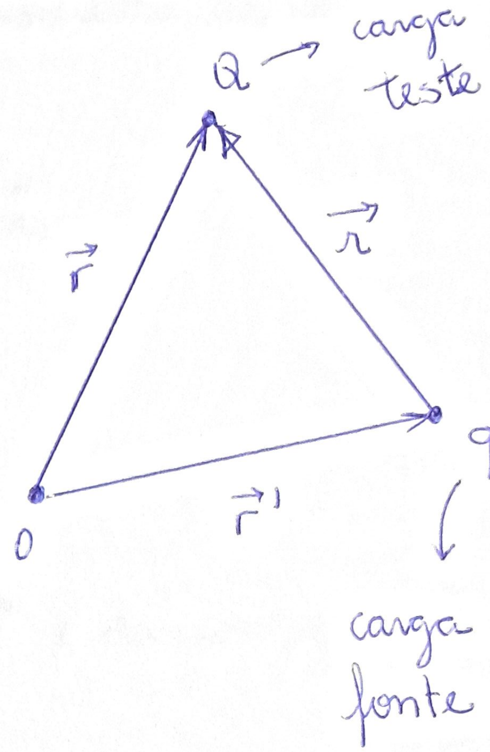
Lei de Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\mathscr{r}^2} \hat{\mathscr{r}}$$



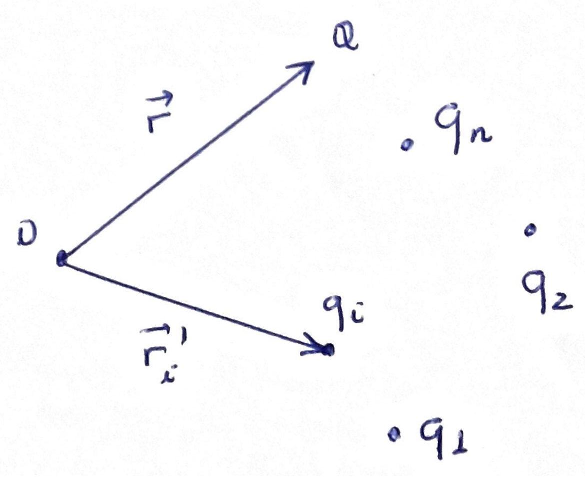
$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N\,m^2} \ (SI)$$

permissividade elétrica do vácuo

O Princípio de Superposição afirma que a interação entre duas cargas elétricas é independente da presença de outras cargas. Portanto, para um conjunto de cargas fontes nas posições $\vec{r}_1'$, $\vec{r}_2'$, ..., $\vec{r}_n'$, temos

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{\mathscr{r}_1^2}\hat{\mathscr{r}}_1 + \frac{q_2}{\mathscr{r}_2^2}\hat{\mathscr{r}}_2 + \dots + \frac{q_n}{\mathscr{r}_n^2}\hat{\mathscr{r}}_n\right) \equiv Q\vec{E}$$

$$\vec{\mathscr{r}}_i = \vec{r} - \vec{r}_i'$$



Ou seja, é possível definir a seguinte quantidade vetorial como o campo elétrico associado às cargas fontes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Propriedades de $\vec{E}$:

→ campo vetorial dependente de $\vec{r}$ e da configuração de cargas fontes

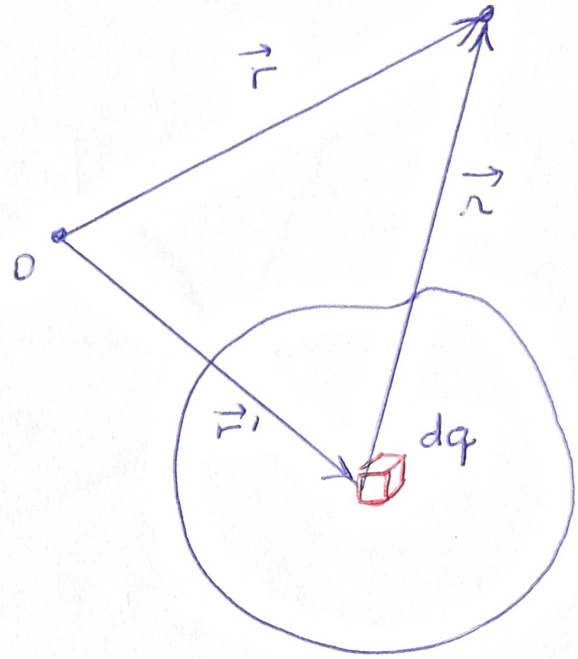
→ nenhuma dependência em Q (existe independente da carga teste)

→ fornece a força por unidade de carga teste posicionada em $\vec{r}$

→ não está associado necessariamente a um meio material

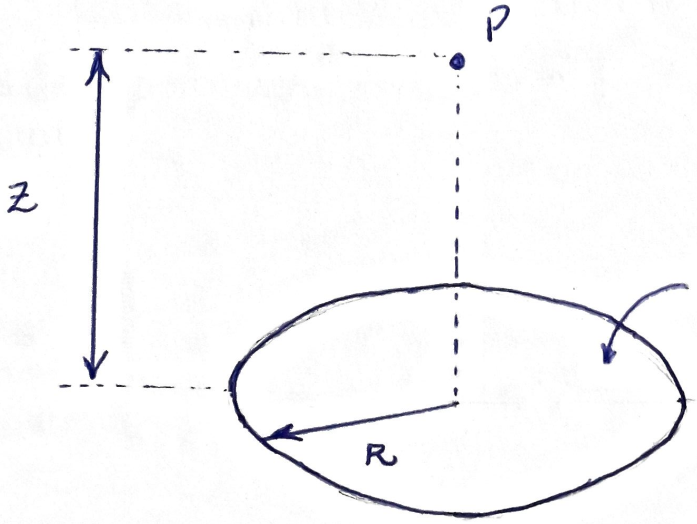
Para uma distribuição contínua de cargas

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\, dq$$

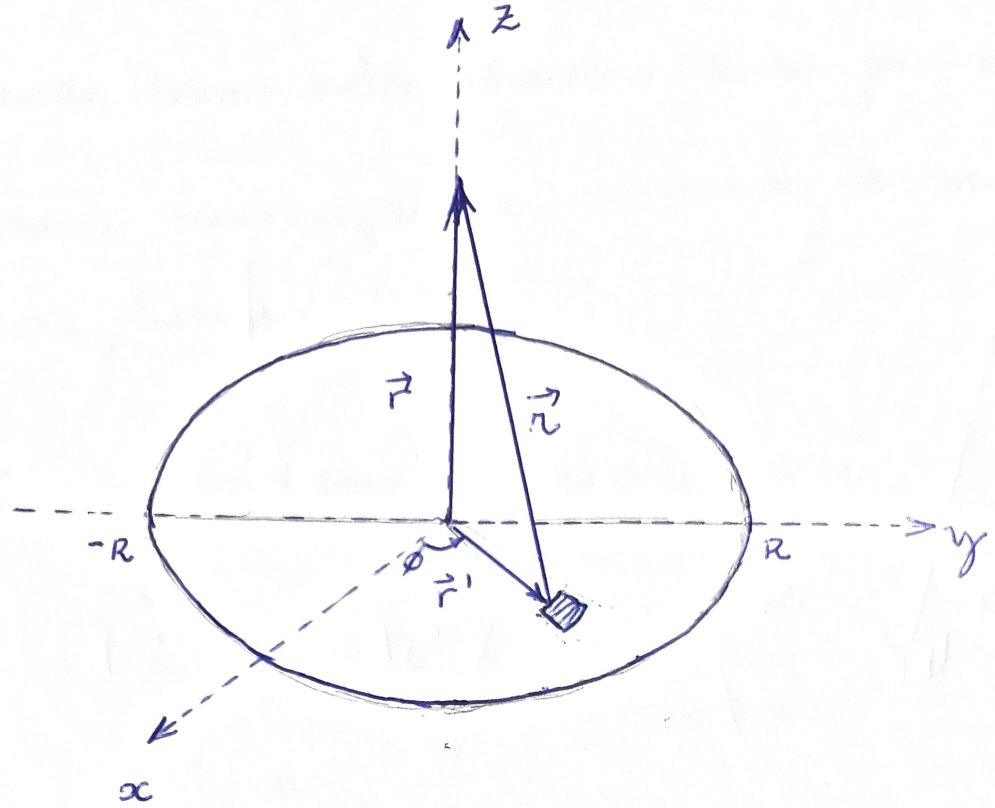


$\lambda\, dl'$	$\sigma\, da'$	$\rho\, d\tau'$
linha de cargas	superfície carregada	volume carregado

Exercício: determine o campo elétrico a uma distância z acima do centro de um disco de raio R e densidade superficial de carga σ. Despreze a espessura do disco.



densidade de carga superficial σ



$$\begin{cases} \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}' = s\hat{s} \\ \vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - s\hat{s} \end{cases}$$

coordenadas cilíndricas

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\sigma\, da = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3}\, da$$

$$da = s\,ds\,d\phi \qquad \mathscr{r}^3 = |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (z^2 + s^2)^{3/2}$$

Então

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left\{ \int_0^R ds \int_0^{2\pi} d\phi \frac{s}{(z^2+s^2)^{3/2}}\, z\hat{z} - \int_0^R ds \int_0^{2\pi} d\phi \frac{s^2}{(z^2+s^2)^{3/2}}\, \hat{s} \right\}$$

O segundo termo entre chaves é nulo por simetria. De maneira mais explícita, escrevento $\hat{s}$ na base cartesiana, temos

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, \hat{s} = \int_0^{2\pi} d\phi \left(\cos\phi\, \hat{x} + \sin\phi\, \hat{y} \right) = \vec{0}$$

Logo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z\hat{z} \int_0^R ds \frac{s}{(z^2+s^2)^{3/2}} \overset{u=z^2+s^2}{=} \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \hat{z} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{du}{u^{3/2}}$$

$$= -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \hat{z}\, u^{-1/2} \Big|_{z^2}^{z^2+R^2} = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \hat{z} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{1}{z} \right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \hat{z} \xrightarrow{R \gg z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{z \gg R} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \right) \hat{z}$$

$$\simeq \hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots \right) = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z^2} \hat{z}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2} \hat{z} \quad \text{com } Q = \sigma \pi R^2$$

De acordo com o teorema da divergência

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

Para uma carga pontual q em $\vec{r}\,'$, o divergente de $\vec{E}$ no ponto $\vec{r}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \right)}_{= 4\pi\, \delta^3(\vec{\imath})}$$

Logo, para carga pontual, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{\imath}) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

Já para uma distribuição contínua de carga

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \rho(\vec{r}\,') \, d\tau' \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \right)}_{= 4\pi\, \delta^3(\vec{\imath}) = 4\pi\, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')} \rho(\vec{r}\,') \, d\tau' = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}}$$

Atenção: o índice 3 sobrescrito não é um "cubo", mas simplesmente uma indicação de que trata-se na função delta em 3 dimensões

Dessa forma

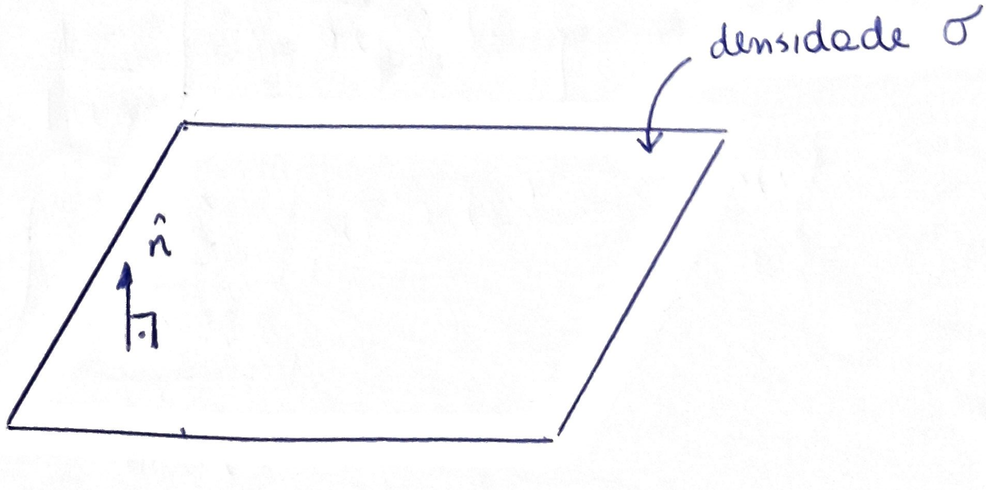
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\, d\tau' = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

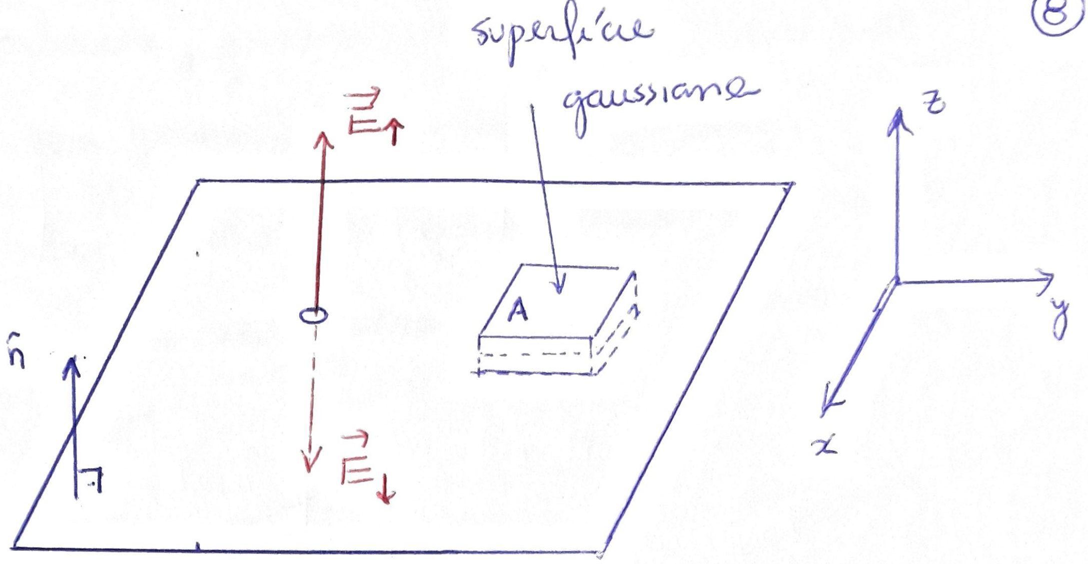
$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}}$$

lei de Gauss na forma integral

A lei de Gauss em sua forma integral permite a determinação do campo elétrico numa série de problemas em que a distribuição de cargas apresenta simetria suficiente.

Exemplo: campo elétrico de um plano infinito com densidade de carga uniforme σ





$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int (E\hat{z}) \cdot (da\hat{z}) + \int (-E\hat{z}) \cdot (-da\hat{z})$$

$$= 2AE$$

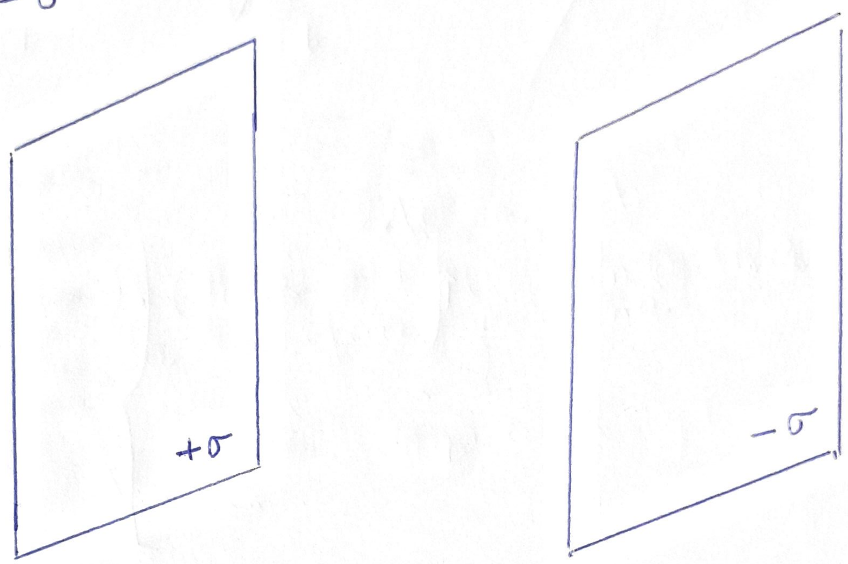
Carga total dentro da superfície gaussiana

$$Q_{tot} = \sigma A \Rightarrow 2AE = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

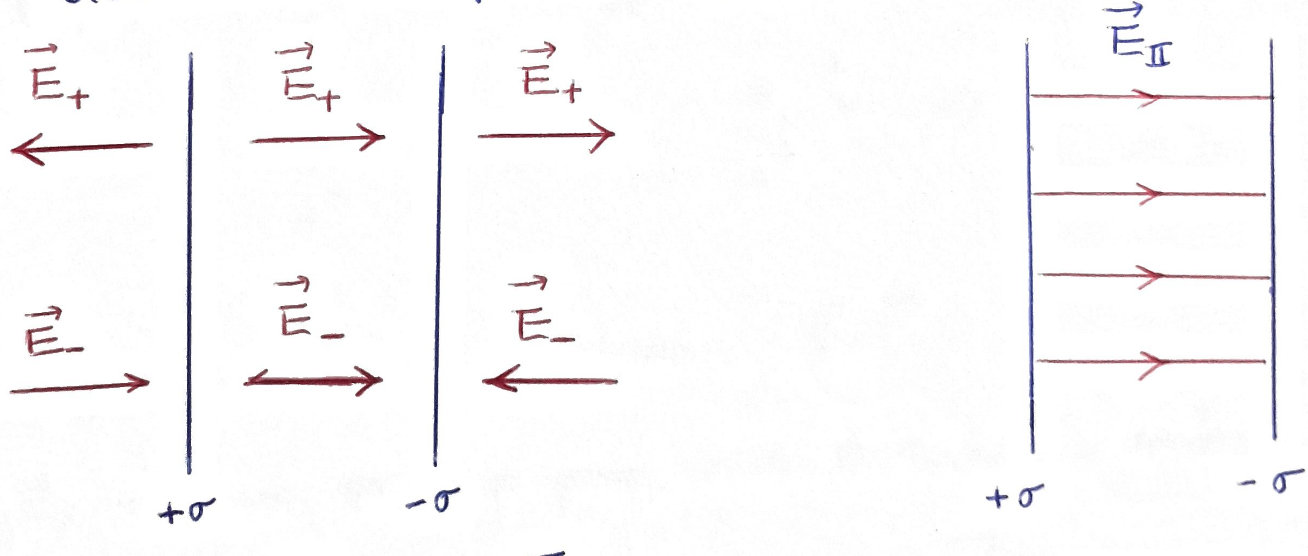
Então

$$\vec{E} = E\hat{z} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} = \vec{E}_\uparrow, & \text{acima do plano} \\ -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} = \vec{E}_\downarrow, & \text{abaixo do plano} \end{cases}$$

O resultado anterior, juntamente com o Princípio de Superposição, nos permite determinar o campo elétrico resultante gerado por duas placas paralelas infinitas uniformemente carregadas com densidades superficiais $+\sigma$ e $-\sigma$



Usando o Princípio da Superposição



$$\vec{E}_I = \vec{E}_{III} = \vec{0} \qquad \vec{E}_{II} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}$$

Rotacional de um campo eletrostático

Para uma carga pontual

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\times\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\underbrace{\vec{\nabla}\times\hat{r}}_{=\vec{0}} - \hat{r}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

lista 1a

(prove!)

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{2}{r^3}\vec{\nabla}r = -\frac{2}{r^3}\vec{\nabla}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{r^3}\frac{1}{r}2\vec{r} = -\frac{2}{r^3}\hat{r} \Rightarrow \hat{r}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \vec{0}$$

Logo, para carga pontual: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$

De maneira análoga para uma distribuição contínua

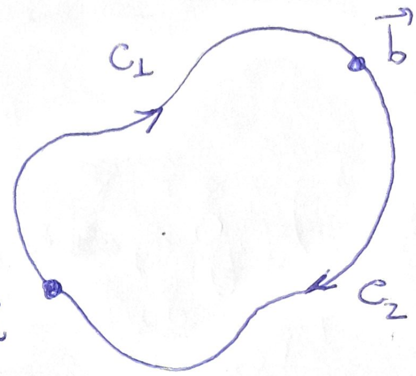
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left\{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\hat{r}}{r^2}\rho(\vec{r}')\,d\tau'\right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\underbrace{\vec{\nabla}\times\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)}_{=\vec{0}}\rho(\vec{r}')\,d\tau'$$

$$= \vec{0}$$

Portanto, campos eletrostáticos são irrotacionais

Dessa forma, de acordo com o teorema de Stokes

$$\oint_P \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{a} = 0 \quad \forall\ P \text{ fechado}$$



$$\underset{C_1}{\int_{\vec{a}}^{\vec{b}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \underset{C_2}{\int_{\vec{b}}^{\vec{a}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\underset{C_1}{\int_{\vec{a}}^{\vec{b}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\underset{C_2}{\int_{\vec{b}}^{\vec{a}}} \vec{E}\cdot d\vec{l} \overset{d\vec{l}\to -d\vec{l}}{=} \underset{C_2}{\int_{\vec{a}}^{\vec{b}}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\Downarrow$$

$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ independe do caminho entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Sendo assim, é possível definir um potencial escalar escolhendo um ponto de referencial fixo $\mathcal{O}$:

$$\boxed{V(\vec{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

Sabemos que apenas a diferença de potencial entre dois pontos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem significado físico

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{b}} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{\mathcal{O}}^{\vec{a}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

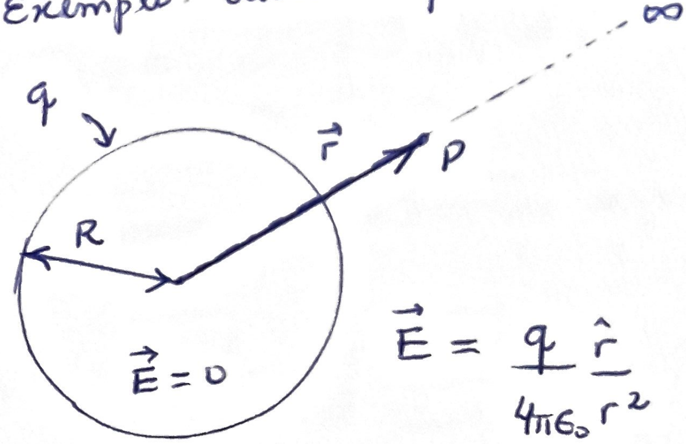
$$= -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{b}} \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{\vec{a}}^{\mathcal{O}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Portanto, o campo elétrico pode ser obtido a partir do potencial eletrostático V por

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

Na maioria dos casos tomamos o ponto de referência $\mathcal{O}$ infinitamente distante da distribuição de cargas e convencionamos que o potencial no infinito é zero

Exemplo: casca esférica com carga q uniformemente distribuída



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

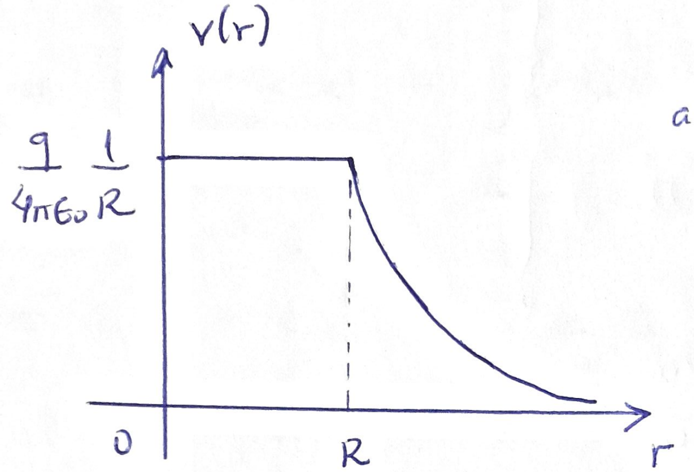
$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r'^2}\right)\cdot(dr'\hat{r})$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr'}{r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r'}\Big|_{\infty}^{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \quad \text{(fora da esfera)}$$

Para $r < R$

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{R}^{r} \cancelto{0}{\vec{E}}\cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}$$



assumindo $q > 0$

—— // ——

O teorema de Helmholtz, visto na aula passada, fornece uma expressão para o potencial V a partir da densidade de carga

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

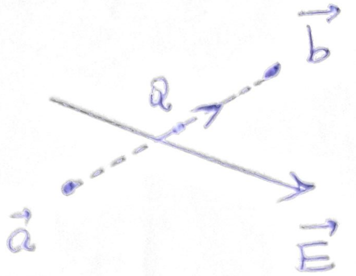
com

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}{\mathscr{r}}\, d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\, d\tau'$$

e para distribuições superficiais e lineares de carga

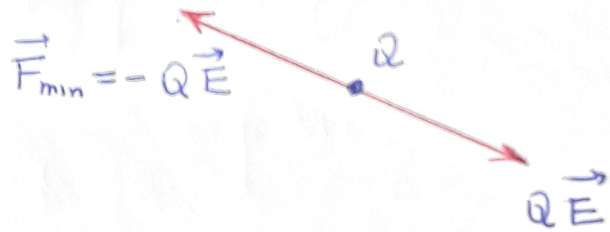
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\, da' \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\, dl'$$

Na presença de um campo elétrico $\vec{E}$, a mínima energia necessária para levar uma carga teste Q de um ponto $\vec{a}$ a um ponto $\vec{b}$ é



$$W_{min} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}_{min} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (-Q\vec{E}) \cdot d\vec{\ell}$$

$$= Q \left[- \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \right] = Q \left[V(\vec{b}) - V(\vec{a}) \right]$$



Logo

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = \frac{W_{min}}{Q}$$

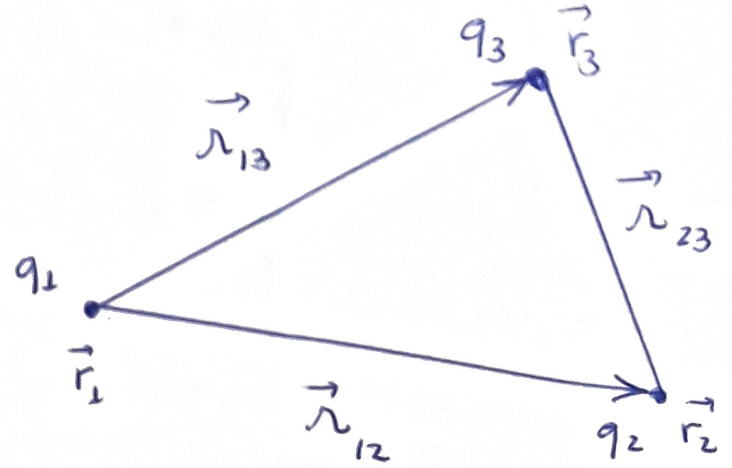
Nas condições anteriores, Q é levada a velocidade constante de $\vec{a}$ até $\vec{b}$. Dessa forma, a diferença de potencial entre dois pontos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pode ser vista como o trabalho mínimo realizado por unidade de carga para levar carga de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ na presença do campo eletrostático $\vec{E}$.

Em particular, se a distribuição de cargas é localizada e, portanto, $\vec{E}$ vai a zero no infinito, bem como V, então o trabalho mínimo para trazer Q do infinito até $\vec{r}$ é

$$W_{min} = Q\left[V(\vec{r}) - \cancel{V(\infty)}^{\,0}\right] = Q\,V(\vec{r})$$

O potencial $V(\vec{r})$ é a energia mínima por unidade de carga gasta p/ posicionar uma carga qquer em $\vec{r}$ trazendo-a do infinito

Podemos então calcular a energia armazenada num conjunto de cargas pontuais como o trabalho realizado por um agente externo para "montar" o conjunto trazendo uma carga por vez do infinito até sua posição final em velocidade constante (W_{min})



$W_1 = 0$ (trabalho nulo, pois não há campo elétrico e potencial)

$$W_2 = q_2 V_1(\vec{r}_2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}}$$

$$W_3 = q_3 V_{1,2}(\vec{r}_3) = q_3 \left\{ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{23}} \right\}$$

$$W_4 = q_4 V_{1,2,3}(\vec{r}_4) = \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right\}$$

Somando todos os trabalhos até agora

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right\}$$

Generalizando para n cargas

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \underbrace{\left(\sum_{j\neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)}$$

potencial no ponto $\vec{r}_i$ (posição da carga q_i)

criado por todas as demais

cargas $(= V(\vec{r}_i))$

Ou seja

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i)}$$

A expressão anterior pode ser estendida para uma distribuição contínua de carga

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int V\, dq = \frac{1}{2}\int_V \rho V\, d\tau} \quad (\mathrm{I})$$

Como $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$, podemos escrever

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})V\, d\tau$$

Usando o fato de que

$$\vec{\nabla}\cdot(V\vec{E}) = \vec{E}\cdot\vec{\nabla}V + V\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

temos

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left\{-\int_V \vec{E}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}V}_{=-\vec{E}}\, d\tau + \int_V \vec{\nabla}\cdot(V\vec{E})\, d\tau\right\}$$

$$\boxed{W = \frac{\epsilon_0}{2}\left\{\int_V E^2\, d\tau + \oint_S V\vec{E}\cdot d\vec{a}\right\}} \quad (\mathrm{II})$$

A integral original $\frac{1}{2}\int \rho V d\tau$ pode naturalmente (19)

ser feita num volume maior que V sem alterar o resultado, já que $\rho = 0$ fora desse volume. O campo elétrico, no entanto, pode se estender além de V.

Estendendo então a integral para o espaço todo e que

$$\oint_S \underbrace{V}_{\sim \frac{1}{r}} \underbrace{\vec{E}}_{\sim \frac{1}{r^2}} \cdot \underbrace{d\vec{a}}_{\propto r^2} \xrightarrow{r \to \infty} \sim \frac{1}{r} \to 0$$

podemos escrever também

$$\boxed{W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{todo espaço}} E^2 d\tau} \qquad (\mathrm{III})$$

Há então duas interpretações possíveis para os resultados anteriores

1. uma distribuição de cargas contínua possui densidade de energia $\frac{1}{2}\rho V$ (armazenada nas cargas)

2. uma distribuição contínua de cargas possui densidade de energia $\frac{\epsilon_0}{2}E^2$ (armazenada no campo)