Oscilador Harmônico Simples

segunda aula

Oscar Éboli 21 de agosto de 2020

Onde paramos:

- Procuremos duas soluções linearmente independentes para a equação homogênea

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

- Tentemos $x(t) = e^{pt}$ onde p é uma constante. Substituindo temos que

$$a\ p^2 + b\ p + c = 0$$

logo

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Primeiro caso: o discriminante é positivo $b^2 - 4ac > 0$ há duas raízes distintas p_1 e p_2

solução geral

$$x(t) = c_1\ e^{p_1 t} + c_2\ e^{p_2 t}$$

- Segundo caso: discriminante nulo $b^2 - 4ac = 0$ há uma única raiz $\gamma = -\dfrac{b}{2a}$. Qual a segunda solução?

Tentamos $$x(t) = f(t)\ e^{\gamma t} \Longrightarrow \frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \Longrightarrow f(t) = c_1 + c_2 t$$

logo $$x(t) = (c_1 + c_2 t)\ e^{\gamma t}$$

Estudemos o terceiro caso:

- Terceiro caso: o discriminante é negativo $b^2 - 4ac < 0$ logo $p_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\ (c_1\ e^{-i\omega t} + c_2 \text{[illegible]})$$

- O que é a exponencial imaginária? Lembremos da fórmula de [illegible]

$$e^{i\theta} \equiv \text{co[illegible]}\, i \sin\theta$$

- Logo podemos escrever as soluções são

$$x(t) \text{[illegible]} \left[c_1'\ \cos(\omega t) + c_2'\ \sin(\omega t)\right]$$

Exemplo oscilador harmônic[illegible]s:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \text{[illegible]} = 0 \Longrightarrow p = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \pm i\omega \Longrightarrow x(t) = c_1\ \cos(\omega t) + c_2\ \sin(\omega t)$$

VISÃO GERAL ANTES DOS DETALHES

- Terceiro caso: o discriminante é negativo $b^2 - 4ac < 0$ logo $p_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\ (c_1\ e^{-i\omega t} + c_2\ e^{+i\omega t})$$

- O que é a exponencial imaginária? Lembremos da fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$$

- Logo podemos escrever as soluções são

$$x(t) = e^{-\gamma t}\ [c_1'\ \cos(\omega t) + c_2'\ \sin(\omega t)]$$

Exemplo oscilador harmônico simples:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Longrightarrow p = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \pm i\omega \Longrightarrow x(t) = c_1\ \cos(\omega t) + c_2\ \sin(\omega t)$$

1. Revisão: números complexos

- Denotamos a unidade imaginária por $i \equiv \sqrt{-1}$
- Números complexos são da forma $z = a + i\ b$
- Se $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

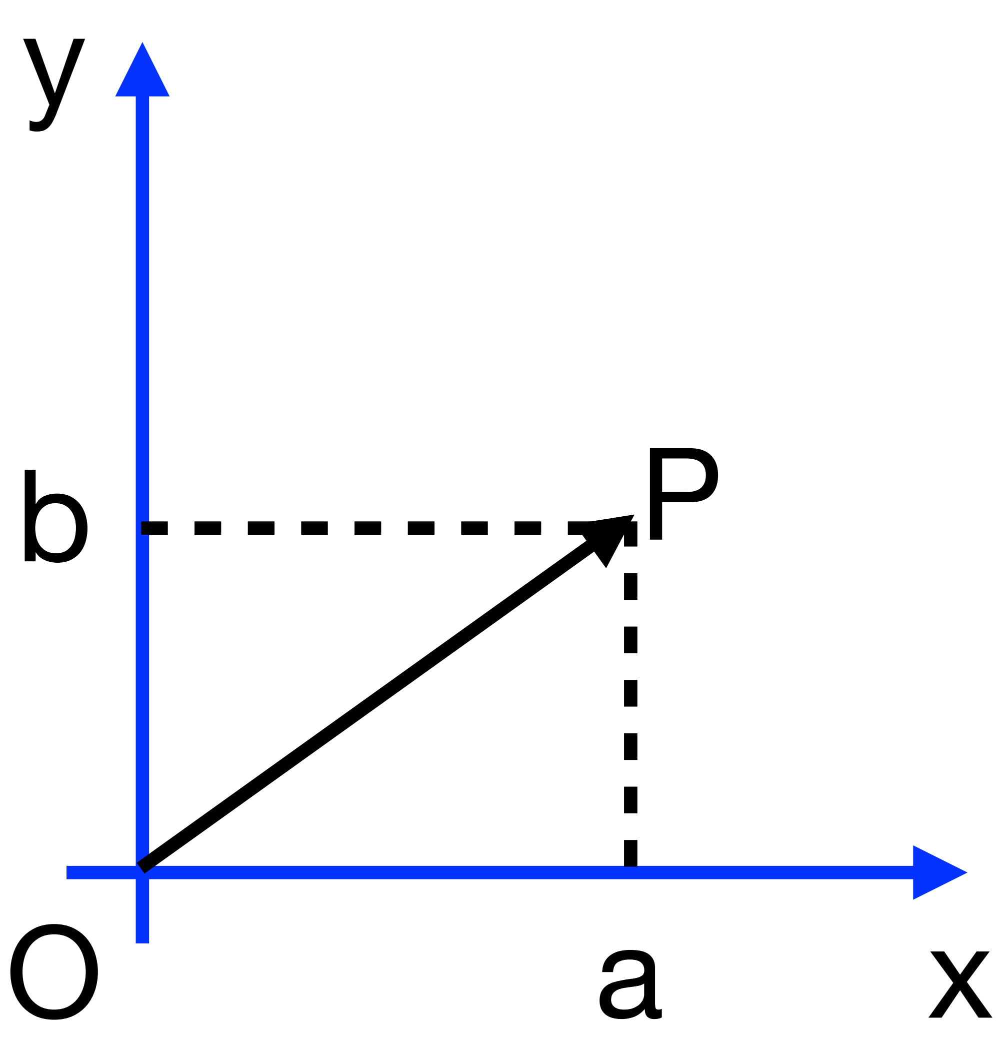
  a soma é dada por $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\ (b_1 + b_2)$

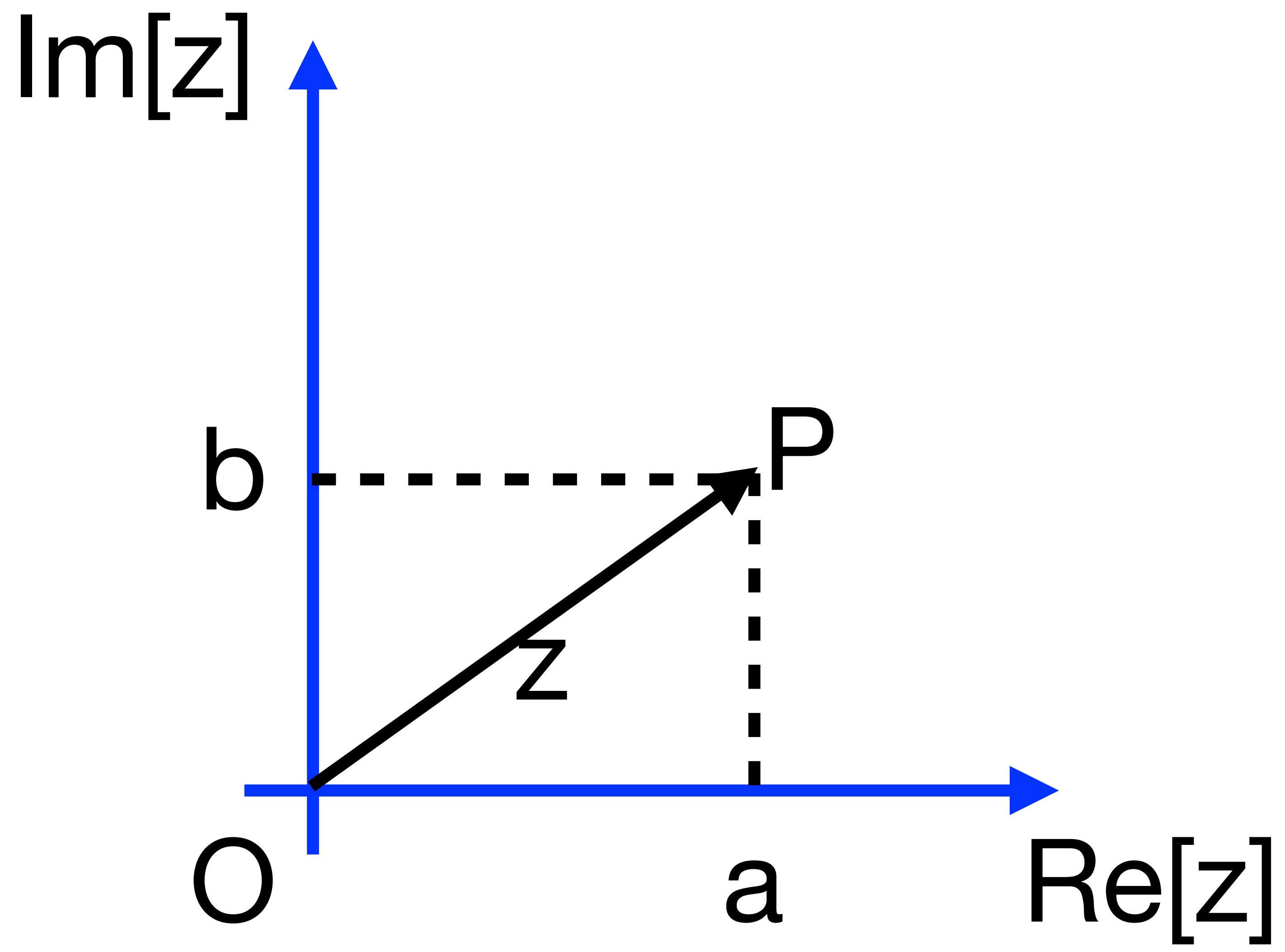
  e o produto por $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\ (a_1 b_2 + a_2\ b_1)$
- O complexo conjugado do número é $z^* = a - i\ b$
- O módulo ao quadrado de z é $|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2$

- Plano Argand-Gauss: considere um ponto P no plano (x,y)

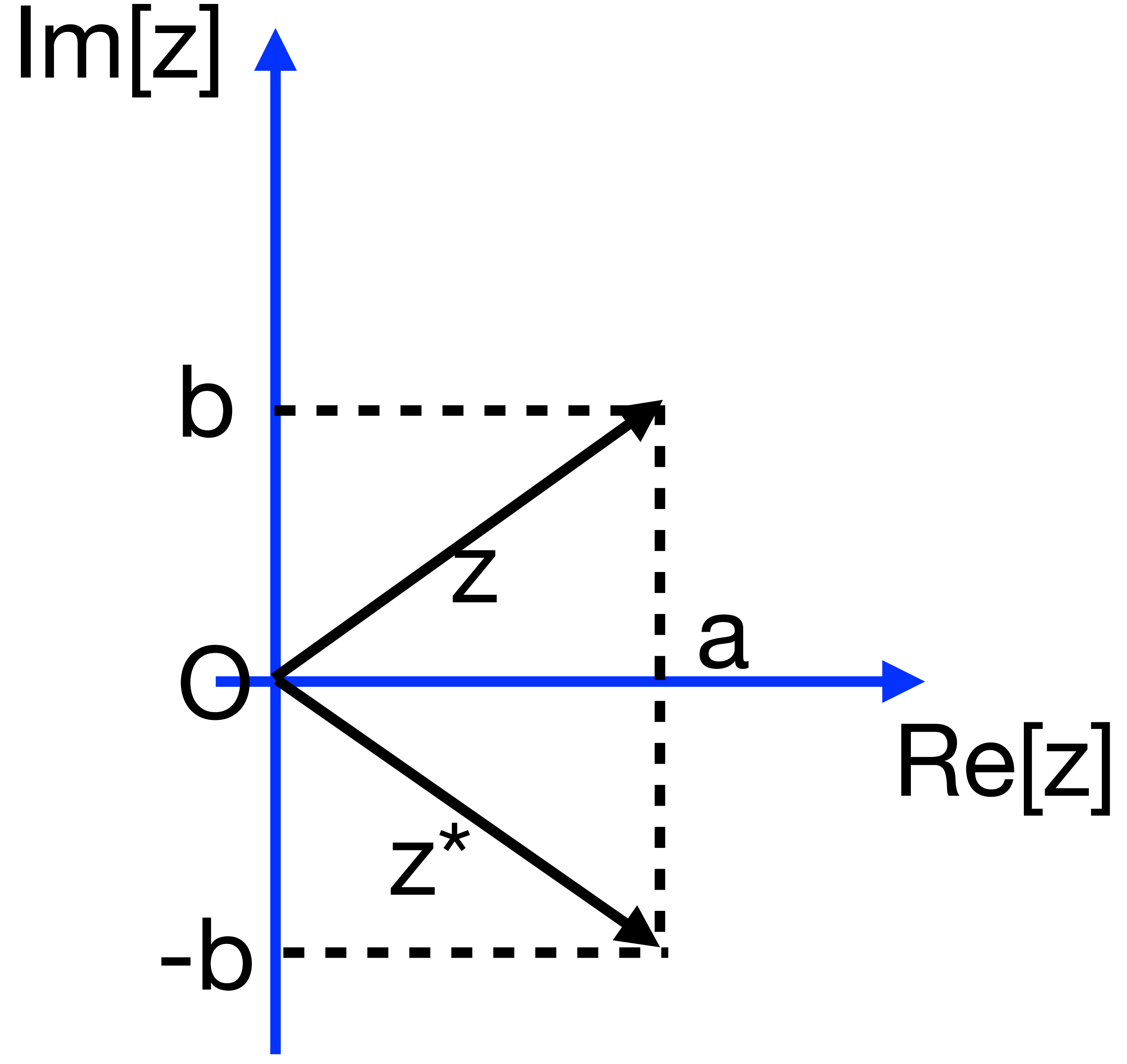
$$\overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

Agora associamos $\overrightarrow{OP}$ com $z = a + ib$

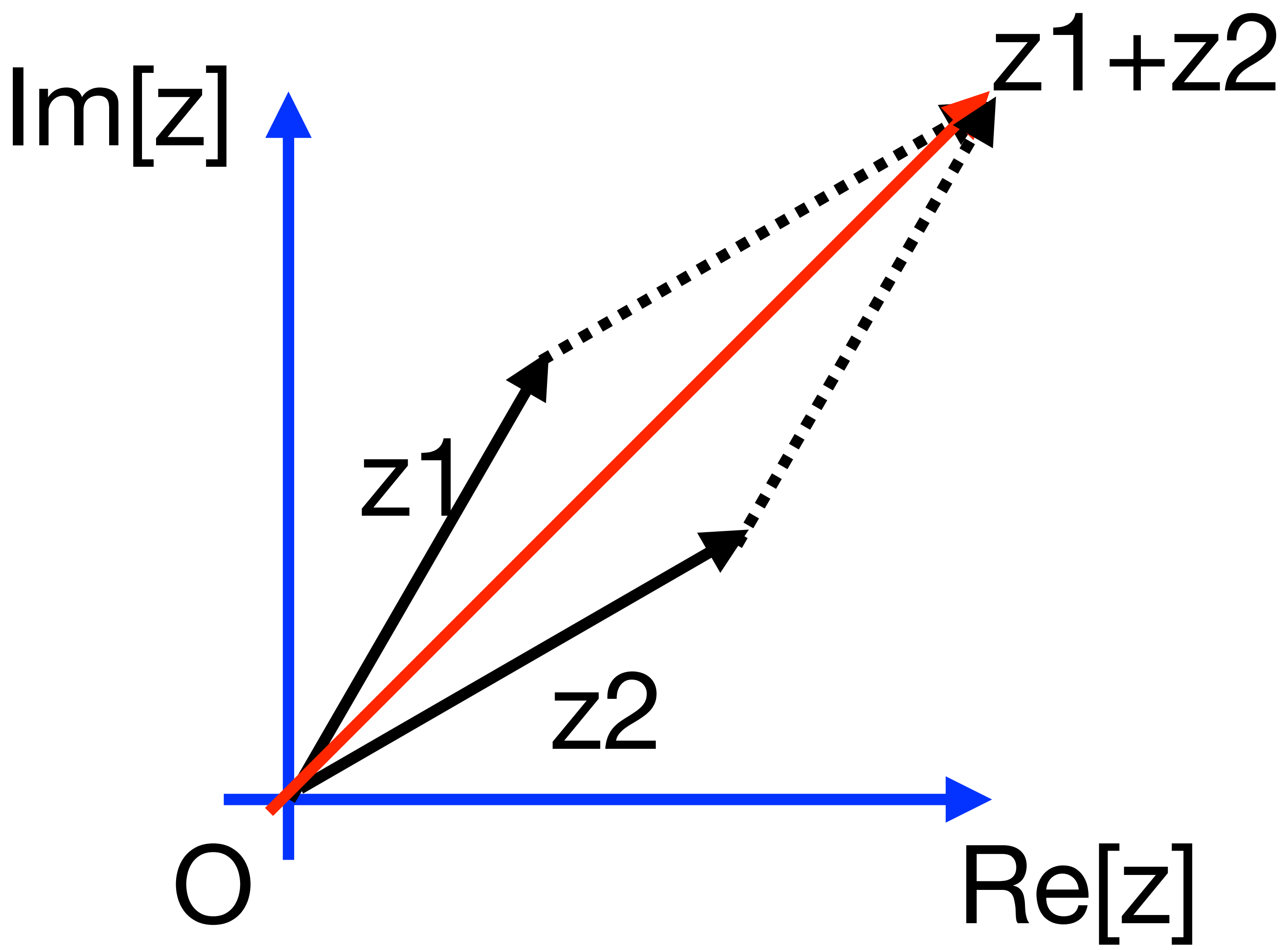




- Neste plano o complexo conjugado é a reflexão no eixo real:



- A soma é a soma de vetores!



- **Fórmula de Euler:**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

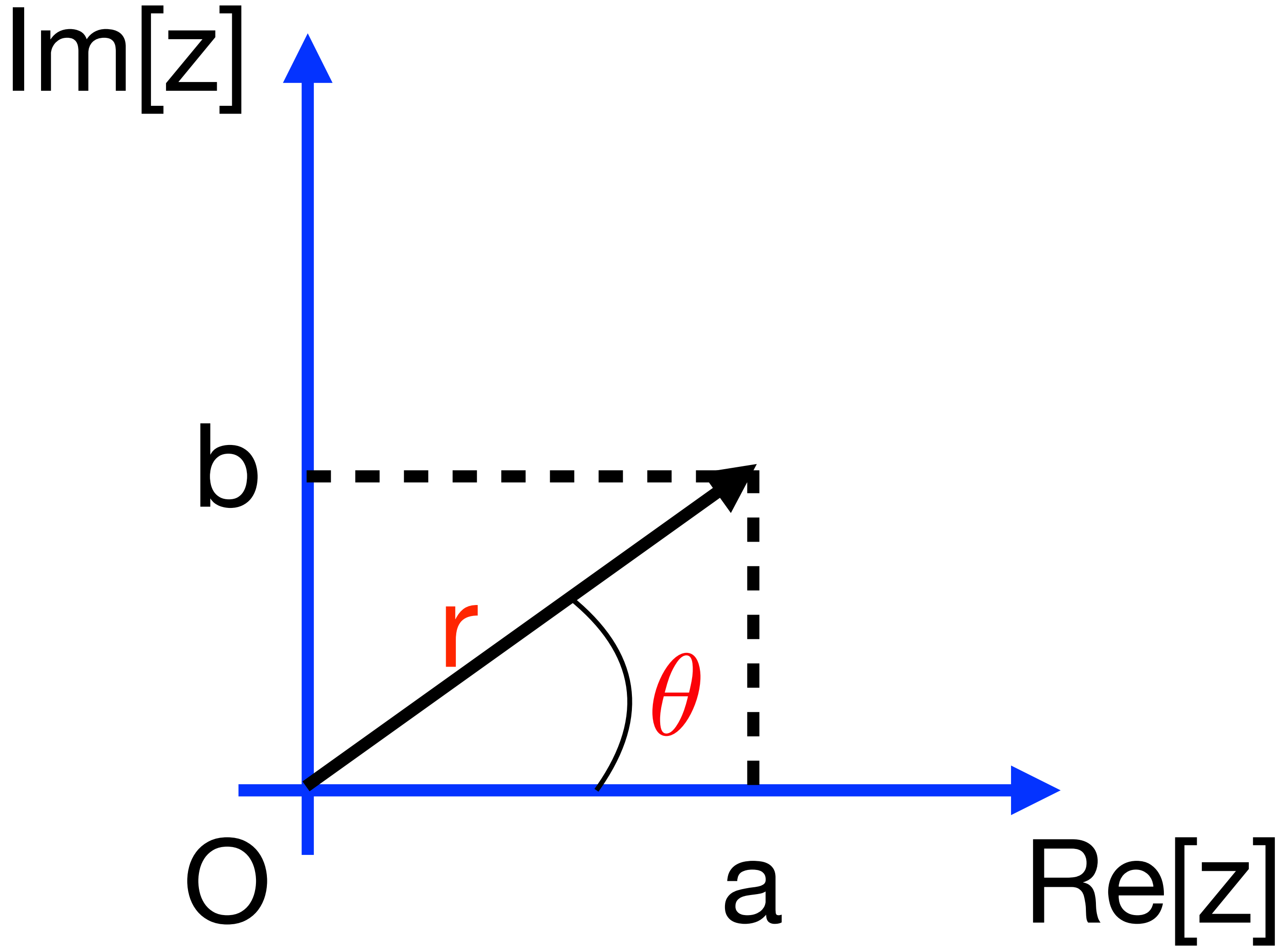
- Comporta-se exatamente como uma exponencial:

1. Para $\theta = 0 \Longrightarrow e^{i0} = \cos(0) + i\ \sin(0) = 1$

2. E também satisfaz: $\dfrac{d}{dt}(e^{iat}) = iae^{iat}$

3. Dados θ_1 e $\theta_2 \Longrightarrow e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Números complexos na forma trigonométrica:



- Dado o número complexo $z = a + i\ b$

$$a = r\cos\theta \text{ e } b = r\sin\theta \Longrightarrow z = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$$

- Note: $z^* = re^{-i\theta}$

$$|z|^2 = z^* z = r^2$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad -1 = e^{i\pi}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1}\ r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2\ e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_1/z_2 = r_1 e^{i\theta_1}/r_2 e^{i\theta_2} = r_1/r_2\ e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Um pouco mais:

- Podemos expressar as funções seno e cosseno usando a fórmula de Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

- Podemos definir exponenciais de números complexos:

$$e^{a+ib} \equiv e^a e^{ib}$$

2. Retornando à nossa equação diferencial:

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

- Consideremos uma função complexa de t $\quad \mathrm{z(t) = x(t) + i\ y(t)}$

real

- Temos que $\quad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[x(t) + iy(t)\right] = \dfrac{dx}{dt} + i\dfrac{dy}{dt}$

- Note que $\mathrm{Re}\left[\dfrac{dz}{dt}\right] = \dfrac{d}{dt}\left[\mathrm{Re}(z(t))\right]$

- Generalizamos a equação diferencial para $\quad a\dfrac{d^2z}{dt^2} + b\dfrac{dz}{dt} + cz = 0$

- Note que $\quad \mathrm{Re}\left\{a\dfrac{d^2z}{dt^2} + b\dfrac{dz}{dt} + cz\right\} = a\dfrac{d^2}{dt^2}\mathrm{Re}[z] + b\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}[z] + c\mathrm{Re}[z]$

- Logo resolvendo

$$a\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + cz = 0$$ obtemos a solução de $$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

fazendo $x(t) = \mathrm{Re}[z(t)]$ (funciona também com a parte imaginária :-)

- Agora procurando soluções da forma $z(t) = e^{pt}$ devemos ter $a\,p^2 + b\,p + c = 0$

para o caso $b^2 - 4ac < 0$ temos $p_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$

$$z(t) = (c_1'\ e^{-\gamma - i\omega t} + c_2'\ e^{-\gamma + i\omega t}) \Longrightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\ (c_1\ e^{-i\omega t} + c_2\ e^{+i\omega t})$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\ [d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t)]$$

3. Oscilador harmônico simples (ohs)

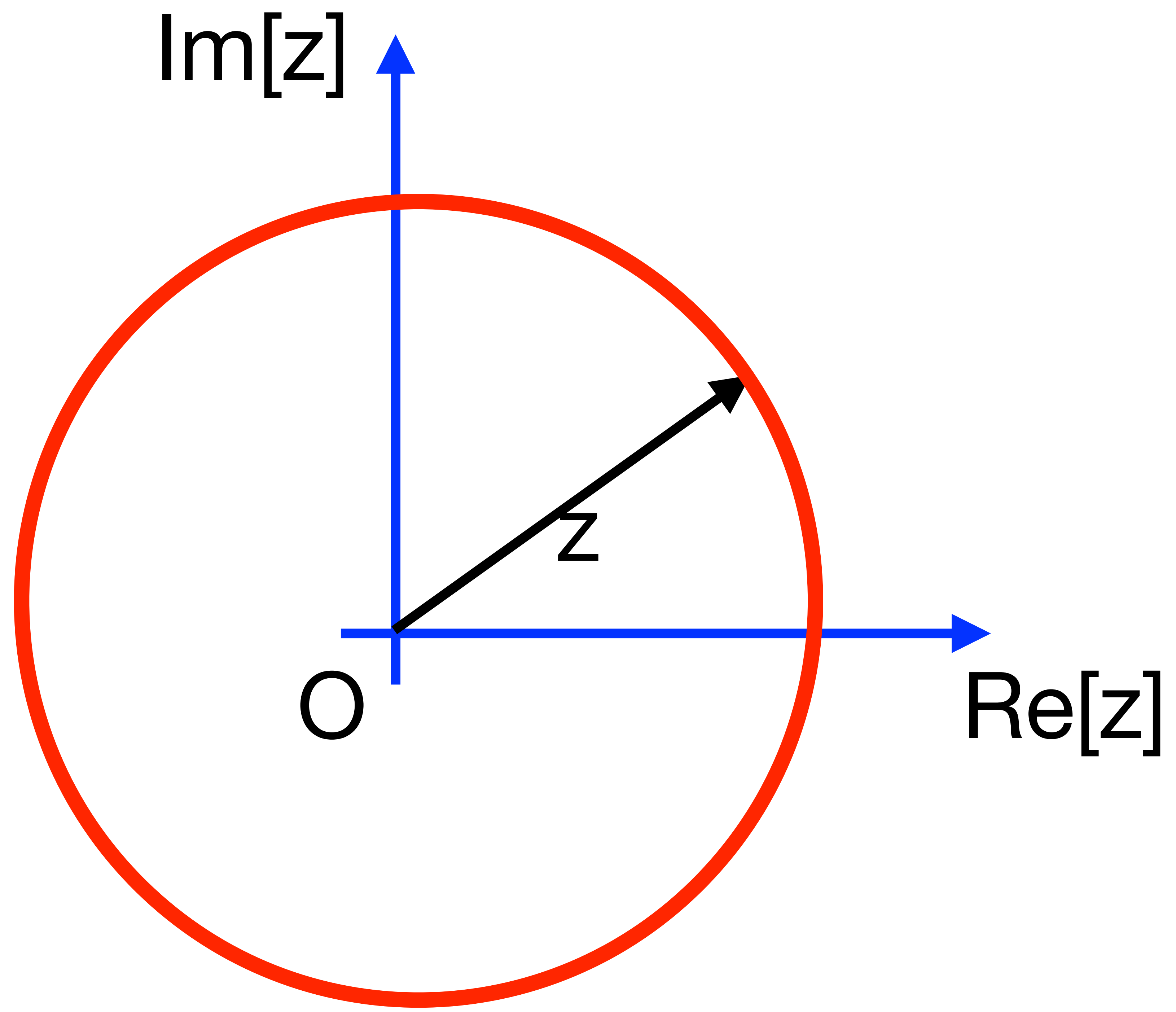
- Como vimos um OHS obedece

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Longrightarrow p = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \pm i\omega$$

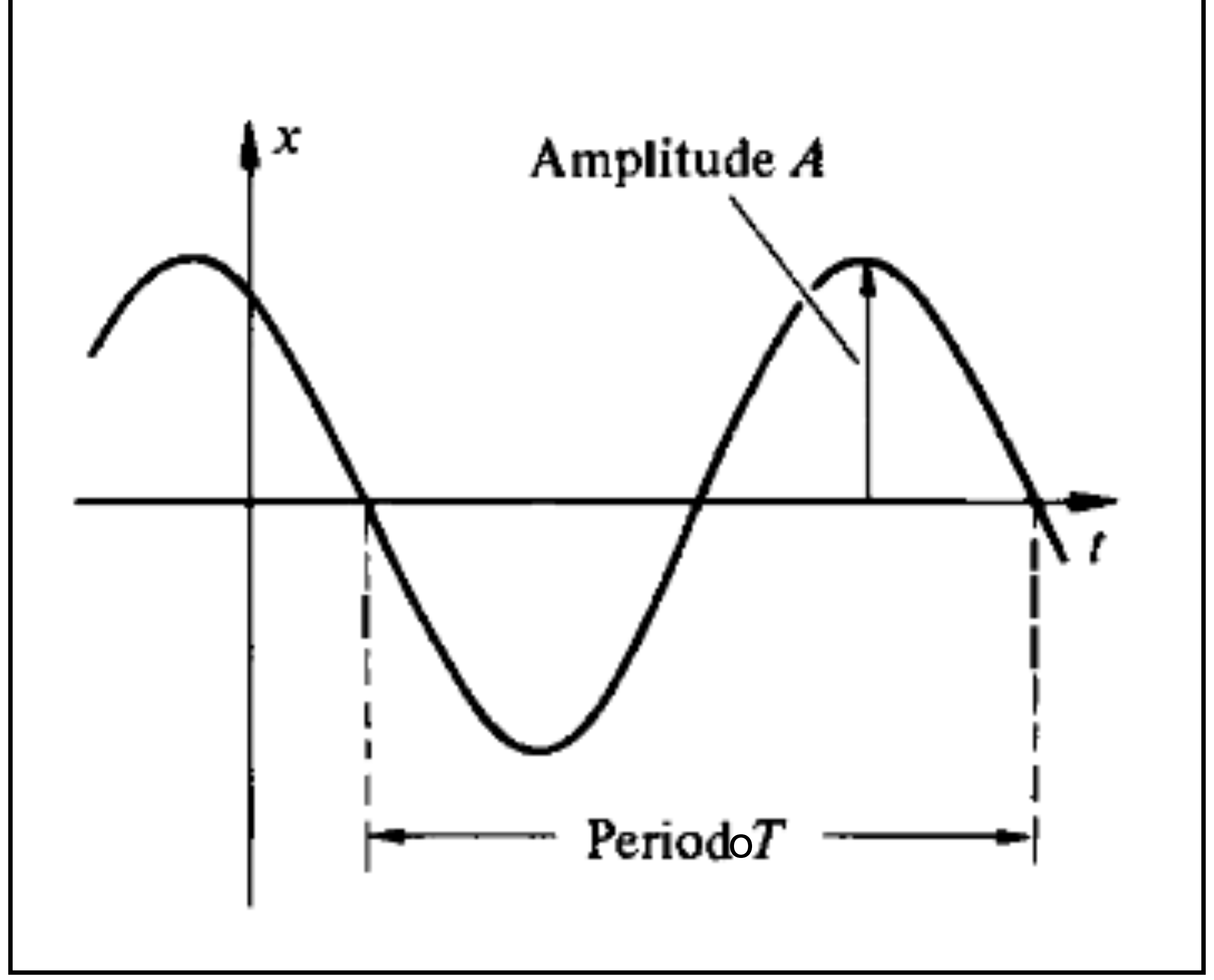
$$x(t) = c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{+i\omega t} = d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

- A relação com o movimento circular é direta

$$z(t) = A\ e^{i\phi} e^{+i\omega t}$$



$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$ frequência angular ω



- Período $\omega T = 2\pi \Longrightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
- Frequência $\nu = \dfrac{1}{T}$ em Hz com $\omega = 2\pi\nu$
- Energia cinética, potencial e total $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cin}} + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Energias médias: definimos a média temporal por

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T dt\ f(t) \qquad \text{para} \qquad f(t+T) = f(t)$$

$$\langle E_{\rm cin} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\ \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \frac{1}{T}\int_{\phi/\omega}^{T+\phi/\omega} dt'\ \sin^2(\omega t')$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \frac{1}{T}\int_{\phi/\omega}^{T+\phi/\omega} dt'\ \frac{1}{2}[1 - \cos(2\omega t')]$$

$$= \frac{1}{4} m\omega^2 A^2$$

Analogamente

$$\langle U \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\ \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \frac{1}{T}\int_{\phi/\omega}^{T+\phi/\omega} dt'\ \ \cos^2(\omega t')$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \frac{1}{T}\int_{\phi/\omega}^{T+\phi/\omega} dt'\ \ \frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega t')]$$

$$= \frac{1}{4}m\omega^2 A^2$$

$$= \langle E_{\text{cin}} \rangle$$

atrito invalida essa relação

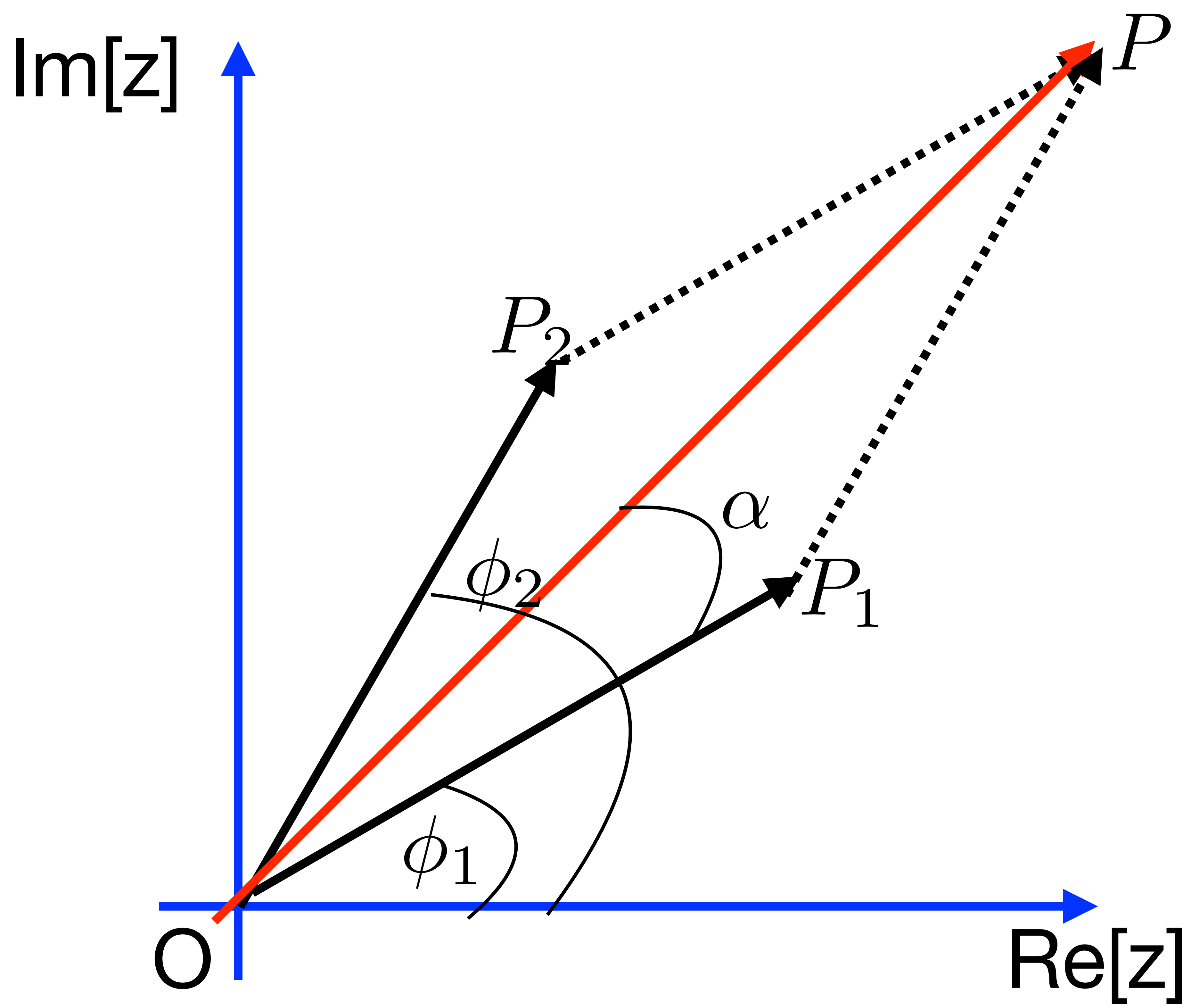
3. Superposição de OHS

1. Consideremos a soma de duas soluções na mesma direção e frequência

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

calculemos $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ com $z(t) = A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} = z_1(t) + z_2(t)$

$$z(t) = A e^{i(\omega t + \phi_1 + \alpha)}$$



$$\begin{aligned} |z(t)|^2 &= z^* z = (z_1^* + z_2^*)(z_1 + z_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1^* z_2 + z_1 z_2^* \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left[e^{i(\phi_2 - \phi_1)} + e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \right] \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \\ &= A^2 \end{aligned}$$

- Obtenhamos a fase:

$$Ae^{i(\omega t+\phi_1+\alpha)} = A_1 e^{i(\omega t+\phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t+\phi_2)}$$

$$Ae^{i\alpha} = A_1 + A_2 e^{i(\phi_2-\phi_1)}$$

$$e^{i\alpha} = \frac{A_1 + A_2 e^{i(\phi_2-\phi_1)}}{A}$$

• Obtenhamos a fase:

$$Ae^{i(\omega t+\phi_1+\alpha)} = A_1 e^{i(\omega t+\phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t+\phi_2)}$$

$$Ae^{i\alpha} = A_1 + A_2 e^{i(\phi_2-\phi_1)}$$

$$e^{i\alpha} = \frac{A_1 + A_2 e^{i(\phi_2-\phi_1)}}{A}$$

2. Consideremos a soma de duas soluções de frequência e em direções perpendiculares

Movimento no plano de uma massa presa a uma mola $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} = -m\omega^2\vec{r}$

escrevendo $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ segue $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ e $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$

solução
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_1)$$
$$y(t) = B\cos(\omega t + \phi_2)$$

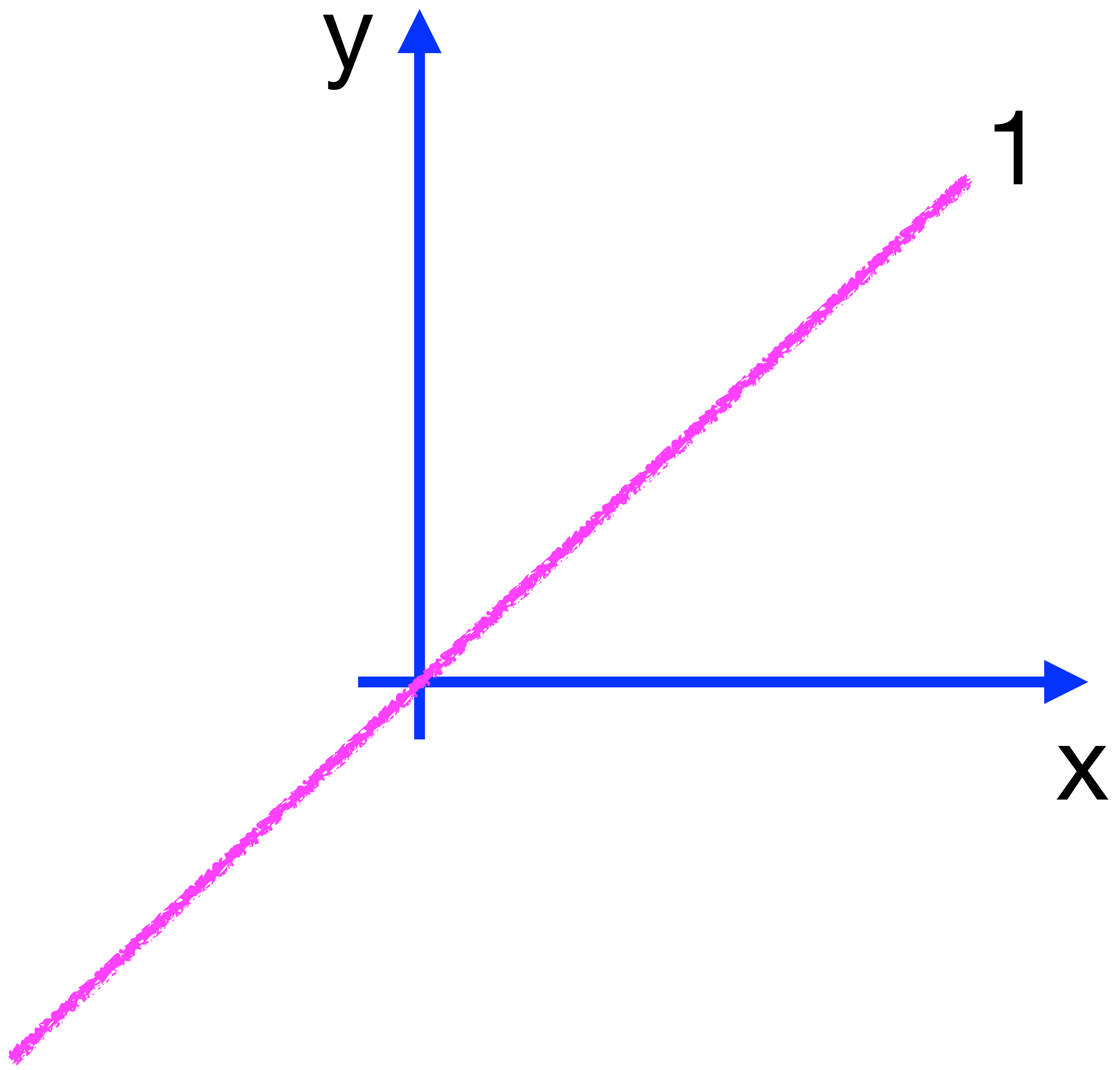
Qual a trajetória descrita no plano?

para facilitar a álgebra, tomamos $\phi_1 = 0$

1. Caso $\phi_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t) \\ y(t) &= B\cos(\omega t) \end{aligned}\right\} \implies x(t) = \frac{A}{B}\,y(t)$$

é uma reta



2. Caso $\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $A = B$

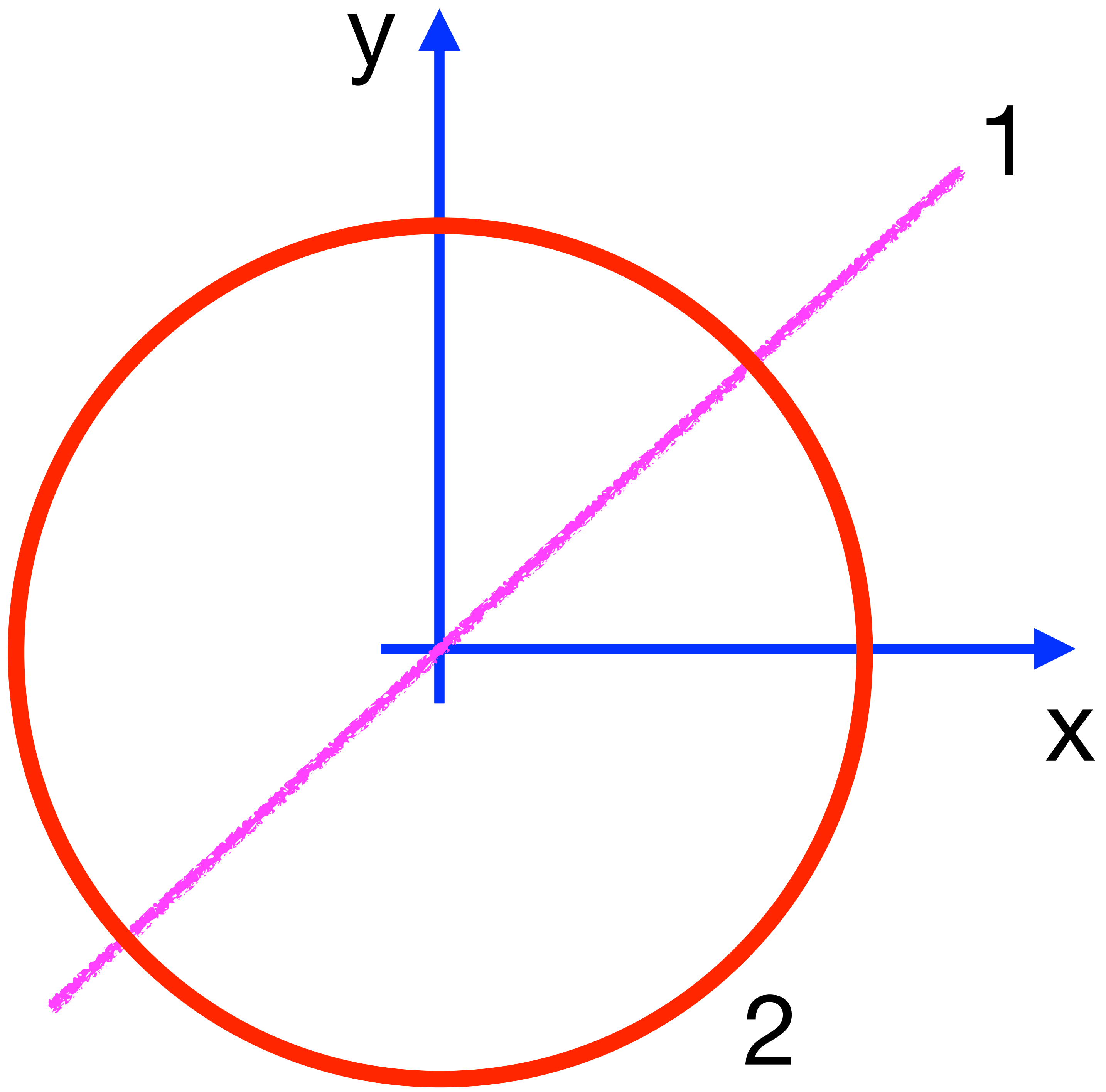
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t) \\ y(t) &= A\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \implies x^2(t) + y^2(t) = A^2$$

é um círculo

1. Caso $\phi_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t) \\ y(t) &= B\cos(\omega t) \end{aligned}\right\} \implies x(t) = \frac{A}{B}\,y(t)$$

é uma reta



2. Caso $\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $A = B$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t) \\ y(t) &= A\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \implies x^2(t) + y^2(t) = A^2$$

é um círculo

3. Caso geral
$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t) \\ \\ y(t) = B\cos(\omega t + \phi_2) = B[\cos(\omega t)\cos(\phi_2) - \sin(\omega t)\sin(\phi_2)] \end{cases}$$

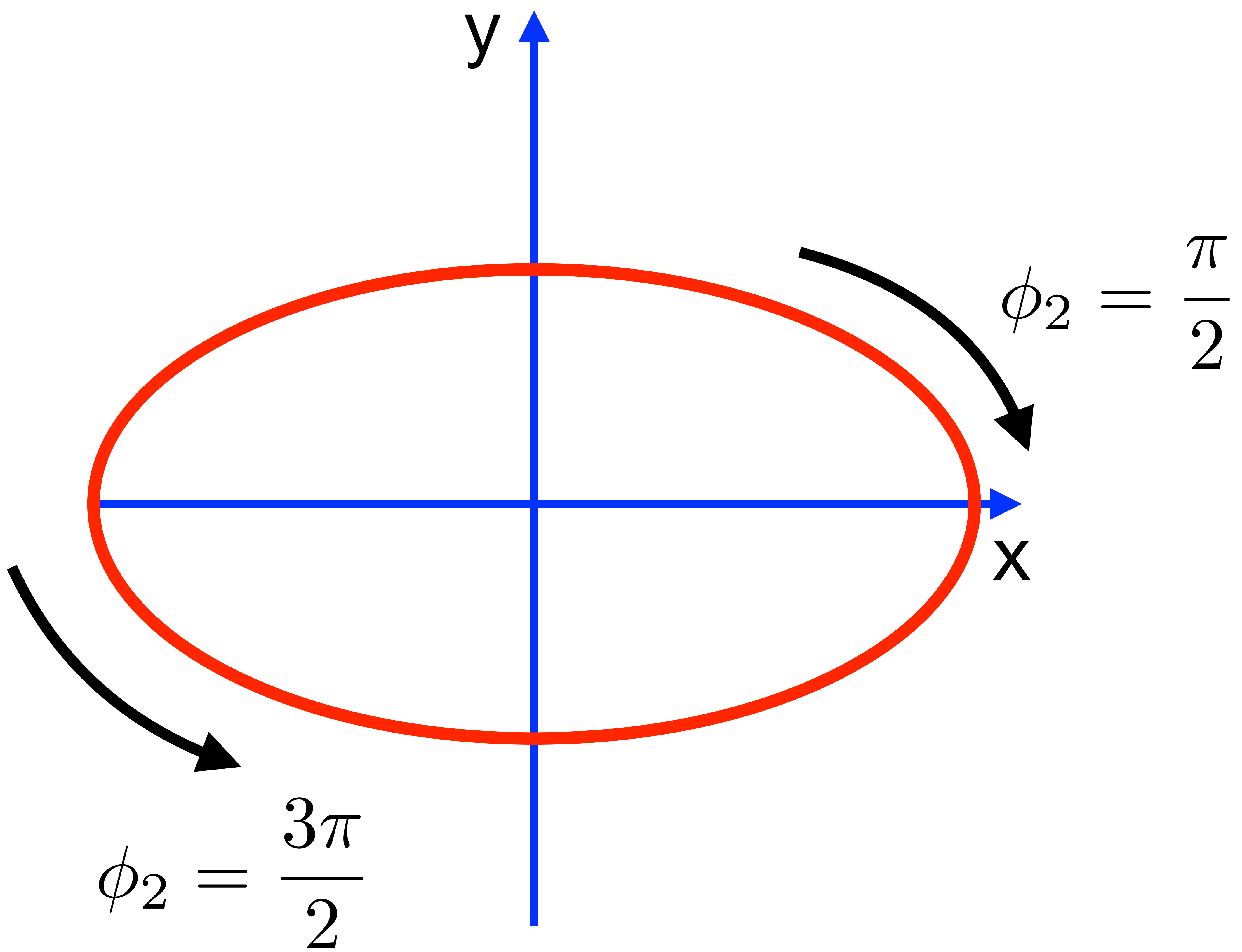
eliminando o tempo:
$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos(\phi_2) \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}\ \sin(\phi_2)$$

temos que
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos(\phi_2) = \sin^2(\phi_2)$$

é uma elipse!

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos(\phi_2) = \sin^2(\phi_2)$$

casos particulares $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ e $\phi_2 = \frac{3\pi}{2}$



Referências:

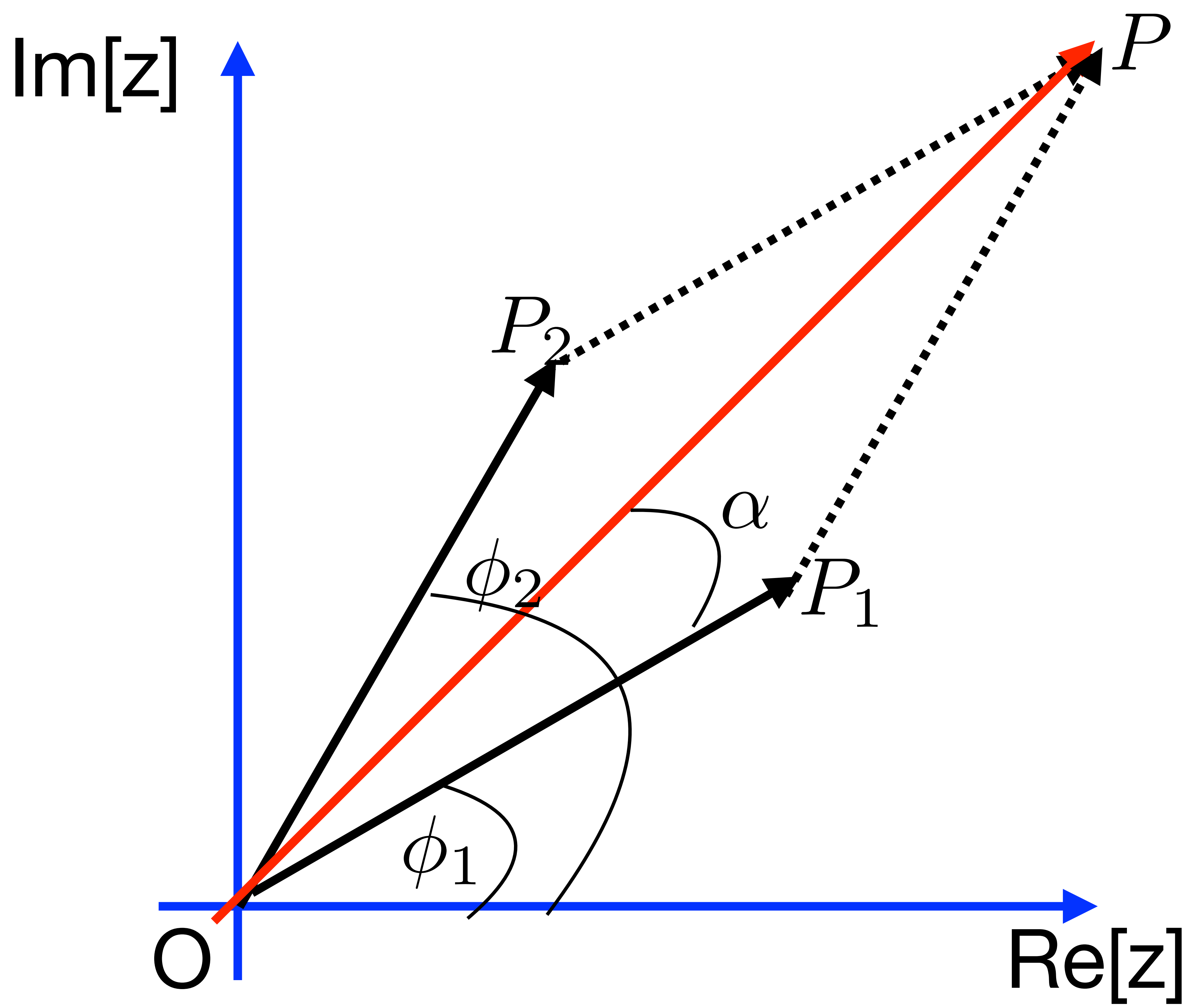
1. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 2 seções 3.4 e 3.5
2. Kleppner e Kolenkow, introduction to Mechanics, seção 10.1
3. Kittel, Knight e Ruderman, Mechanics, capítulo 7
4. Feynman, Leyton e Sands, Lectures on Physics, vol. 1, capítulo 21

3. Superposição de OHS

1. Consideremos a soma de duas soluções na mesma direção e frequência

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

calculemos $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$



Usando o triângulo OP_1P

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)$$

$$A_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) = A\sin(\alpha) \Longrightarrow \sin(\alpha) = \frac{A_2}{A}\sin(\phi_2 - \phi_1)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_1 + \alpha)$$