



EESC • USP

SEL0302 – Circuitos Elétricos II

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

SEL0302 – Circuitos Elétricos II
Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

CAPÍTULO 2

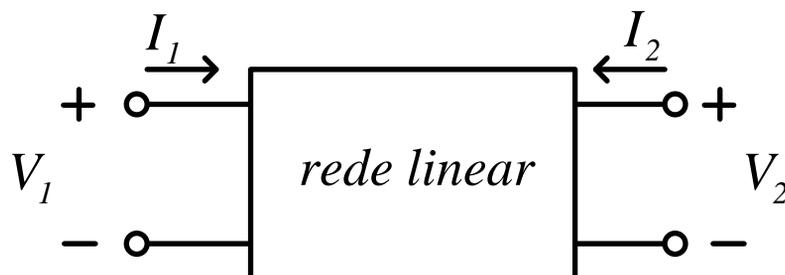
QUADRIPOLOS

2.1 – Introdução

- Os quadripolos são dispositivos de duas ou mais portas elétricas.
- São empregados na modelagem de transformadores, transistores, dentre outros sistemas.
- Nesse capítulo será apresentado como obter os parâmetros equivalentes de quadripolos e como fazer o estudo de circuitos elétricos contendo tais abstrações.

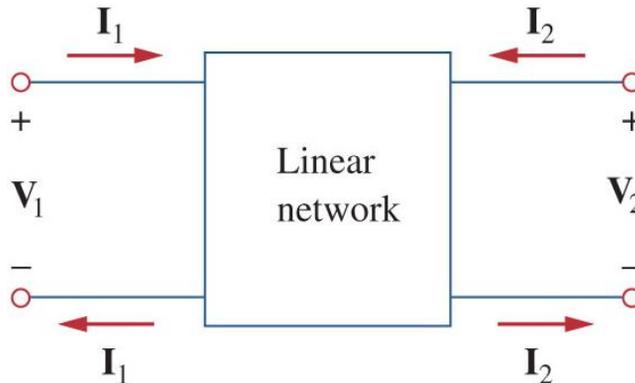
2.2 – Parâmetros de Quadripolos

- De forma geral, um quadripolo é representado da seguinte forma:



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

- Para se poder modelar uma rede na forma de quadripolos é necessário que todas as porta sejam externas à rede e que:



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

- Onde V_1 e I_1 são as grandezas elétricas, tensão e corrente, correspondentes à porta elétrica “1” e V_2 e I_2 são as grandezas elétricas, tensão e corrente, correspondentes à porta elétrica “2”.
- O relacionamento entre essas grandezas pode ser feito de quatro formas diferentes, ou seja:
 - Parâmetros de admitância
 - Parâmetros de impedância
 - Parâmetros híbridos
 - Parâmetros de transmissão

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

A – Parâmetros de Admitância

- A modelagem do quadripolo por meio de parâmetros de admitância considera as tensões V_1 e V_2 como sendo variáveis independentes.
- Assim, as correntes do quadripolo são relacionadas às tensões da seguinte forma:
 - $$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$
- Onde Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} e Y_{22} são os parâmetros de admitância do quadripolo.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

A – Parâmetros de Admitância

- Para se determinar os parâmetros Y_{11} e Y_{21} faz-se $V_2 = 0$, e assim:
 - $Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$
 - $Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$
- Para se determinar os parâmetros Y_{12} e Y_{22} faz-se $V_1 = 0$, e assim:
 - $Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$
 - $Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

A – Parâmetros de Admitância

- Para se ter V_1 ou V_2 nula faz-se a inserção de um ramo curto-circuitado na porta correspondente e alimenta-se o circuito pela porta remanescente de forma a se quantificar as grandezas necessárias.
- Em função desse aspecto, os parâmetros de admitância também são conhecidos como parâmetros de curto-circuito.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

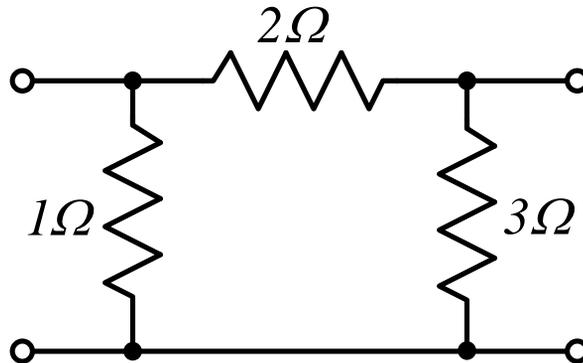
A – Parâmetros de Admitância

- Y_{11} é a admitância de curto-circuito da porta elétrica “1”;
- Y_{22} é a admitância de curto-circuito da porta elétrica “2”;
- Y_{12} e Y_{21} são as admitâncias de curto-circuito de transferência.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

A – Parâmetros de Admitância

- Vamos calcular os parâmetros de admitância do seguinte quadripolo:



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

A – Parâmetros de Admitância

- **Circuito equivalente**
- Tendo como base o seguinte relacionamento entre as grandezas elétricas do quadripolo:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$

- Ou na forma matricial

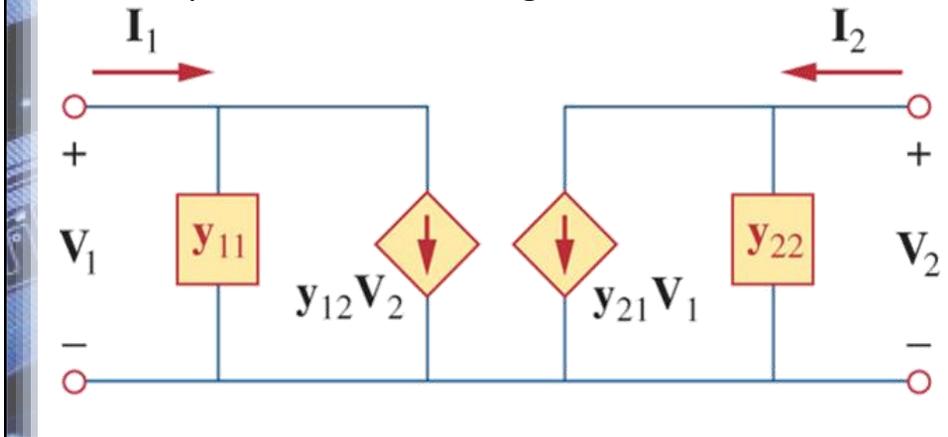
$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

- Como poderia ser o circuito equivalente?

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

A – Parâmetros de Admitância

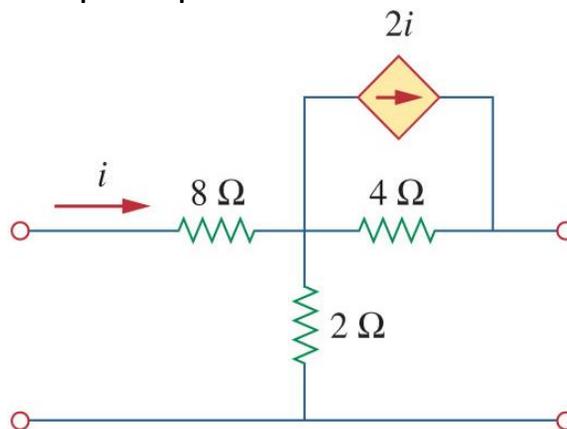
- **Circuito equivalente**
- Uma possibilidade é a seguinte:



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

A – Parâmetros de Admitância

- Vamos calcular os parâmetros de admitância do seguinte quadripolo:



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

B – Parâmetros de Impedância

- A modelagem do quadripolo por meio de parâmetros de impedância considera as correntes I_1 e I_2 como sendo variáveis independentes.
- Assim, as tensões do quadripolo são relacionadas às correntes da seguinte forma:
 - $$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$
- Onde Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} e Z_{22} são os parâmetros de impedância do quadripolo.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

B – Parâmetros de Impedância

- Para se determinar os parâmetros Z_{11} e Z_{21} faz-se $I_2 = 0$, e assim:
 - $Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$
 - $Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$
- Para se determinar os parâmetros Z_{12} e Z_{22} faz-se $I_1 = 0$, e assim:
 - $Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$
 - $Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

B – Parâmetros de Impedância

- Para se ter I_1 ou I_2 nula faz-se a inserção de um ramo aberto na porta correspondente e alimenta-se o circuito pela porta remanescente de forma a se quantificar as grandezas necessárias.
- Em função desse aspecto, os parâmetros de impedância também são conhecidos como parâmetros de circuito aberto ou parâmetros à vazio.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

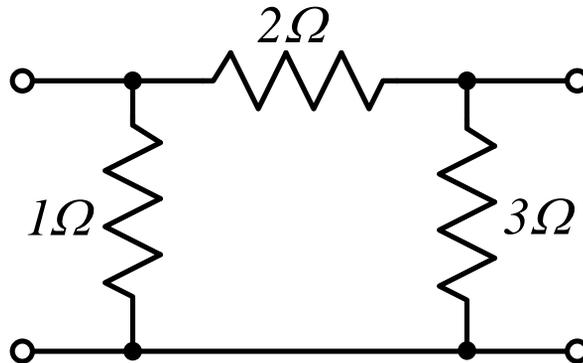
B – Parâmetros de Impedância

- Z_{11} é a impedância de circuito aberto da porta elétrica “1”;
- Z_{22} é a impedância de circuito aberto da porta elétrica “2”;
- Z_{12} e Z_{21} são as impedâncias de circuito aberto de transferência.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

B – Parâmetros de Impedância

- Vamos calcular os parâmetros de impedância do seguinte quadripolo:



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

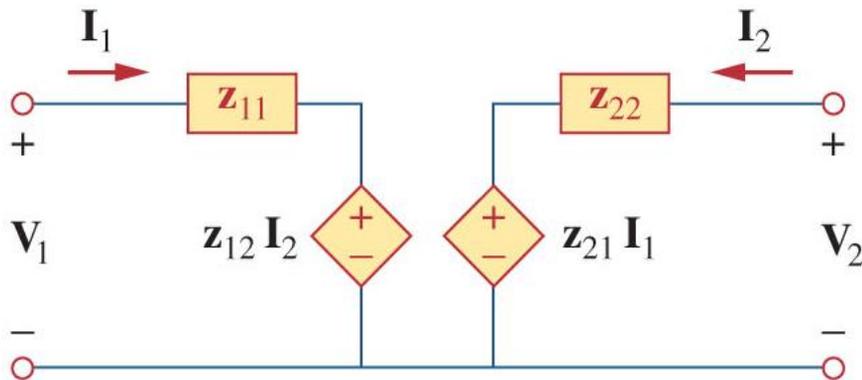
B – Parâmetros de Impedância

- **Circuito equivalente**
- Tendo como base o seguinte relacionamento entre as grandezas elétricas do quadripolo:
 - $$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$
- Ou na forma matricial
 - $$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$
- Como poderia ser o circuito equivalente?

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

B – Parâmetros de Impedância

- **Circuito equivalente**
- Uma possibilidade é a seguinte:



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

B – Parâmetros de Impedância

- **Relacionamento entre parâmetros “Y” e “Z”**
- Os parâmetros de admitância e de impedância se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

C – Parâmetros híbridos “H”

- A modelagem do quadripolo por meio de parâmetros híbridos considera as grandezas V_1 e I_2 como grandezas independentes.
- Assim, as grandezas I_1 e V_2 se relacionam com V_1 e I_2 da seguinte forma:
 - $$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$
- Onde h_{11} , h_{12} , h_{21} e h_{22} são os parâmetros híbridos do quadripolo.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

C – Parâmetros híbridos “H”

- Para se determinar os parâmetros h_{11} e h_{21} faz-se $V_2 = 0$, e assim:
 - $h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$
 - $h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$
- Para se determinar os parâmetros h_{12} e h_{22} faz-se $I_1 = 0$, e assim:
 - $h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$
 - $h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

C – Parâmetros híbridos “H”

- Para se ter V_2 nula faz-se a inserção de um ramo curto-circuitado na porta correspondente “2”.
- Para se ter I_1 nula faz-se a inserção de um ramo aberto na porta correspondente “1”.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

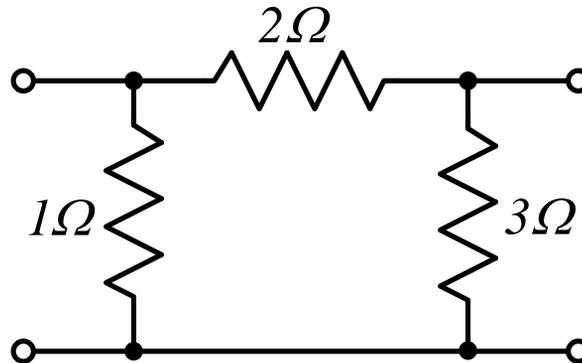
C – Parâmetros híbridos “H”

- $h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$ Impedância de curto-circuito da porta elétrica “1”;
- $h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$ Ganho de corrente de curto-circuito;
- $h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$ Ganho inverso de tensão ou razão das tensões;
- $h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$ Admitância de circuito aberto da porta elétrica 2;

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

C – Parâmetros híbridos “H”

- Vamos calcular os parâmetros híbridos do seguinte quadripolo:



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

C – Parâmetros híbridos “H”

- **Circuito equivalente**
- Tendo como base o seguinte relacionamento entre as grandezas elétricas do quadripolo:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

- Ou na forma matricial

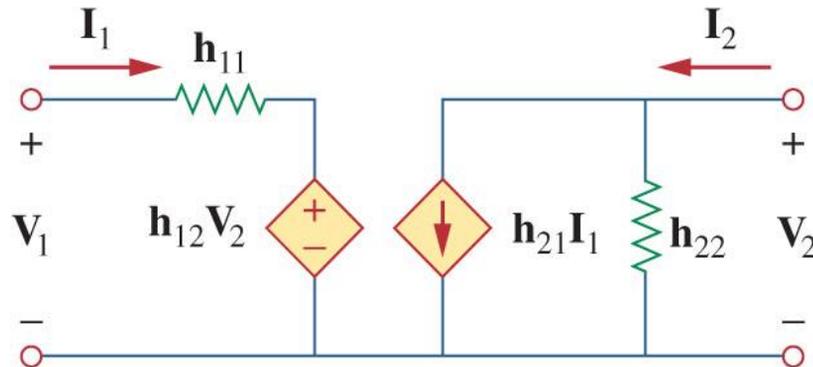
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

- Como poderia ser o circuito equivalente?

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

C – Parâmetros híbridos “H”

- **Circuito equivalente**
- Uma possibilidade é a seguinte:



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

C – Parâmetros híbridos “G”

- A modelagem do quadripolo por meio de parâmetros híbridos “g” considera as grandezas I_1 e V_2 como grandezas independentes.
- Assim, as grandezas V_1 e I_2 são relacionadas às correntes da seguinte forma:

$$\begin{cases} I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{cases}$$

- Onde g_{11} , g_{12} , g_{21} e g_{22} são os parâmetros híbridos do quadripolo.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

C – Parâmetros híbridos “G”

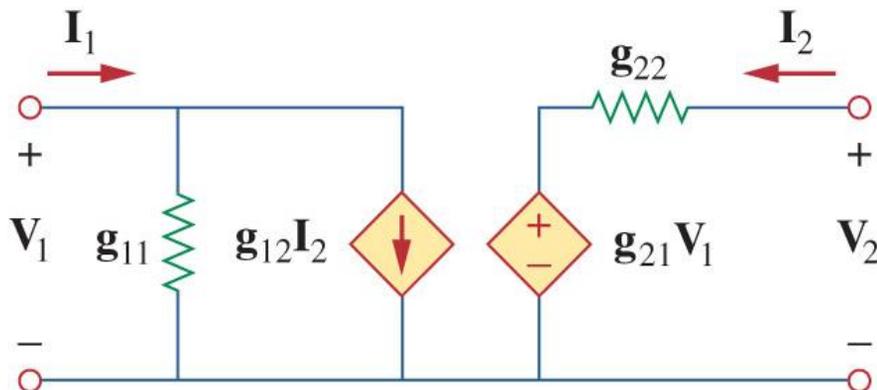
- **Relacionamento entre parâmetros “H” e “G”**
- Os parâmetros híbridos se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

C – Parâmetros híbridos “H”

- **Circuito equivalente**



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

D – Parâmetros de Transmissão

- A modelagem do quadripolo por meio de parâmetros de transmissão considera as grandezas V_2 e I_2 como grandezas independentes.
- Assim, as grandezas V_1 e I_1 são relacionadas às grandezas da porta elétrica 2 da seguinte forma:
 - $$\begin{cases} V_1 = AV_2 + BI_2 \\ I_1 = CV_2 + DI_2 \end{cases}$$
- Onde A , B , C e D são os parâmetros de transmissão do quadripolo.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

D – Parâmetros de Transmissão

- Para se determinar os parâmetros A e C faz-se $I_2 = 0$, e assim:
 - $A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$
 - $C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$
- Para se determinar os parâmetros B e D faz-se $V_2 = 0$, e assim:
 - $B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$
 - $D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

D – Parâmetros de Transmissão

- Para se ter I_2 nula faz-se a inserção de um ramo aberto na porta correspondente “2”.
- Para se ter V_2 nula faz-se a inserção de um ramo curto-circuitado na porta correspondente “2”.

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

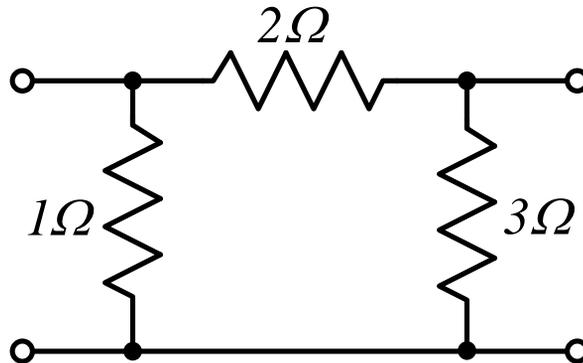
D – Parâmetros de Transmissão

- $A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$ Ganho inverso de tensão ou razão das tensões;
- $B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$ Impedância de transferência de curto-crcuito;
- $C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$ Admitância de transferência de curto-crcuito;
- $D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$ Ganho inverso de corrente ou razão das correntes;

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

D – Parâmetros de Transmissão

- Vamos calcular os parâmetros de transmissão do seguinte quadripolo:



2.2 – Parâmetros de Quadripolos

D – Parâmetros de Transmissão

- **Circuito equivalente**
- Tendo como base o seguinte relacionamento entre as grandezas elétricas do quadripolo:
 - $$\begin{cases} V_1 = AV_2 + BI_2 \\ I_1 = CV_2 + DI_2 \end{cases}$$
- Ou na forma matricial
 - $$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$
- Como poderia ser o circuito equivalente?

2.2 – Parâmetros de Quadripolos

D – Parâmetros de Transmissão

- **Circuito equivalente**
- Uma possibilidade é realizar a seguinte manipulação:
 - $I_1 = CV_2 + DI_2$
 - $I_2 = \frac{1}{D}I_1 - \frac{C}{D}V_2$
- E ainda
 - $V_1 = AV_2 + BI_2$
 - $V_1 = AV_2 + B\left(\frac{1}{D}I_1 - \frac{C}{D}V_2\right)$
 - $V_1 = AV_2 + \left(\frac{B}{D}I_1 - \frac{BC}{D}V_2\right)$
 - $V_1 = \frac{B}{D}I_1 + \frac{AD-BC}{D}V_2$
- O que resulta em um circuito equivalente igual ao empregado nos parâmetros híbridos.

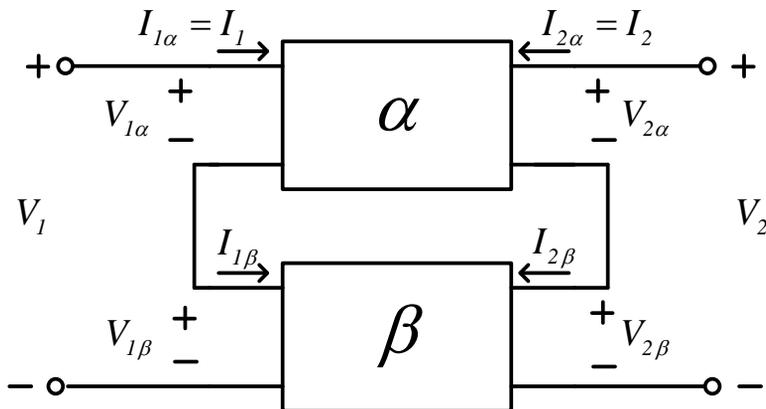
2.3 – Associação de quadripolos

- Os quadripolos, além de associarem em série ou em paralelo, podem também se associar em cascata.

2.3 – Associação de quadripolos

A) Associação em série de quadripolos

- Dois quadripolos encontram-se em série quando as correntes nas portas elétricas são idênticas:



2.3 – Associação de quadripolos

A) Associação em série de quadripolos

- Representando os quadripolos por parâmetros de impedância tem-se:

$$\begin{pmatrix} V_{1\alpha} \\ V_{2\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11\alpha} & Z_{12\alpha} \\ Z_{21\alpha} & Z_{22\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{1\alpha} \\ I_{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_{1\beta} \\ V_{2\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11\beta} & Z_{12\beta} \\ Z_{21\beta} & Z_{22\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{1\beta} \\ I_{2\beta} \end{pmatrix}$$

2.3 – Associação de quadripolos

A) Associação em série de quadripolos

- Dado que:

$$V_1 = V_{1\alpha} + V_{1\beta}$$

$$V_2 = V_{2\alpha} + V_{2\beta}$$

$$I_1 = I_{1\alpha} = I_{1\beta}$$

$$I_2 = I_{2\alpha} = I_{2\beta}$$

2.3 – Associação de quadripolos

A) Associação em série de quadripolos

- Tem-se que:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11\alpha} & Z_{12\alpha} \\ Z_{21\alpha} & Z_{22\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_{11\beta} & Z_{12\beta} \\ Z_{21\beta} & Z_{22\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11\alpha} + Z_{11\beta} & Z_{12\alpha} + Z_{12\beta} \\ Z_{21\alpha} + Z_{21\beta} & Z_{22\alpha} + Z_{22\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

2.3 – Associação de quadripolos

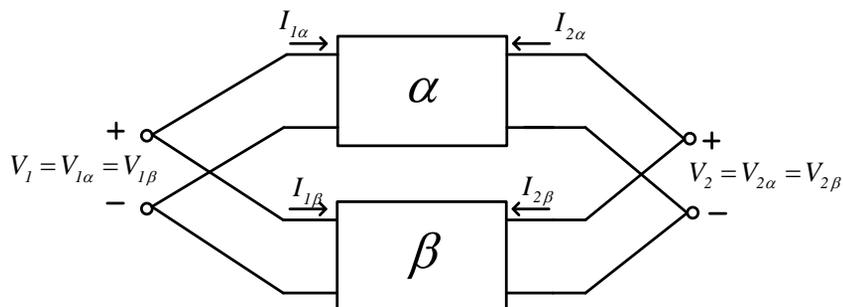
A) Associação em série de quadripolos

- Portanto, a associação série de dois quadripolos resulta em um quadripolo equivalente cuja matriz de parâmetros de impedância é igual à soma das matrizes de parâmetros de impedância dos quadripolos associados em série

2.3 – Associação de quadripolos

B) Associação paralela de quadripolos

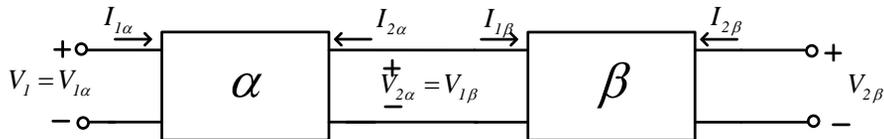
- Dois quadripolos encontram-se em paralelo quando as tensões nas portas elétricas são idênticas:



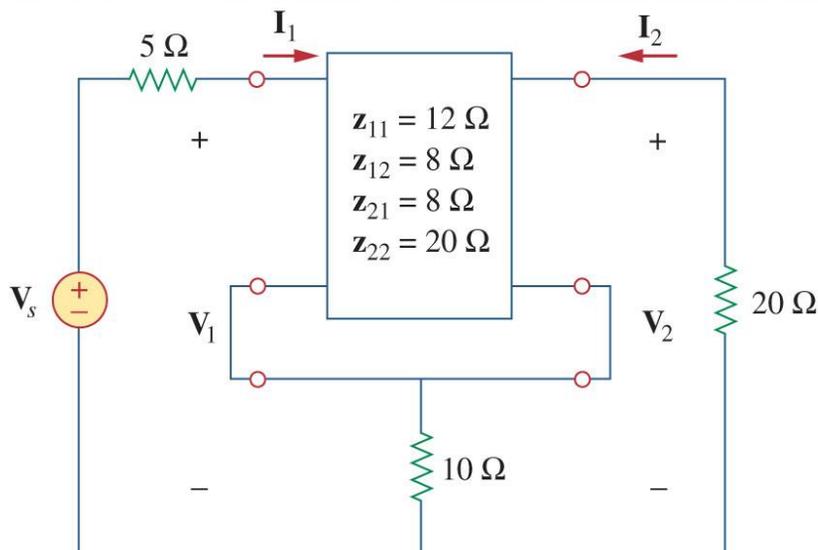
2.3 – Associação de quadripolos

C) Associação em cascata quadripolos

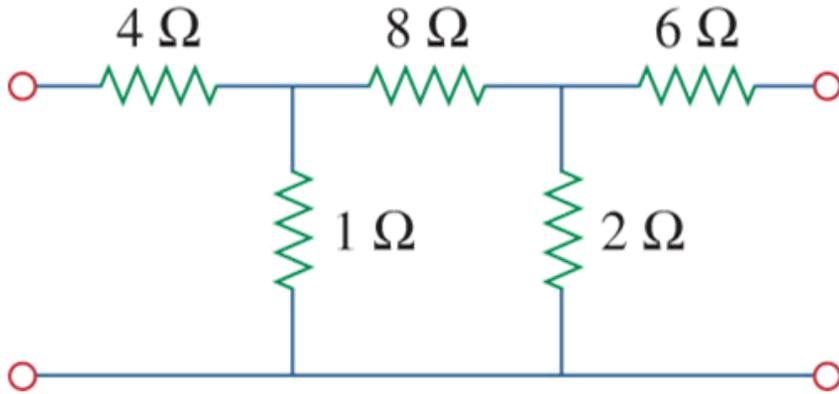
- Dois quadripolos encontram-se em cascata quando a porta elétrica “2” de um dos quadripólos se conecta na porta elétrica “1” do segundo quadripólo.



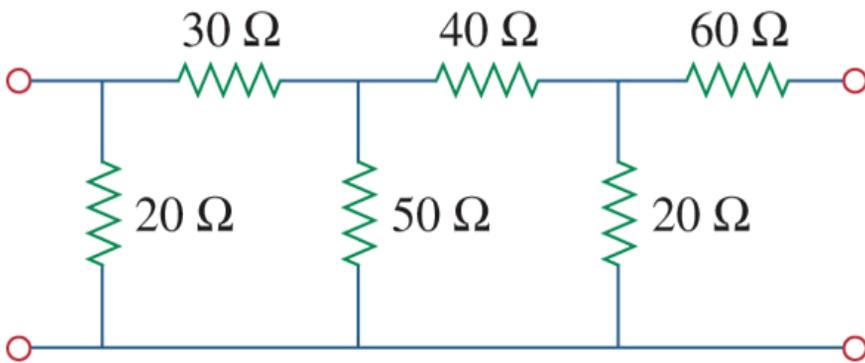
2.4 – Exemplos



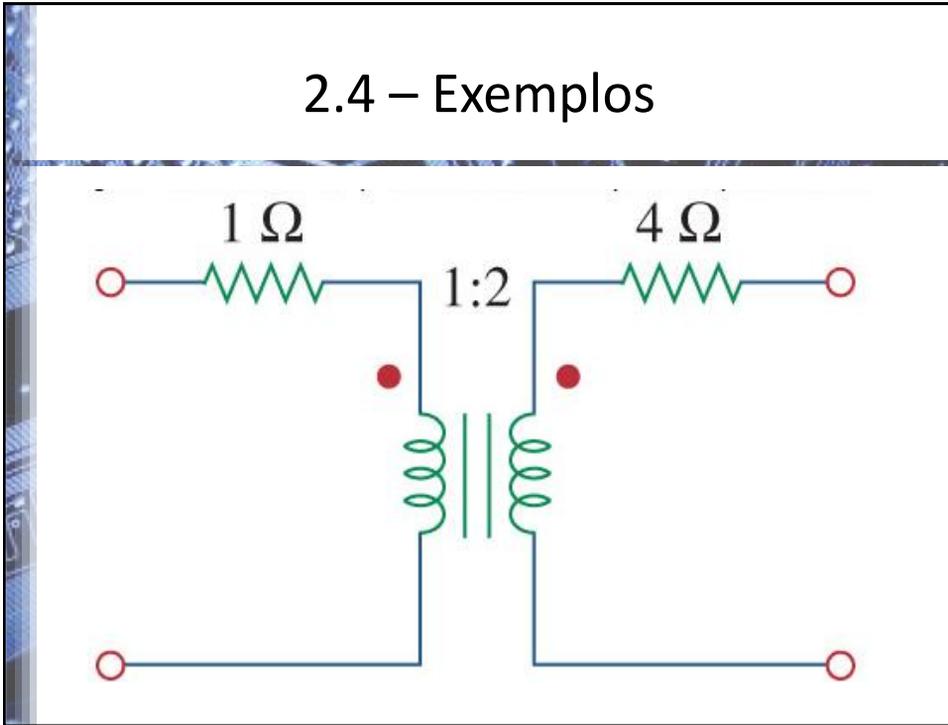
2.4 – Exemplos



2.4 – Exemplos



2.4 – Exemplos



2.4 – Exemplos

