SEL0302 – Circuitos Elétricos II

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

SEL0301 – Circuitos Elétricos I
Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

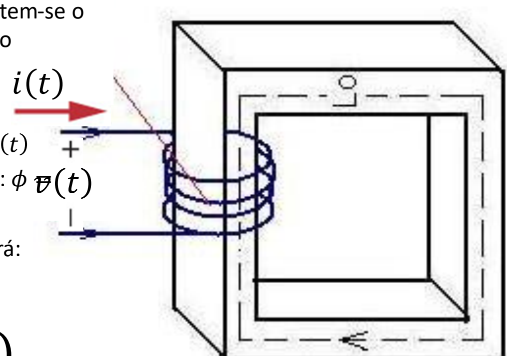
CAPÍTULO 1
CIRCUITOS MAGNETICAMENTE ACOPLADO

1.1 – Introdução

- Circuitos magneticamente acoplados são aqueles que, além de estarem conectados eletricamente possuem laços de campo magnético que resultam, por exemplo, em tensões induzidas nos elementos que se encontram magneticamente acoplados.
- Nesse capítulo vamos apresentar o conceito de impedância mútua e como obter o **equivalente elétrico** de um circuito magneticamente acoplado.

1.2 – Acoplamento Magnético

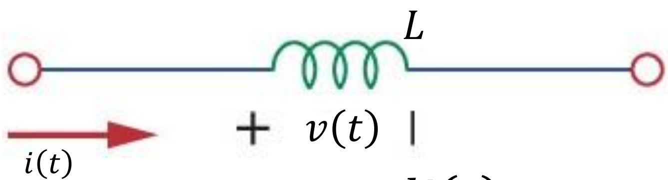
- Acoplamento magnético
  - Ao se fazer circular uma corrente $i(t)$ pelo enrolamento do indutor tem-se o estabelecimento de um campo magnético pelo núcleo.
  - $\oint Hdl = Ni(t) \rightarrow H = \frac{N}{l}i(t)$
  - Portanto, $B = \mu H \rightarrow B = \frac{\mu N}{l}i(t)$
  - Assim, o fluxo magnético será: $\phi = \int Bds \rightarrow \phi(t) = \frac{\mu N A}{l}i(t)$
  - Dessa forma a tensão $v(t)$ será:
  - $v(t) = \frac{dN\phi}{dt} = \frac{\mu N^2 A}{l}\frac{di(t)}{dt}$



$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

1.2 – Acoplamento Magnético

- Esquematicamente os indutores são representados da seguinte forma:

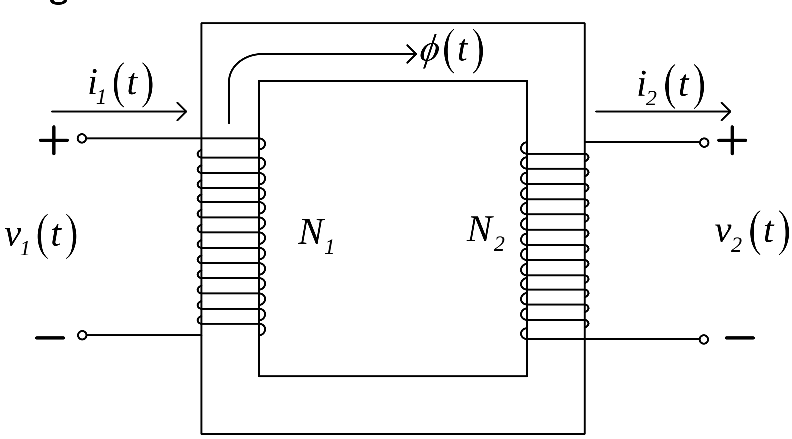


$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

- Os indutores representam a capacidade do sistema de armazenar energia no campo magnético.

1.2 – Acoplamento Magnético

- Vamos agora considerar o seguinte circuito magnético



1.2 – Acoplamento Magnético

- Ao se fazer circular uma corrente $i_1(t)$ pelo enrolamento "1" e uma corrente $i_2(t)$ pelo enrolamento "2" tem-se o estabelecimento de um campo magnético pelo núcleo dado por:
- $\oint Hdl = N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t)$
- $H = \frac{N_1}{l} i_1(t) + \frac{N_2}{l} i_2(t)$
- Portanto, $B = \mu H$
- $B = \frac{\mu N_1}{l} i_1(t) + \frac{\mu N_2}{l} i_2(t)$

1.2 – Acoplamento Magnético

- $B = \frac{\mu N_1}{l} i_1(t) + \frac{\mu N_2}{l} i_2(t)$
- Assim, o fluxo magnético será: $\phi = \int Bds$
- $\phi(t) = \frac{\mu A N_1}{l} i_1(t) + \frac{\mu A N_2}{l} i_2(t)$
- Dessa forma as tensões nos enrolamentos serão:
- $v_1(t) = \frac{dN_1\phi}{dt} = N_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu A N_1}{l} i_1(t) + \frac{\mu A N_2}{l} i_2(t)\right)$
- $v_2(t) = \frac{dN_2\phi}{dt} = N_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu A N_1}{l} i_1(t) + \frac{\mu A N_2}{l} i_2(t)\right)$

1.2 – Acoplamento Magnético

- $v_1(t) = \frac{dN_1\phi}{dt} = N_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu A N_1}{l} i_1(t) + \frac{\mu A N_2}{l} i_2(t)\right)$
- $v_2(t) = \frac{dN_2\phi}{dt} = N_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu A N_1}{l} i_1(t) + \frac{\mu A N_2}{l} i_2(t)\right)$

- $v_1(t) = \frac{\mu A {N_1}^2}{l}\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{\mu A N_1 N_2}{l}\frac{di_2(t)}{dt}$
- $v_2(t) = \frac{\mu A N_1 N_2}{l}\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{\mu A {N_2}^2}{l}\frac{di_2(t)}{dt}$

1.2 – Acoplamento Magnético

- $v_1(t) = \frac{\mu A {N_1}^2}{l}\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{\mu A N_1 N_2}{l}\frac{di_2(t)}{dt}$
- $v_2(t) = \frac{\mu A N_1 N_2}{l}\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{\mu A {N_2}^2}{l}\frac{di_2(t)}{dt}$
- Pode-se observar que as tensões nos enrolamentos serão diretamente proporcionais às derivadas temporais das correntes nos enrolamentos.
- As constantes de proporcionalidade são denominadas por “Indutâncias” [H].

1.2 – Acoplamento Magnético

- $v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$
- $v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$
- Onde:
  - L_1 e L_2 são as indutância próprias dos enrolamentos "1" e "2", respectivamente.
  - M é a indutância mútua entre os enrolamentos "1" e "2".

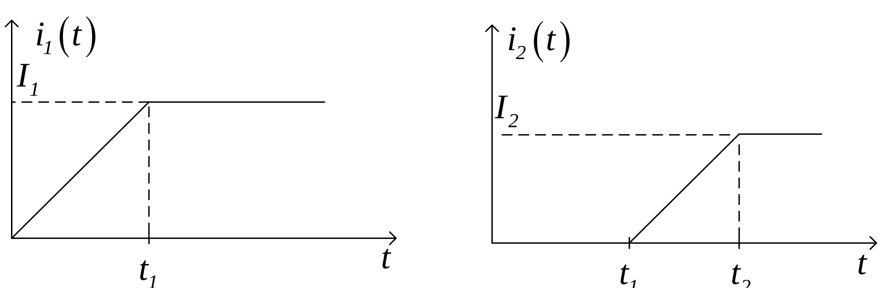
1.2 – Acoplamento Magnético

- Como os enrolamentos podem ter sentido que faz com que as correntes se subtraiam no cálculo da intensidade de campo magnético, tem-se:
- $v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$
- $v_2(t) = \pm M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$

1.3 – Cálculo da Energia Armazenada no Acoplamento Magnético

- O objetivo será determinar a energia armazenada no circuito magnético quando $i_1(t) = I_1$ e $i_2(t) = I_2$, simultaneamente.
- Para tanto, vamos considerar dois momentos. Em um primeiro momento $i_1(t)$ irá aumentar gradativamente de zero até I_1 enquanto $i_2(t) = 0$.
- Em um segundo momento $i_2(t)$ irá aumentar gradativamente de zero até I_2 enquanto $i_1(t)$ permanece constante e igual a I_1.

1.3 – Cálculo da Energia Armazenada no Acoplamento Magnético



- $E = \int_0^t p(t)dt$
- $E = \int_0^t v_1(t)i_1(t)dt + \int_0^t v_2(t)i_2(t)dt$

1.3 – Cálculo da Energia Armazenada no Acoplamento Magnético

- $E = \int_0^t v_1(t)i_1(t)dt + \int_0^t v_2(t)i_2(t)dt$
- $E = \int_0^{t_1} v_1(t)i_1(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} v_1(t)i_1(t)dt + \int_{t_2}^{t} v_1(t)i_1(t)dt + \int_0^{t_1} v_2(t)i_2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} v_2(t)i_2(t)dt + \int_{t_2}^{t} v_2(t)i_2(t)dt$

1.3 – Cálculo da Energia Armazenada no Acoplamento Magnético

- A tensão $v_1(t)$ nos diferentes momentos no qual a energia será calculada pode ser dada por:
- Para $0 \leq t < t_1$
  - $v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$
- Para $t_1 \leq t < t_2$
  - $v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} = \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$
- Para $t \geq t_2$
  - $v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} = 0$

1.3 – Cálculo da Energia Armazenada no Acoplamento Magnético

- A tensão $v_2(t)$ nos diferentes momentos no qual a energia será calculada pode ser dada por:
- Para $0 \leq t < t_1$
  - $v_2(t) = \pm M\frac{di_1(t)}{dt} + L_2\frac{di_2(t)}{dt} = \pm M\frac{di_1(t)}{dt}$
- Para $t_1 \leq t < t_2$
  - $v_2(t) = \pm M\frac{di_1(t)}{dt} + L_2\frac{di_2(t)}{dt} = L_2\frac{di_2(t)}{dt}$
- Para $t \geq t_2$
  - $v_2(t) = \pm M\frac{di_1(t)}{dt} + L_2\frac{di_2(t)}{dt} = 0$

1.3 – Cálculo da Energia Armazenada no Acoplamento Magnético

- Assim, a energia será:
- $E = \int_0^{t_1} L_1\frac{di_1(t)}{dt} i_1(t)dt \pm \int_{t_1}^{t_2} M\frac{di_2(t)}{dt} I_1 dt +$ $+ \int_{t_1}^{t_2} L_2\frac{di_2(t)}{dt} i_2(t)dt$
- $E = L_1\int_0^{t_1} i_1(t)di_1(t) \pm MI_1\int_{t_1}^{t_2} di_2(t)dt +$ $+ L_2\int_{t_1}^{t_2} i_2(t)di_2(t)$
- $\boxed{E = \frac{1}{2}L_1{I_1}^2 + \frac{1}{2}L_2{I_2}^2 \pm MI_1I_2}$

Energia armazenada no circuito magnético

1.4 – Fator de Acoplamento Magnético

- Vamos considerar a expressão da energia armazenada no circuito magnético:
- $E = \frac{1}{2} L_1 {I_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 {I_2}^2 \pm M I_1 I_2$
- Somando e subtraindo o termo $\frac{1}{2} \frac{M^2}{L_2} {I_1}^2$, tem-se:
- $E = \frac{1}{2} L_1 {I_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 {I_2}^2 \pm M I_1 I_2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{L_2} {I_1}^2 - \frac{1}{2} \frac{M^2}{L_2} {I_1}^2$

1.4 – Fator de Acoplamento Magnético

- $E = \frac{1}{2} L_1 {I_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 {I_2}^2 \pm M I_1 I_2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{L_2} {I_1}^2 - \frac{1}{2} \frac{M^2}{L_2} {I_1}^2$
- $E = \frac{1}{2} \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) {I_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 \left({I_2}^2 \pm 2 \frac{M}{L_2} I_1 I_2 + \frac{M^2}{{L_2}^2} {I_1}^2 \right)$
- $E = \frac{1}{2} \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) {I_1}^2 + \left(I_2 \pm \frac{M}{L_2} I_1 \right)^2$

1.4 – Fator de Acoplamento Magnético

- O circuito magnético é um circuito passivo, ou seja, a energia armazenada deve ser sempre um valor não negativo.
- O termo $\left(I_2 \pm \frac{M}{L_2} I_1\right)^2$ atende a essa condição.
- Contudo, é necessário impor que:
  - $L_1 - \frac{M^2}{L_2} \geq 0$
  - $L_1 \geq \frac{M^2}{L_2}$
  - $\boxed{M \leq \sqrt{L_1 L_2}}$

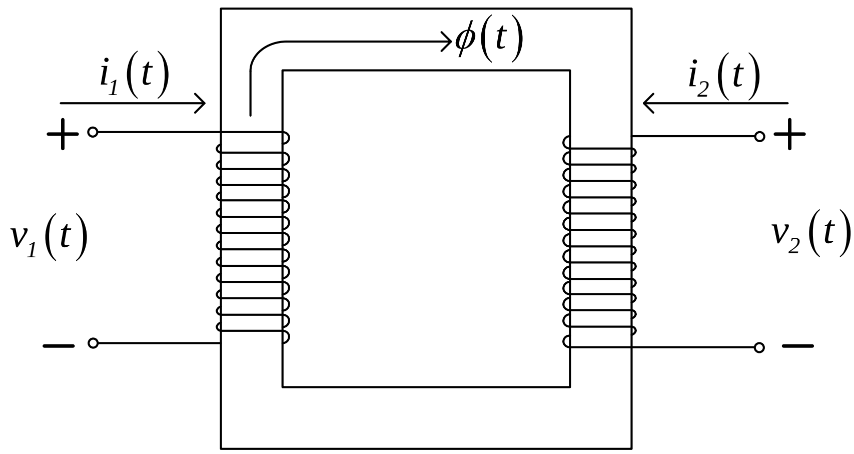
A análise da energia armazenada no circuito magnético fornece um limite físico para a indutância mútua, ou seja, no máximo a indutância mútua será igual a $\sqrt{L_1 L_2}$

1.4 – Fator de Acoplamento Magnético

- Em função do limite físico para a indutância mútua tem-se a definição do fator de acoplamento:
- $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$
- Em função do resultado anterior, tem-se que o fator de acoplamento estará no seguinte intervalo:
  - $0 \leq k \leq 1$
- Quanto mais próximo de "1" maior o fator de acoplamento.

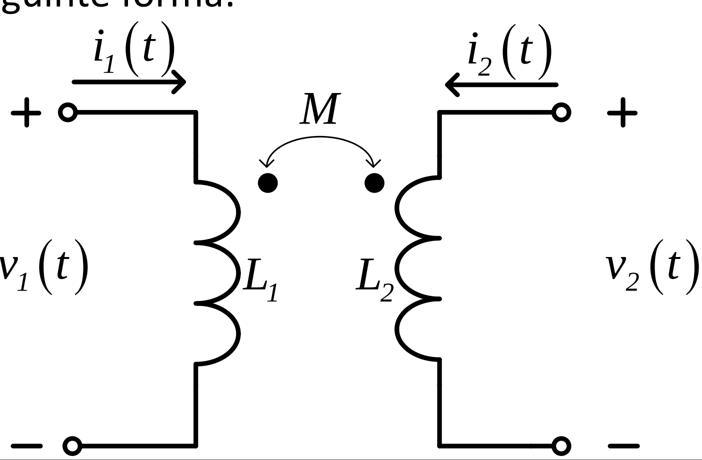
1.5 – Equivalente Elétrico de um Circuito Magneticamente Acoplado

- O seguinte circuito magnético



1.5 – Equivalente Elétrico de um Circuito Magneticamente Acoplado

- É esquematicamente representado da seguinte forma:

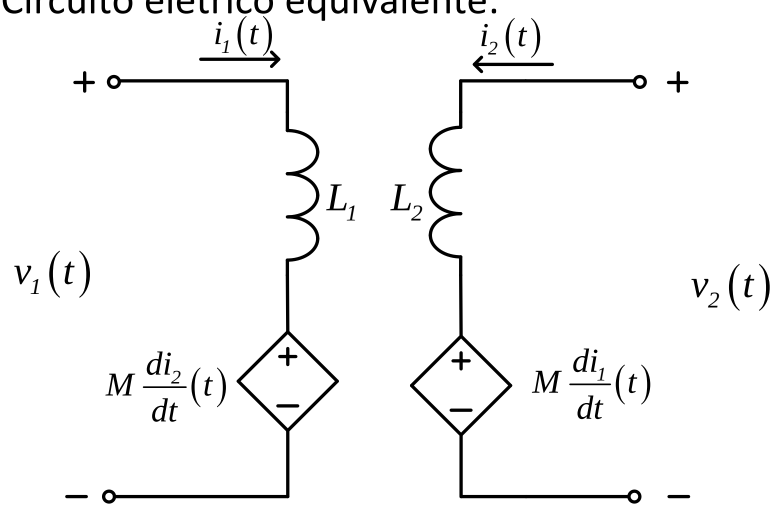


1.5 – Equivalente Elétrico de um Circuito Magneticamente Acoplado

- E resulta no seguinte conjunto de equações:
- $v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$
- $v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$
- Como sintetizar a partir dessas equações um circuito elétrico equivalente?

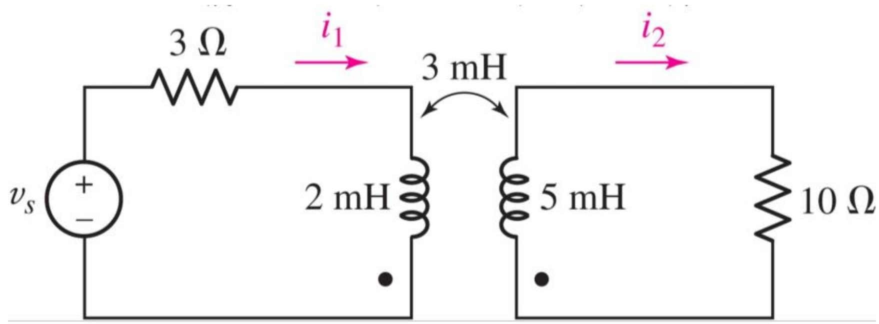
1.5 – Equivalente Elétrico de um Circuito Magneticamente Acoplado

- Circuito elétrico equivalente:



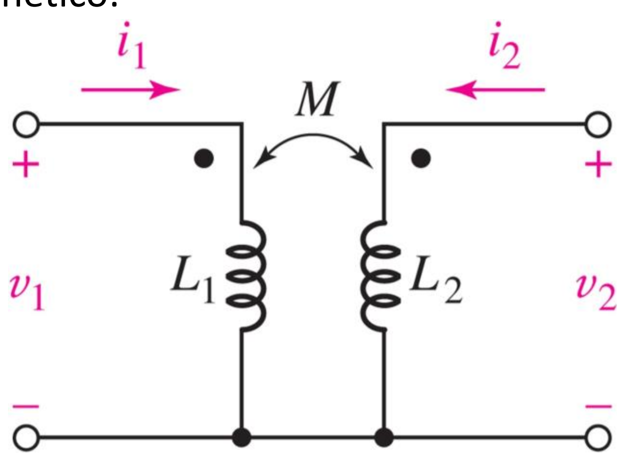
1.5 – Equivalente Elétrico de um Circuito Magneticamente Acoplado

- Vamos analisar o seguinte circuito considerando que $v_s(t) = 20e^{-1000t}$ V para $t \geq 0$ e que para $t < 0$ se tenha $v_s(t) = 20$ V.



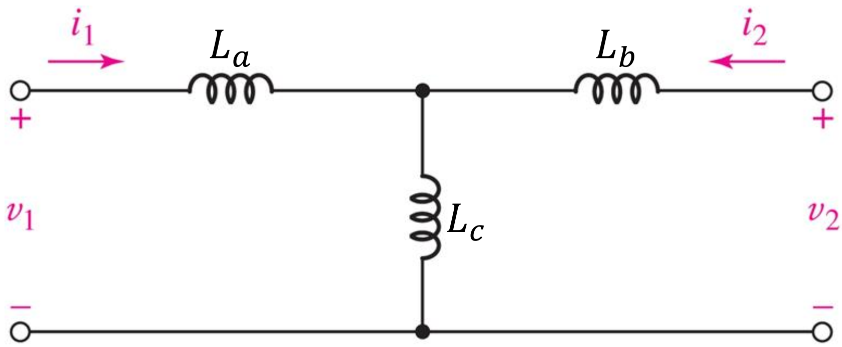
1.6 – Rede T e Rede Π equivalente de um acoplamento magnético

- Vamos considerar o seguinte circuitos magnético:



1.6 – Rede T e Rede Π equivalente de um acoplamento magnético

- O objetivo será verificar se existem indutâncias L_a, L_b e L_c que resultem em equivalência com o seguinte circuito:



1.6 – Rede T e Rede Π equivalente de um acoplamento magnético

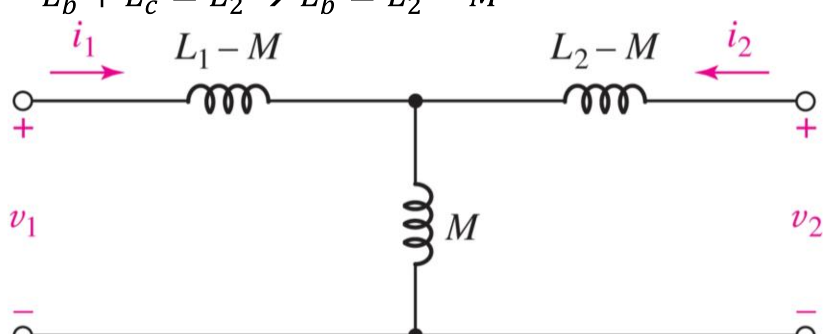
- O circuito magnético possui o seguinte conjunto de equações:
  - $$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \dfrac{di_1(t)}{dt} + M \dfrac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = M \dfrac{di_1(t)}{dt} + L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

1.6 – Rede T e Rede Π equivalente de um acoplamento magnético

- Enquanto que a Rede T equivalente possui o seguinte conjunto de equações:
  - $\begin{cases} v_1(t) = L_a \frac{di_1(t)}{dt} + L_c \frac{d}{dt}\big(i_1(t) + i_2(t)\big) \\ v_2(t) = L_c \frac{d}{dt}\big(i_1(t) + i_2(t)\big) + L_b \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$
  - $\begin{cases} v_1(t) = (L_a + L_c)\frac{di_1(t)}{dt} + L_c \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_c \frac{di_1(t)}{dt} + (L_b + L_c)\frac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$

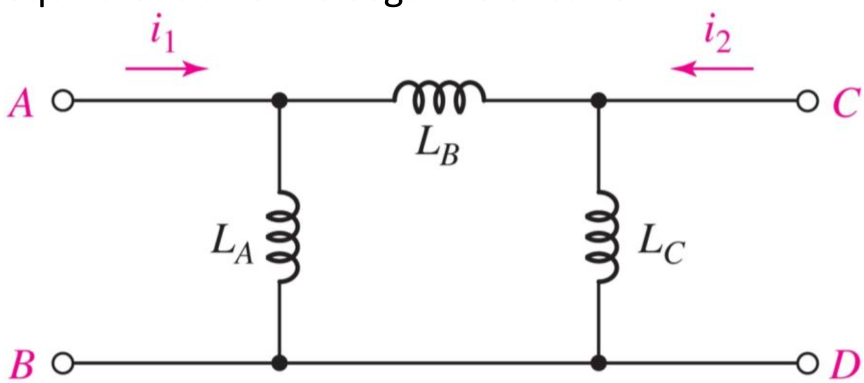
1.6 – Rede T e Rede Π equivalente de um acoplamento magnético

- Assim, tem-se as seguintes equivalência:
  - $L_c = M$
  - $L_a + L_c = L_1 \rightarrow L_a = L_1 - M$
  - $L_b + L_c = L_2 \rightarrow L_b = L_2 - M$

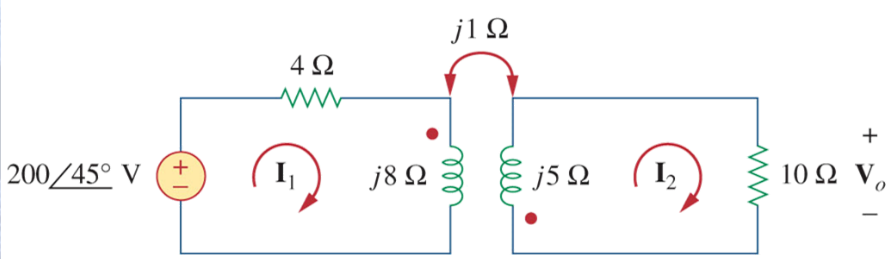


1.6 – Rede T e Rede Π equivalente de um acoplamento magnético

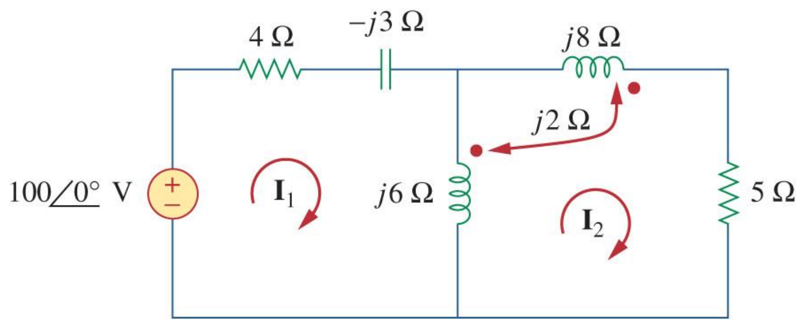
- Agora o objetivo será verificar se existem indutâncias L_A, L_B e L_C que resultem em equivalência com o seguinte circuito:



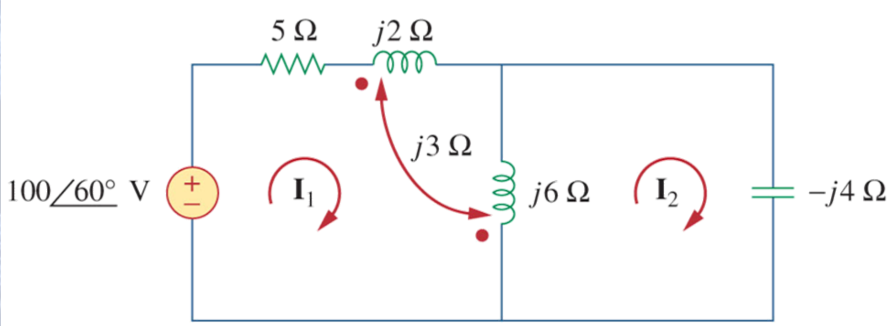
1.7 – Análise de circuitos magneticamente acoplados no domínio da frequência



1.7 – Análise de circuitos magneticamente acoplados no domínio da frequência



1.7 – Análise de circuitos magneticamente acoplados no domínio da frequência



1.8 – Transformador Ideal

- Vamos considerar as equações elétricas de um circuito magneticamente acoplado:
- $\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$
- No domínio da frequência se tem:
- $\begin{cases} \dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$

1.8 – Transformador Ideal

- Tomando as equações no domínio da frequência:
- $\begin{cases} \dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$
- E isolando $\dot{I}_1$ na primeira equação, se tem:
- $\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1 - j\omega M \dot{I}_2}{j\omega L_1}$

1.8 – Transformador Ideal

- Substituindo $\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1 - j\omega M \dot{I}_2}{j\omega L_1}$ na equação de $\dot{V}_2$, tem-se:
- $\dot{V}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$
- $\dot{V}_2 = j\omega M \frac{\dot{V}_1 - j\omega M \dot{I}_2}{j\omega L_1} + j\omega L_2 \dot{I}_2$
- $\dot{V}_2 = \frac{M}{L_1}\dot{V}_1 - j\omega \frac{M^2}{L_1}\dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2$
- $\dot{V}_2 = \frac{M}{L_1}\dot{V}_1 + j\omega \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)\dot{I}_2$

1.8 – Transformador Ideal

- O transformador ideal é caracterizado por possuir um acoplamento magnético unitário, ou seja, $M = \sqrt{L_1 L_2}$, e por não possuir fluxo de dispersão nos enrolamentos de maneira que as seguintes relações são válidas:
  - $L_1 = \frac{\mu A {N_1}^2}{l}$
  - $L_2 = \frac{\mu A {N_2}^2}{l}$

1.8 – Transformador Ideal

- Impondo as condições do transformador em $\dot{V}_2$, tem-se:
- $\dot{V}_2 = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1}\dot{V}_1 + j\omega\left(L_2 - \frac{L_1 L_2}{L_1}\right)\dot{I}_2$
- $\dot{V}_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\dot{V}_1 + j\omega(L_2 - L_2)\dot{I}_2$
- $\dot{V}_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\dot{V}_1 = \sqrt{\frac{\frac{\mu A {N_2}^2}{l}}{\frac{\mu A {N_1}^2}{l}}}\dot{V}_1 = \frac{N_2}{N_1}\dot{V}_1$

1.8 – Transformador Ideal

- Dessa forma, a relação das tensões em um transformador ideal é igual à razão entre o número de espiras em cada enrolamento:
- $\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{N_2}{N_1}$

1.8 – Transformador Ideal

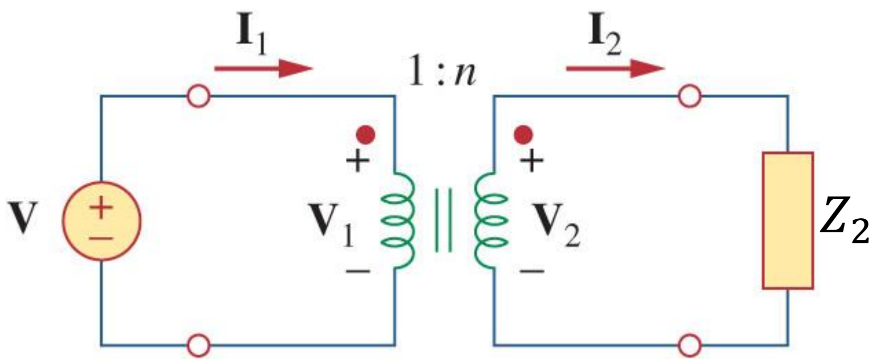
- Um outra característica do transformador ideal é a de não apresentar perdas, ou seja, em termos de potência complexa é possível estabelecer que:
- $\dot{S}_1 = \dot{S}_2$
- $\dot{V}_1 \dot{I}_1^{\ *} = \dot{V}_2 \dot{I}_2^{\ *}$
- $\frac{\dot{I}_1^{\ *}}{\dot{I}_2^{\ *}} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$
- $\frac{\dot{I}_1^{\ *}}{\dot{I}_2^{\ *}} = \frac{N_2}{N_1}$

1.8 – Transformador Ideal

- Dessa forma, a relação das correntes em um transformador ideal é igual à razão inversa entre o número de espiras em cada enrolamento:
- $\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{N_2}{N_1}$

1.8 – Transformador Ideal

- Vamos considerar o seguinte circuito:



1.8 – Transformador Ideal

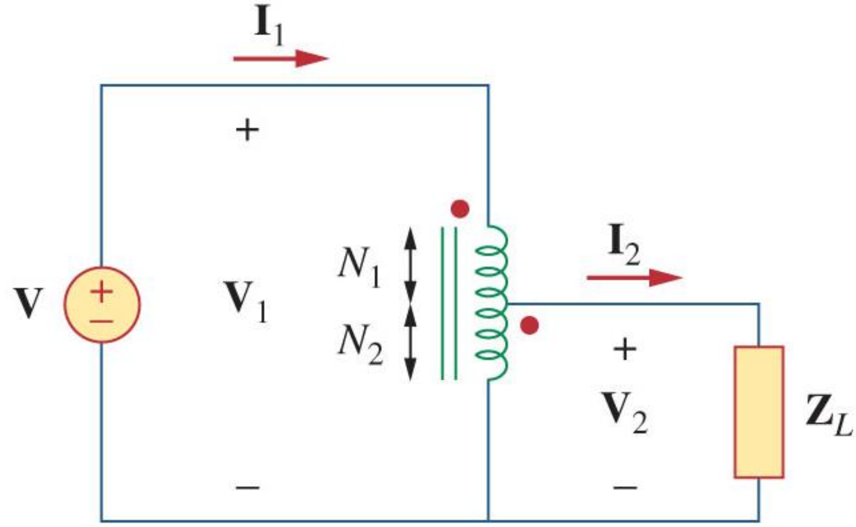
- No terminal da impedância Z_2 tem-se o seguinte relacionamento:
  - $\dot{V}_2 = Z_2 \dot{I}_2$
- Das relações do transformador ideal sabe-se que:
  - $\dot{V}_1 = \frac{N_1}{N_2}\dot{V}_2$ e portanto:
  - $\dot{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} Z_2 \dot{I}_2$

1.8 – Transformador Ideal

- Das relações do transformador ideal sabe-se ainda que que:
  - $\dot{I}_2 = \frac{N_1}{N_2}\dot{I}_1$ e portanto:
  - $\dot{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} Z_2 \dot{I}_2$
  - $\dot{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} Z_2 \frac{N_1}{N_2} \dot{I}_1$
  - $\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_2$
  - $Z_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_2$ onde Z_1 é a impedância do enrolamento 2 refletida no enrolamento 1.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

1.9 – Autotransformador



1.9 – Autotransformador