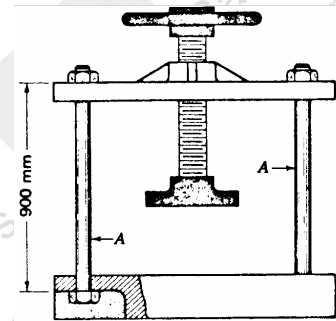


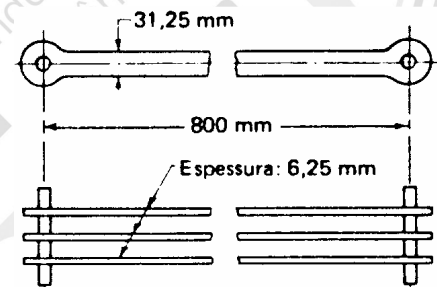
Lista 2

- 1) Uma barra de aço de 80 [mm] de comprimento e 15 [mm] de diâmetro é submetida a uma carga de compressão de 175 [kN]. O material é aço carbono. Determinar:
- A tensão de compressão;
 - A deformação axial;
 - O deslocamento ocorrido;
 - O aumento do diâmetro da barra.

- 2) [2, pág. 73] Deve-se projetar uma prensa, de modo que o alongamento das duas peças “A” sujeitas à tração não exceda 0,400 [mm].
- Deve-se usar a prensa para cargas de até 44500 [N]. Determinar os diâmetros das colunas.
 - Caso se permita uma tensão máxima de 140 [MPa], as colunas oferecerão segurança?

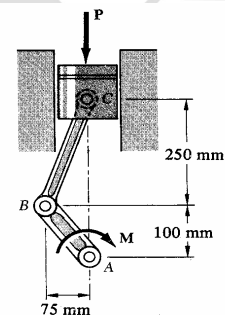


- 3) [2, pág. 74] Uma biela consiste de três barras de aço de 6,25 [mm] de espessura e 31,25 [mm] de largura, conforme mostra a figura. Durante a montagem, descobriu-se que uma das barras media somente 799,925 [mm] entre os centros dos furos e as outras mediam exatamente 800,000 [mm]. Determine a tensão em cada barra, após a montagem.

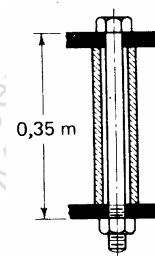


- 4) (falta bibliografia) Um momento de torção M de 1500 [N.m] é aplicado ao eixo da manivela, no esquema de motor mostrado na figura. Para a posição indicada, determine:

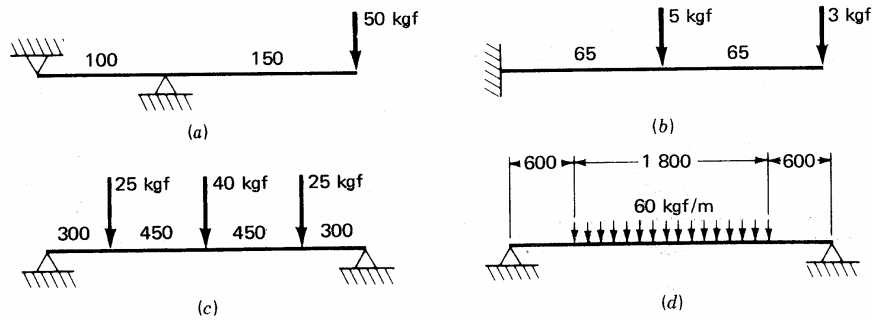
- A força P necessária para manter o sistema em equilíbrio.
- A tensão normal na barra BC , a qual tem seção transversal uniforme de área igual a 470 [mm²].



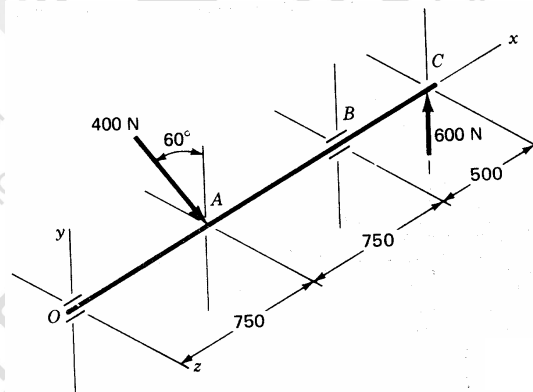
- 5) [2, pág. 75] Um parafuso de aço de diâmetro nominal de 20 [mm] e passo de 2,5 [mm] (distância de fio a fio da rosca, na direção axial) e um tubo de alumínio de 40 [mm] e 22 [mm] de diâmetros externo e interno, respectivamente, atua como espaçador para duas placas, conforme indica a figura. Gira-se a porca, eliminando-se toda a folga e, em seguida, dá-se um aperto adicional correspondente a um terço de volta. Calcule a tensão resultante no parafuso e no tubo, desprezando a deformação das placas, da cabeça e da porca do parafuso.



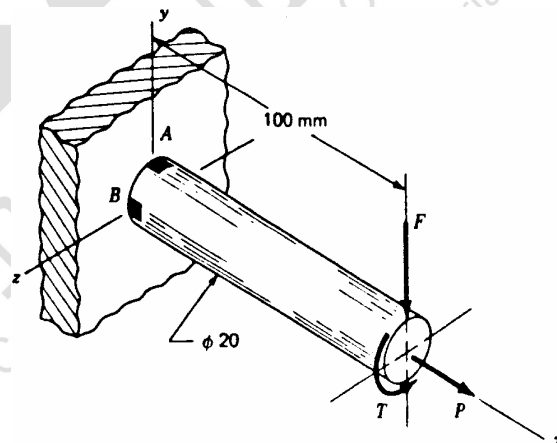
6) [2, pág. 75] Calcular as reações nos apoios e traçar os diagramas de força cortante e de momento de flexão para cada uma das vigas mostradas na figura abaixo.



7) [2, pág. 78] A figura abaixo representa um eixo com parte em balanço, apoiado nos mancais O e B e carregado com forças em A e C. Determinar o valor e a localização da tensão normal máxima, sabendo que o eixo tem diâmetro constante de 15 [mm].

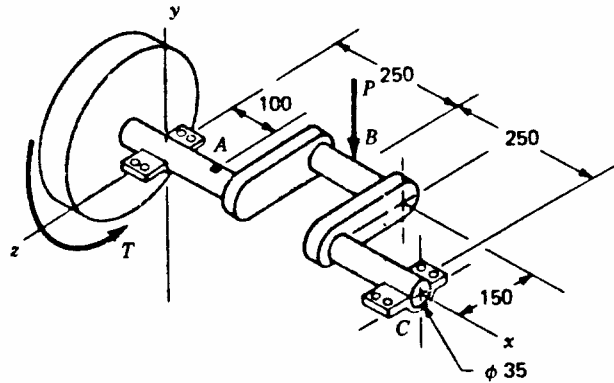


8) [2, pág. 82] Determine as tensões nos pontos A e B da viga engastada mostrada na figura abaixo. O elemento de tensão que contém o ponto A fica na parte superior da superfície da viga e é paralelo ao plano xz. O elemento de tensão que contém o ponto B, fica na lateral da superfície da viga e é paralelo ao plano xy. O carregamento consiste das forças $F = 0,55$ [kN] e $P = 8$ [kN], e do torque (momento de torção) $T = 30$ [N.m]. Desenhar ambos os elementos de tensão, identificando os eixos e as tensões com suas intensidades e direções adequadas.

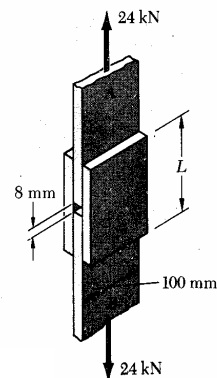


9) [2, pág. 82] A figura abaixo mostra a árvore de manivelas e o volante de um compressor de ar monocilíndrico. Durante o funcionamento, usa-se parte da potência acumulada no volante para se obter parte da força P do pistão. Neste problema, deve-se considerar que a força total P do pistão resulta do torque de $T = 600$ [N.m] transmitido à árvore de manivelas pelo volante. No ponto A, situado a 100 [mm] do mancal da esquerda e na parte superior da superfície da árvore, localiza-se um elemento de tensão com os lados paralelos aos eixos x e z .

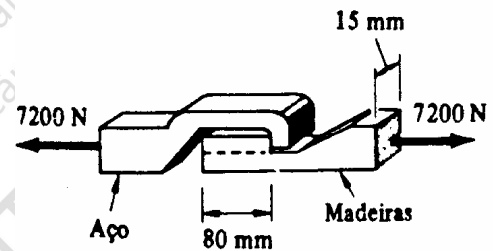
- Calcular as tensões que atuam no elemento A;
- Determinar as tensões principais e suas direções para o elemento acima considerado;
- Fazer um esboço do elemento de tensão principal, orientando-o corretamente em relação aos eixos x e z e identificando as tensões e os ângulos;
- Esboçar outro elemento de tensão orientado corretamente, para mostrar a tensão de cisalhamento máxima e as tensões normais correspondentes, identificando seus ângulos.



10) [1, pág19] As peças de madeira A e B são ligadas por sobrejuntas de madeira que são coladas nas superfícies de contato com as peças. Deixa-se uma folga de 8 [mm] entre as extremidades das peças A e B. Determine o valor do comprimento L para que a tensão média de cisalhamento na superfície colada seja de 800 [kPa].

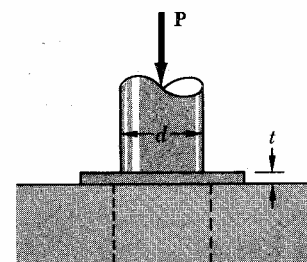


11) [1, pág19] Ao se aplicar a força indicada, a peça de madeira rompeu-se por cisalhamento ao longo da superfície indicada pela linha tracejada. Determine a tensão média de cisalhamento na superfície de ruptura.



12) [1, pág19] Sabendo-se que a tensão de ruptura ao cisalhamento de uma chapa de aço é 330 [MPa], determine:

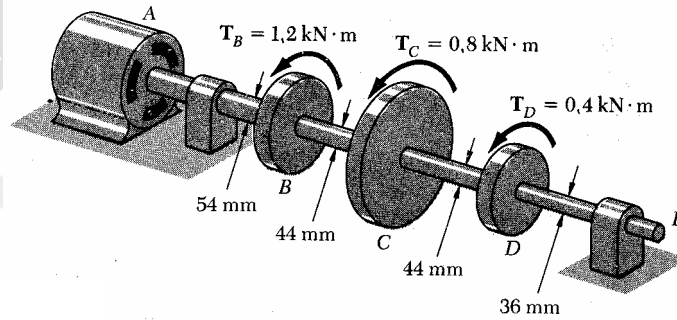
- A força P necessária para produzir, por punção, um furo de 30 [mm] de diâmetro em uma chapa de 9 [mm] de espessura;
- O valor da correspondente tensão normal no punção.



13) Determine o momento de torção que pode ser aplicado a um eixo maciço de 80 [mm] de diâmetro sem exceder a tensão de cisalhamento admissível de 60 [MPa]. Resolva novamente adotando um eixo vazado de mesma massa e 80 [mm] de diâmetro interno.

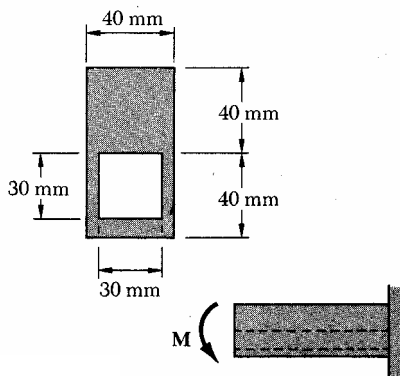
14) [1, pág127] Sob condições normais de funcionamento, o motor elétrico da figura produz o torque de 2,4 [kNm]. Sabendo-se que todos os segmentos do eixo são maciços, determinar a máxima tensão de cisalhamento:

- No segmento AB do eixo;
- No segmento BC do eixo.

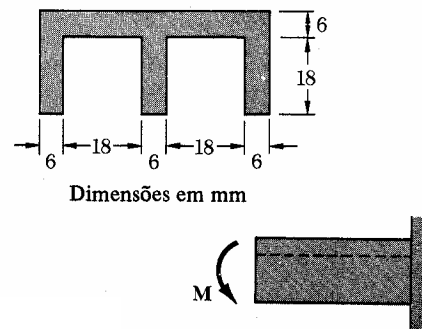


15) [1, pág195] Determine o valor do momento máximo de flexão M que pode ser aplicado às vigas de seção indicada, se a tensão admissível à tração é de 120 [MPa] e a tensão admissível à compressão é de 150 [MPa].

a)

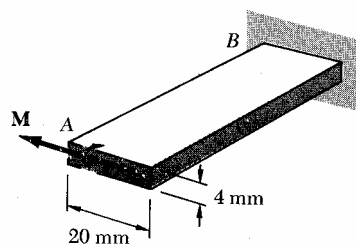


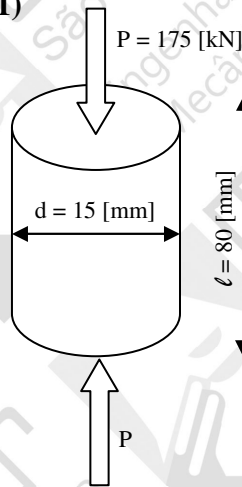
b)



16) [1, pág195] Sabe-se que, para a haste AB, a máxima tensão admissível é de 170 [MPa]. Determine:

- O máximo momento de flexão M que pode ser aplicado à haste;
- O raio de curvatura da haste fletida por esse momento, sendo o módulo de elasticidade do material $E = 200$ [GPa].



Resolução da lista 2**Exercício 1)**

a) A tensão de compressão é dada por:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi d^2 / 4} = \frac{-175000}{\pi (15)^2 / 4} = -990,297 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

ou seja,

$$\sigma = -99,0297 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2} \right]$$

Resta agora um problema de unidades:

$$1 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2} \right] = \left[\frac{10 \text{ N}}{(10^{-3} \text{ m})^2} \right] = 10 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = 10 \text{ [MPa]}$$

$$\Rightarrow \sigma = -990,297 \text{ [MPa]}$$

b) O valor de ε_l , deformação ou também chamado de alongamento específico, é:

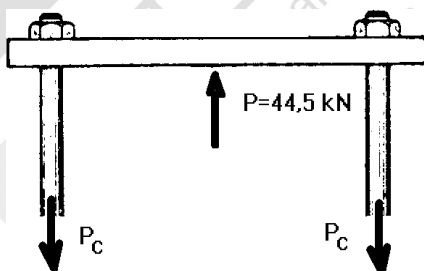
$$\sigma = E \varepsilon_l \Rightarrow \varepsilon_l = \frac{\sigma}{E} = \frac{-990,297 \text{ [MPa]}}{2,10 \times 10^5 \text{ [MPa]}} = -4,716 \times 10^{-3} [-]$$

sem unidades e negativo, porque $l_f < l_0$ (compressão).c) O deslocamento Δl neste caso é calculado assim:

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = -4,716 \times 10^{-3} \times 80 \text{ [mm]} = -0,377 \text{ [mm]}$$

d) Por definição, o coeficiente de Poisson é:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_l} = -\frac{\Delta d / d}{\Delta l / l} = -\frac{\Delta d \cdot l}{d \cdot \Delta l} \Rightarrow \Delta d = -\frac{\nu \cdot d \cdot \Delta l}{l} = -\frac{0,3 \times 15 \times (-0,377)}{80} = 0,021 \text{ [mm]}$$

Exercício 2)

a) Equação de equilíbrio das forças verticais

$$P = P_{d1} + P_{d2} \Rightarrow P = 2 \cdot P_c \quad \text{ou} \quad P_c = \frac{P}{2}$$

$$P_c = \frac{44500}{2} = 22250 \text{ [N]}$$

Para o máximo deslocamento, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \ell = 0,400 \text{ [mm]} \\ \varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{0,400 \text{ [mm]}}{900 \text{ [mm]}} = 4,44 \times 10^{-4} [-] \end{array} \right.$$

Então se acha a área mínima para garantir esta deformação máxima:

$$\sigma = \frac{P}{A} = E \cdot \varepsilon \Rightarrow A = \frac{P}{\varepsilon \cdot E} = \frac{22250 \text{ [N]}}{4,44 \times 10^{-4} \times 210 \times 10^9 \text{ [Pa]}} = 2,386 \times 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

ou o diâmetro de:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0,0174 \text{ [m]}$$

b) Neste caso, fazendo a verificação quanto à tensão,

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{22250 \text{ [N]}}{\frac{\pi \times 17,4^2 \times 10^{-6}}{4} \text{ [m}^2\text{]}} = 93,571 \text{ [MPa]}$$

Como $\sigma_{\max} = 140 \text{ [MPa]}$ tem-se o coeficiente de segurança

$$S = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} = \frac{140}{93,571} = 1,5 \text{ portanto as colunas oferecem segurança quanto à tensão, pois } S > 1, \text{ ou seja, as colunas estão superdimensionadas.}$$

Esta é uma situação bastante comum, ou seja, a peça foi dimensionada quanto à deformação e resultou superdimensionada quanto à tensão. Eventualmente essa situação pode se inverter.

Fazendo-se agora o dimensionamento quanto à tensão:

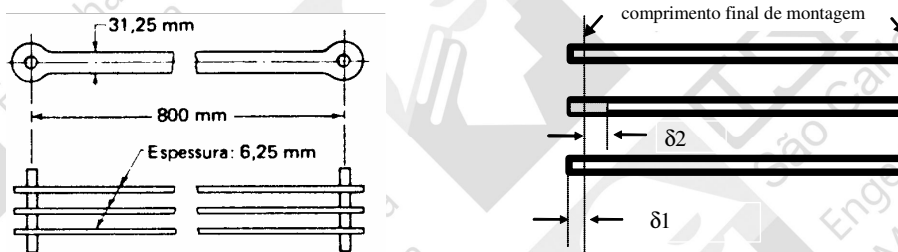
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A_{\min}} \Rightarrow A_{\min} = \frac{22250 \text{ [N]}}{140 \times 10^6 \text{ [Pa]}} = 158,93 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{4A_{\min}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 158,93 \times 10^{-6}}{\pi}} = 0,0142 \text{ [m]}$$

Se for adotado o d_{\min} otimiza-se a tensão, porém se ultrapassa o deslocamento máximo permitido.

Exercício 3)

A situação após a montagem é:



A tala interna alonga-se δ_2 e as duas externas contraem-se δ_1 . A rigor tem-se $\delta_1 < 0$ (compressão), porém tomando seu valor em módulo, a equação que exprime a compatibilidade geométrica é:

$$800,000 - \delta_1 = 799,925 + \delta_2 \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = 0,075 \text{ [mm]} \quad (1)$$

O equilíbrio das forças dá:

$$F_2 = F_1 + F_3 \Rightarrow F_2 = 2.F_1 \quad (2)$$

Por outro lado, sabe-se que:

$l_2 \cong l_1 = l_3 = l$ $A_1 = A_2 = A_3 = A$ e também $E_1 = E_2 = E_3 = E$,
as peças tem a mesma secção transversal e são feitas do mesmo material.

Tem-se ainda:

$$\sigma = E.\varepsilon \Rightarrow \sigma_1 = \frac{F_1}{A} = E.\frac{\delta_1}{\ell} \quad (3) \quad e \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A} = E.\frac{\delta_2}{\ell} \quad (4)$$

Portanto, tem-se 4 equações e 4 incógnitas. Fazendo-se (4) \div (3),

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

e juntando-se com (2) vem :

$$\delta_2 = 2.\delta_1$$

Combinando-se agora com (1) vem:

$$\delta_1 + 2.\delta_1 = 0,075 \Rightarrow \delta_1 = \delta_3 = 0,025 \text{ [mm]} \quad e \quad \delta_2 = 0,050 \text{ [mm]}$$

As tensões agora serão:

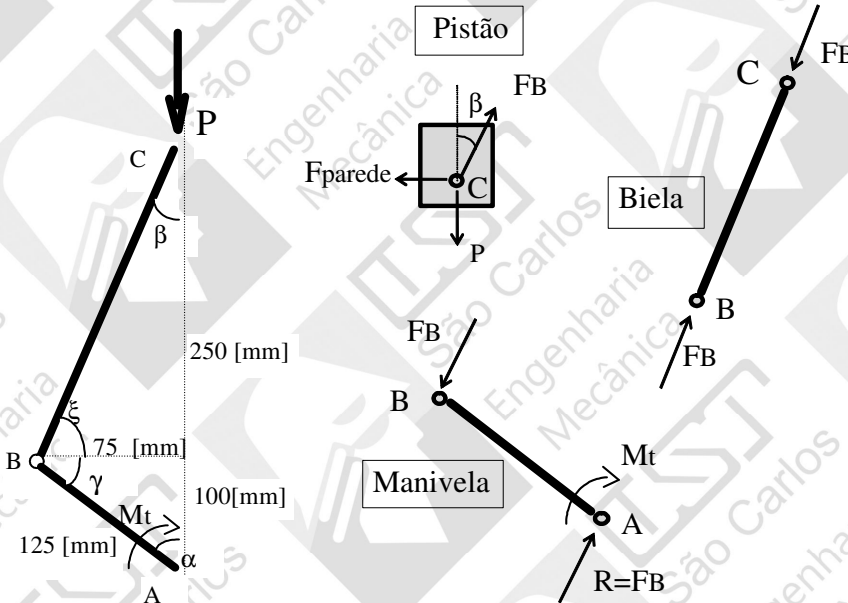
$$\sigma_2 = E.\varepsilon_2 = 2,10 \times 10^5 \text{ [MPa]} \cdot \frac{0,050}{799,925} = 13,126 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 = E.\varepsilon_1 = 2,10 \times 10^5 \text{ [MPa]} \cdot \frac{(-0,025)}{800} = -6,562 \text{ [MPa]} \text{ (compressão)}$$

Exercício 4)

O Momento de torção, M_t , transmite a força tangencial, F_t . A partir da geometria da configuração do conjunto vem:

a) A força P é calculada da seguinte forma:



$$M_t = F_t \cdot R \Rightarrow F_t = \frac{M_t}{R} = \frac{1500 \text{ [N.m]}}{0,125 \text{ [m]}} = 12000 \text{ [N]}$$

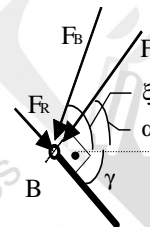
$$\alpha = \arctg \frac{75}{100} = 36,87^\circ \Rightarrow \gamma = 53,13^\circ$$

$$\beta = \arctg \frac{75}{250} = 16,70^\circ \Rightarrow \xi = 73,30^\circ$$

A força da biela F_B aplicada na manivela pode ser direções tangencial e radial da manivela, conforme figura

$$F_t = F_B \cdot \cos(\xi - \alpha) \Rightarrow$$

$$F_B = \frac{F_t}{\cos(\xi - \alpha)} = \frac{12000}{\cos(36,43^\circ)} = 14914,6 \text{ [N]}$$



decomposta nas
abaixo:

O equilíbrio no ponto C dá:

$$P = F_B \cdot \cos \beta = 14914,6 \cdot \cos(16,70^\circ) = 14285,5 \text{ [N]}$$

Este é o valor da força vertical (P) que equilibra o sistema.

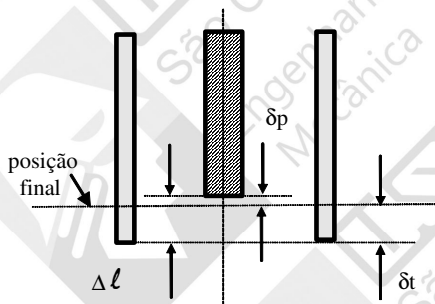
b) A tensão normal na biela é dada por:

$$\sigma = \frac{F_B}{A} = \frac{14914,6 \text{ [N]}}{470 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]}} = 31,73 \text{ [MPa]}$$

Exercício 5)

Depois do aperto adicional, o parafuso será tracionado e o tubo será comprimido.

$$\text{Aperto de } \frac{1}{3} \text{ volta} \Rightarrow \Delta \ell = \frac{2,5}{3} = 0,833 \text{ [mm]}$$



A equação de compatibilidade geométrica, conforme a figura, é:

$$350 - 0,833 + \delta_p = 350 - \delta_t \Rightarrow \delta_t + \delta_p = 0,833 \text{ [mm]} \quad (1)$$

A equação de equilíbrio de forças é:

$$F_t = F_p \quad (2)$$

Segundo a Teoria da Elasticidade:

$$\sigma_p = E_{aco} \cdot \varepsilon_p, \text{ portanto, } \sigma_p = \frac{F_p}{A_p} = E_{aco} \cdot \frac{\delta_p}{\ell} \quad (3)$$

e também :

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A_t} = E_{aluminio} \cdot \frac{\delta_t}{\ell} \quad (4)$$

Dividindo-se a equação (3) pela equação (4) e considerando-se a equação (2):

$$\frac{A_t}{A_p} = \frac{E_{aco}}{E_{al}} \cdot \frac{\delta_p}{\delta_t} \Rightarrow \frac{\delta_p}{\delta_t} = \frac{A_t \cdot E_{al}}{A_p \cdot E_{aco}}$$

As áreas das seções são as seguintes:

$$A_t = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi \times (0,04^2 - 0,022^2)}{4} = 8,76 \times 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_p = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 0,02^2}{4} = 3,14 \times 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

Substituindo-se na equação anterior:

$$\frac{\delta_p}{\delta_t} = \frac{A_t \cdot E_{al}}{A_p \cdot E_{aco}} = \frac{8,76 \times 10^{-4} \times 7,1 \times 10^4 \text{ [MPa]}}{3,14 \times 10^{-4} \times 2,07 \times 10^5 \text{ [MPa]}} = 0,9564$$

Substituindo-se na Equação (1):

$$\delta_i + 0,9564 \cdot \delta_i = 0,833 \Rightarrow \begin{cases} \delta_i = 0,4259 \text{ [mm]} \\ \delta_p = 0,4074 \text{ [mm]} \end{cases}$$

$$L_{final} = 350 - \delta_i = 349,5741 \text{ [mm]}$$

Com os valores de δ calculam-se as tensões:

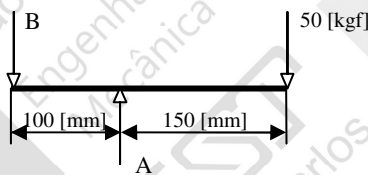
$$\sigma_p = 2,07 \times 10^5 \text{ [MPa]} \times \frac{0,4074 \text{ [mm]}}{350 \text{ [mm]}} = 240,94 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_i = 7,10 \times 10^4 \text{ [MPa]} \times \frac{0,4259 \text{ [mm]}}{350 \text{ [mm]}} = 86,39 \text{ [MPa]}$$

Exercício 6)

Estes exercícios seguem sempre a mesma rotina. Escrevem-se as equações de equilíbrio que são a seguir resolvidas para serem obtidas as reações dos apoios. Uma vez que estas são calculadas, passa-se à determinação dos diagramas de força cortante e momentos de flexão e de torção.

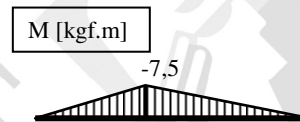
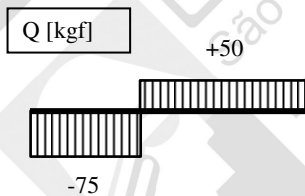
a) i) Cálculo das reações:



$$\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A = B + 50 \\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 100 \times B = 50 \times 150 \end{cases}$$

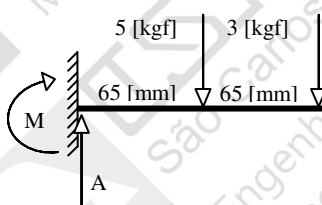
$$\Rightarrow B = 75 \text{ [kgf]} \quad A = 125 \text{ [kgf]}$$

ii) Diagramas



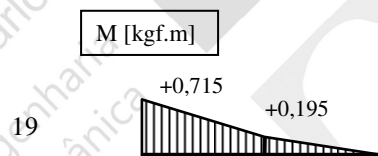
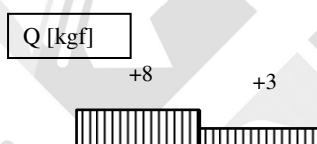
De acordo com as regras de convenção de sinal, no diagrama de força cortante, considera-se positiva a força que provoca um binário no sentido horário e, também por convenção, os valores positivos são desenhados acima da linha elástica. Já no diagrama de momento de flexão convencionam-se como positivo o momento que provoca tração nas fibras abaixo da linha elástica e, também por convenção, o desenho se faz sempre no lado tracionado da peça.

b) i) Cálculo das reações:

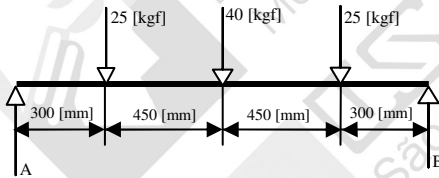


$$\begin{cases} A = 5 + 3 = 8 \text{ [kgf]} \\ M = 5 \times 65 + 3 \times 130 = 715 \text{ [kgf.mm]} \\ M = 0,715 \text{ [kgf.m]} \end{cases}$$

ii) Diagramas

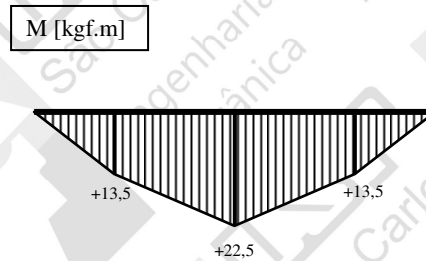
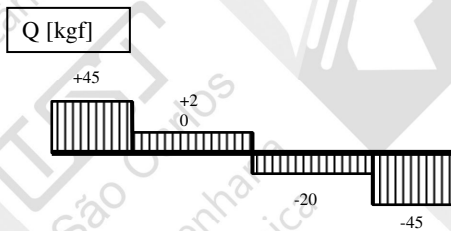


c) i) Cálculo das reações:

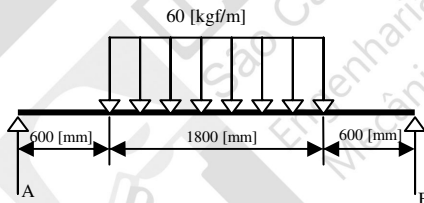


$$\begin{cases} A + B = 25 + 40 + 25 = 90 \text{ [kgf]} \\ B \times 1500 = 300 \times 25 + 750 \times 40 + 1250 \times 25 \\ B = 45 \text{ [kgf]} \quad A = 45 \text{ [kgf]} \end{cases}$$

ii) Diagramas

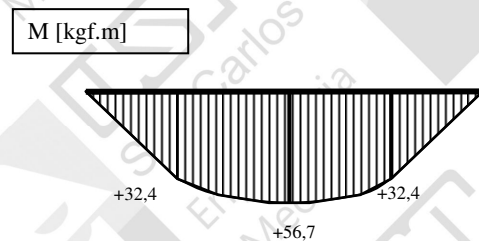
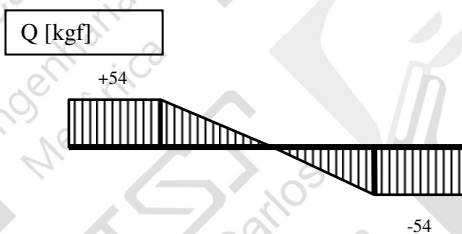


d) i) Cálculo das reações:



$$\begin{cases} A + B = 60 \times 1,8 \\ B \times 3,0 = (60 \times 1,8) \times (0,6 + 0,9) \\ B = 54,0 \text{ [kgf]} \quad A = 54,0 \text{ [kgf]} \end{cases}$$

ii) Diagramas



O cálculo do momento de flexão máximo é dado por:

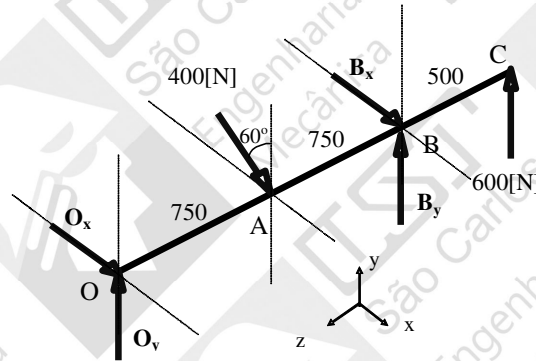
$$M_{f_{\max}} = 54 \times 1,5 - (60 \times 0,9) \times 0,45$$

$$M_{f_{\max}} = 56,7 \text{ [kgf.m]}$$

Exercício 7)

Cálculo das reações nos mancais:

Como os sentidos das forças não são conhecidos, adotam-se o sentido positivo dos eixos para cada uma das forças. A força que resultar em valor negativo, indica que o sentido adotado é contrário ao correto.

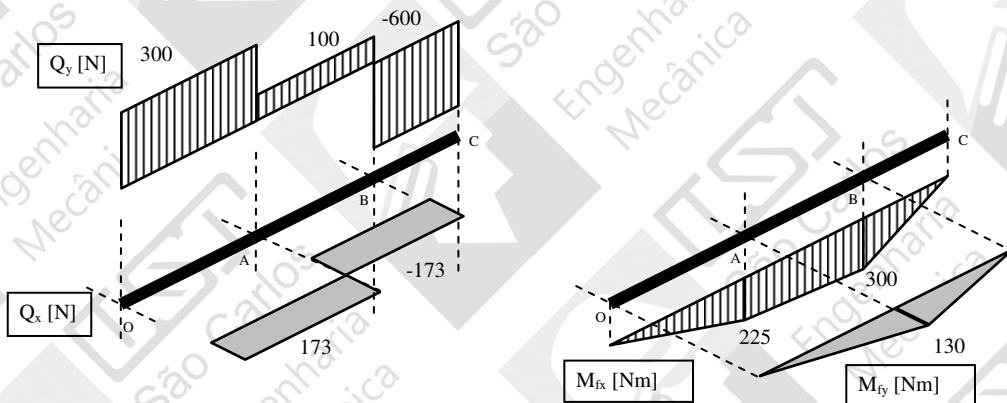


$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow O_x + 400 \times \text{sen}(60^\circ) + B_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow O_y - 400 \times \text{cos}(60^\circ) + B_y + 600 = 0 \\ \Sigma M_x^O = 0 \Rightarrow 400 \times \text{cos}(60^\circ) \times 0,750 - B_y \times 1,500 - 600 \times 2,000 = 0 \\ \Sigma M_y^O = 0 \Rightarrow 400 \times \text{sen}(60^\circ) \times 0,750 + B_x \times 1,500 = 0 \end{cases}$$

A solução destas equações resulta em:

$$B_x = -173,20 \text{ [N]} \quad B_y = -700 \text{ [N]} \quad O_y = 300 \text{ [N]} \quad O_x = -173,20 \text{ [N]}$$

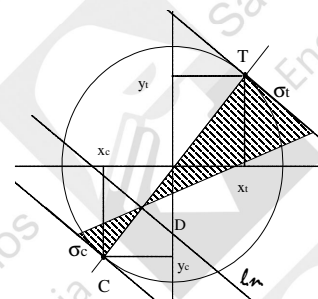
Neste caso, têm-se esforços em dois planos (horizontal e vertical, ou xz e yz), portanto ter-se-ão dois diagramas de força cortante (Q_x e Q_y) e dois diagramas de momento de flexão (M_{fy} e M_{fx}). Não se tem esforços normais P_z .



No caso mais geral a tensão normal tem contribuição do esforço normal e dos momentos de flexão. Ela é

dada por:
$$\sigma_N = \frac{P_z}{A} + \frac{M_{fx}}{J_x} \cdot y + \frac{M_{fy}}{J_y} \cdot x$$

e a equação da linha neutra é dada por:



$$y = - \left(\frac{M_{f_y} \cdot J_x}{M_{f_x} \cdot J_y} \right) x - \frac{P_z \cdot J_x}{A \cdot M_{f_x}}$$

O termo $-\left(\frac{M_{f_y} \cdot J_x}{M_{f_x} \cdot J_y}\right)$ representa a inclinação da linha neutra

e o termo $-\frac{P_z \cdot J_x}{A \cdot M_{f_x}}$ é a posição da linha neutra na direção y quando a coordenada x é nula (D),

mostrada na figura. No ponto T tem-se a maior tensão de tração (σ_T) e no ponto C a maior tensão de compressão (σ_C). No caso de seção circular, $J_x = J_y = J$, e estes pontos têm coordenadas:

$$x_{T,C} = \pm \frac{M_{f_y}}{\sqrt{M_{f_x}^2 + M_{f_y}^2}} \cdot r, \quad \text{e} \quad y_{T,C} = \pm \frac{M_{f_x}}{\sqrt{M_{f_x}^2 + M_{f_y}^2}} \cdot r$$

Os pontos de máxima tração e de máxima compressão podem ser ligados por uma linha que é perpendicular à linha neutra e passa pelo CG.

No caso particular deste exercício, também se tem, $P_z = 0$, o que implica que a linha neutra passa pelo CG e, portanto, os valores de tensão σ_T e σ_C são iguais em módulo.

Substituindo na equação da tensão normal para o caso geral tem-se:

$$\sigma_{N,T} = \frac{r}{J} \cdot M_R \quad \text{e} \quad \sigma_{N,C} = -\frac{r}{J} \cdot M_R, \quad \text{onde}$$

$$M_R = \sqrt{M_{f_x}^2 + M_{f_y}^2}$$

Se não existir força normal, a tensão normal é totalmente devida à flexão. M_R é obtido ao projetarem-se os momentos de flexão no plano formado pelo eixo z e pela linha neutra. No plano formado pelo eixo z e pela linha que une os pontos C e T o momento de flexão projetado será nulo. Deve-se observar que a análise realizada acima vale para uma seção transversal qualquer do eixo. Para o cálculo da máxima tensão normal atuando sobre o eixo é necessária a determinação da posição, ao longo do eixo, onde ocorre o maior valor de M_R .

Voltando ao exercício proposto, na seção que passa pelo ponto A tem-se:

$$M_{R_A} = \sqrt{M_{f_x}^2 + M_{f_y}^2} = 259,25 \text{ [N.mm]}$$

E em B tem-se: $M_{R_B} = M_{f_x} = 300 \text{ [N.mm]}$

Desta forma, a máxima tensão ocorrerá na seção B e seus valores serão:

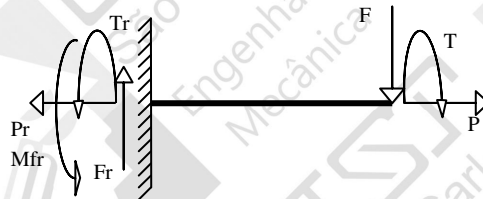
$$\sigma_t = \frac{d \times 64}{2 \times \pi \times d^4} \cdot M_R = \frac{32 \times 300}{\pi \times (15 \cdot 10^{-3})^3} = 905,41 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_c = -905,41 \text{ [MPa]}$$

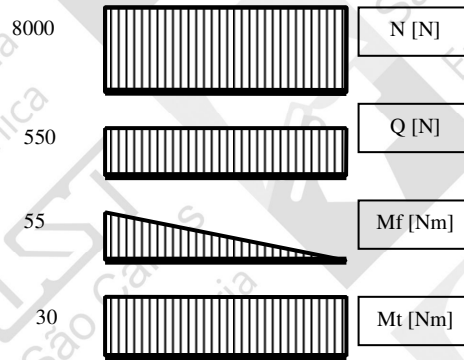
É interessante notar que no ponto B, como $M_{f_y} = 0$, tem-se $x_T = x_C = 0$

Exercício 8)

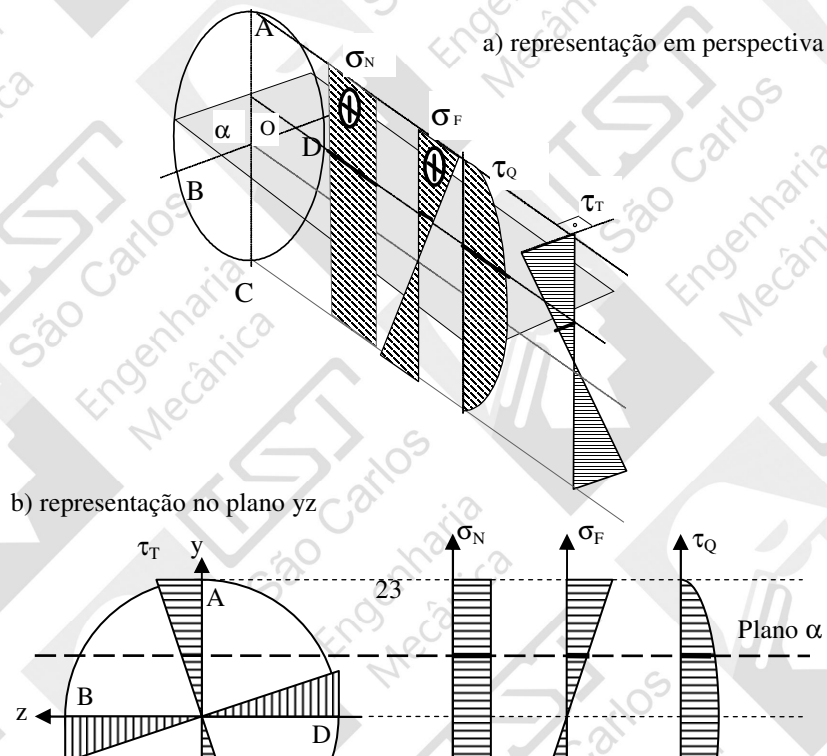
As reações de apoio no engastamento são mostradas na figura abaixo. Além dos esforços contrários àqueles aplicados, existe também um momento de flexão de reação no engastamento.



Os diagramas dos esforços solicitantes são bastante simples e podem ser vistos abaixo.



A secção do eixo próxima ao engastamento contém os pontos A e B. Os diagramas de distribuição de tensões são mostrados abaixo em duas representações distintas. Tem-se a tensão normal σ_N devida à força normal P, tensão normal σ_F devida à flexão causada pela força cortante F, a tensão tangencial τ_Q também é devida à cortante F e a tensão tangencial τ_T devida ao momento de torção T. Ao combinarem-se os efeitos de σ_N e σ_F ter-se-á a L.N. passando abaixo do CG. No plano horizontal genérico α , as tensões atuantes estão destacadas nas duas figuras.

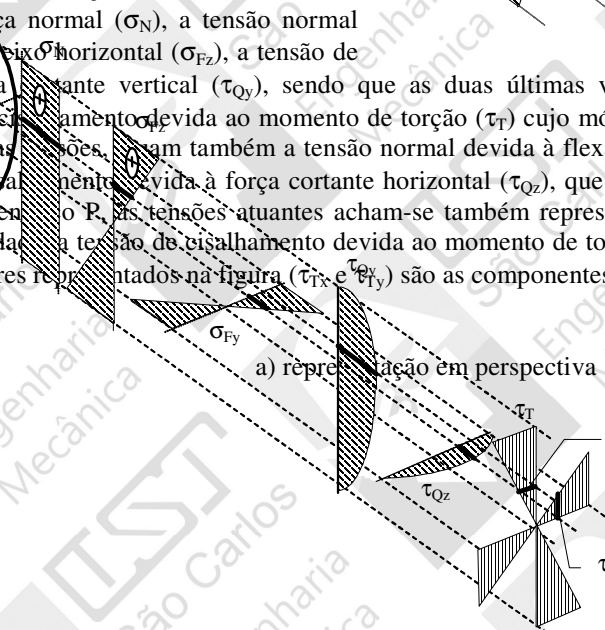
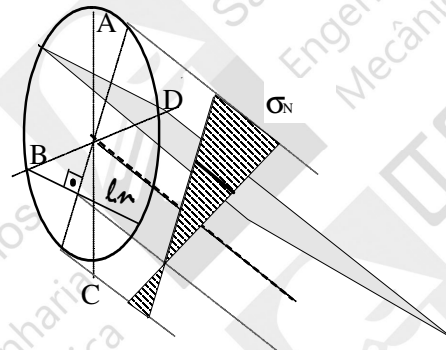


Os valores máximos destas tensões são:

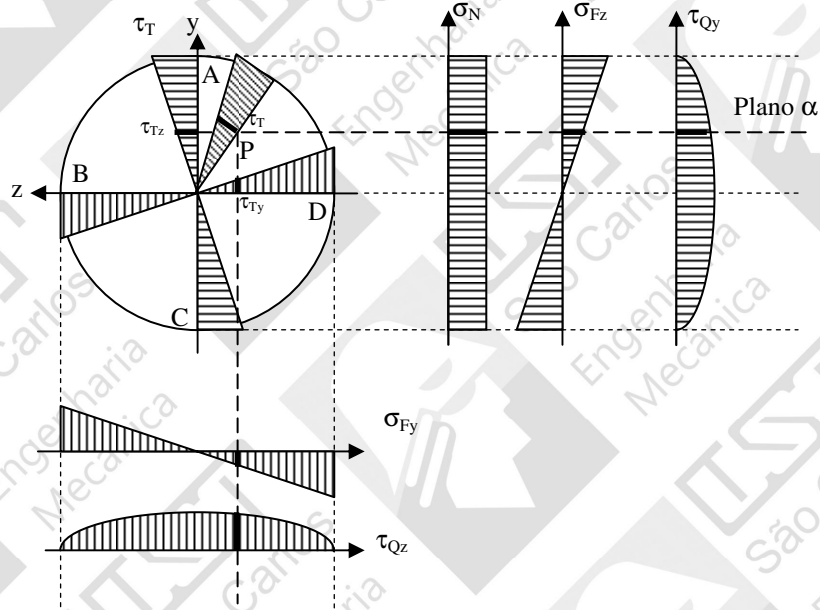
$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_N &= \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{8000 \text{ [N]}}{\frac{\pi \times 0,02^2}{4} \text{ [m}^2\text{]}} = 25,46 \text{ [MPa]} \\ \sigma_f &= \frac{M_f}{W_f} = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{55 \text{ [N.m]}}{\frac{\pi \times 0,02^3}{32} \text{ [m}^3\text{]}} = 70,03 \text{ [MPa]} \\ \tau_t &= \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{30 \text{ [N.m]}}{\frac{\pi \times 0,02^3}{16} \text{ [m}^3\text{]}} = 19,10 \text{ [MPa]} \\ \tau_q &= \frac{4.Q}{3.A} = \frac{4 \times 550 \text{ [N]}}{3 \times \pi \times 0,02^2 \text{ [m}^2\text{]}} = 23,34 \text{ [kPa]} \end{aligned} \right.$$

Na figura à direita está representada a situação mais geral de solicitações normais, (**não é o caso deste exercício**) em que também existe um momento de flexão horizontal. A tensão normal causada pela força normal combina-se com a causada pelos dois momentos de flexão (horizontal e vertical). O resultado é a tensão σ_N .

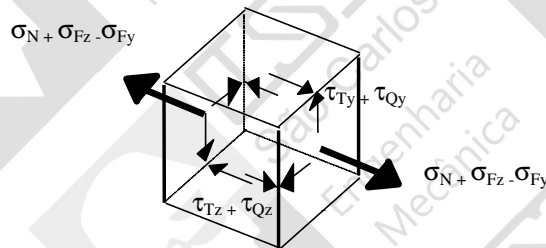
Um caso ainda mais geral é visto nas figuras a seguir, tanto em perspectiva quanto no plano yz, na qual, sobre a seção transversal estão aplicadas tensões normais e tangenciais simultaneamente. Na seção transversal atuam a tensão normal devida à força normal (σ_N), a tensão normal devida à flexão em torno do eixo horizontal (σ_{Fz}), a tensão de cisalhamento devida à força cortante vertical (τ_{Qy}), sendo que as duas últimas variam ao longo da coordenada y, e a tensão de cisalhamento devida ao momento de torção (τ_T) cujo módulo varia ao longo do raio da seção. Além dessas tensões, existem também a tensão normal devida à flexão em torno do eixo vertical (σ_{Fy}), a tensão de cisalhamento devida à força cortante horizontal (τ_{Qz}), que variam ao longo da coordenada z. Num ponto genérico P, as tensões atuantes acham-se também representadas pelas linhas grossas nas figuras. Na realidade, a tensão de cisalhamento devida ao momento de torção atua na direção tangente ao raio OP. Os valores representados na figura (τ_{Tx} e τ_{Ty}) são as componentes dessa tensão.



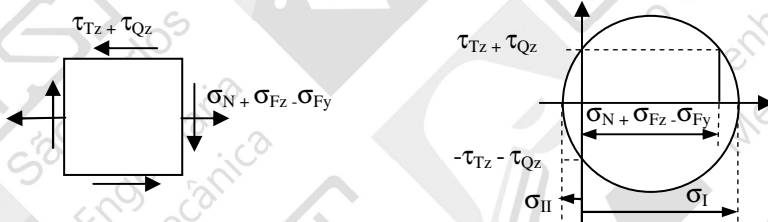
b) representação no plano yz



Tomando-se um elemento tridimensional de tensão localizado no ponto P e alinhado com os eixos x, y e z, tem-se a situação do cubo infinitesimal da figura abaixo.



Para a face superior, neste caso tem-se o seguinte círculo de Mohr.

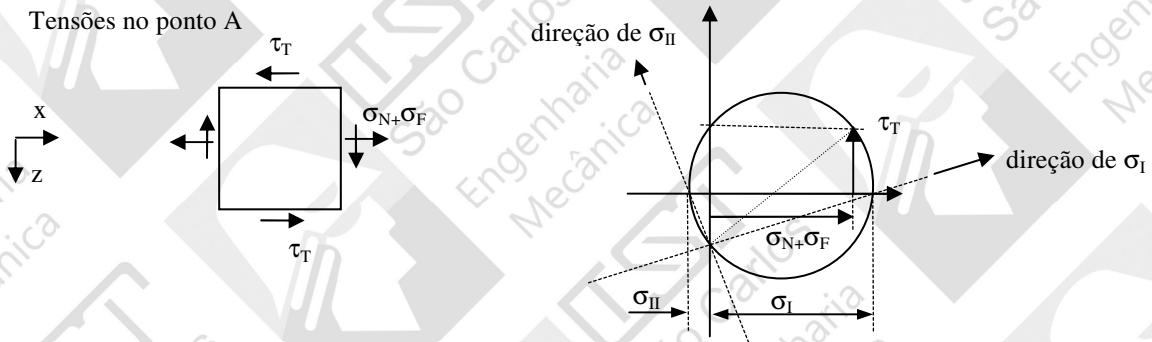


É importante ressaltar que os valores de tensão principais σ_I e σ_{II} , mostrados na figura, são válidos somente para a face superior. Eles atuam em direções tais, que a tensão de cisalhamento é nula na face. As tensões principais no ponto P podem ser encontradas a partir das raízes de uma equação cúbica (veja

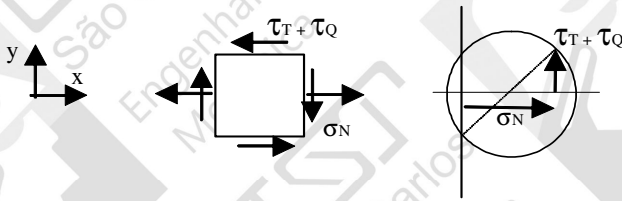
equação 2.10, pg. 28, [2]). Em um caso genérico, elas não estarão alinhadas com nenhuma das faces e, portanto as tensões σ_I e σ_{II} , mostradas acima, não serão tensões principais do centro do elemento tridimensional. É oportuno observar que os principais critérios de resistência para engenharia mecânica (Tresca e Von Mises) têm como tensão equivalente uma composição adequada das tensões principais, daí a importância da sua determinação. A falha e a propagação da trinca ocorrem em direções referidas às direções principais segundo a teoria de mecânica da fratura adotada.

Voltando ao presente exercício, ao tomar-se uma porção de material próximo ao ponto A teremos a situação da figura abaixo.

Tensões no ponto A



No ponto B, temos as seguintes tensões atuando.



Exercício 9)

Cálculo das reações:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow 600 - P \times 0,15 = 0$$

$$P \times 0,15 = 600$$

$$P = 4000 \text{ [N]}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum F_y = 0 \Rightarrow C + D - 4000 = 0 \\ \sum M_z^D = 0 \Rightarrow C \cdot 0,50 - 4000 \cdot 0,25 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow C = 2000 \text{ [N]} \quad D = 2000 \text{ [N]}$$

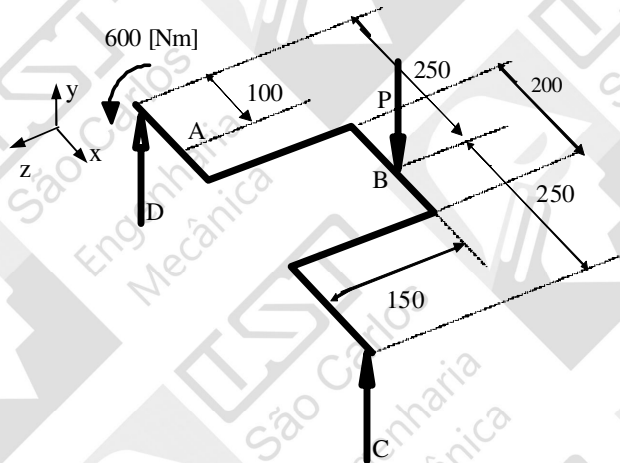
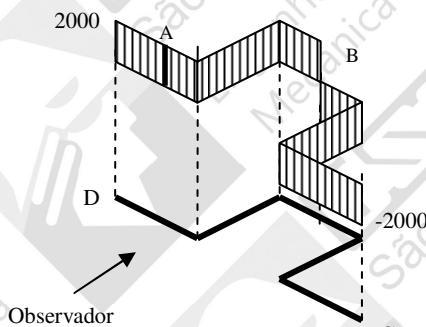
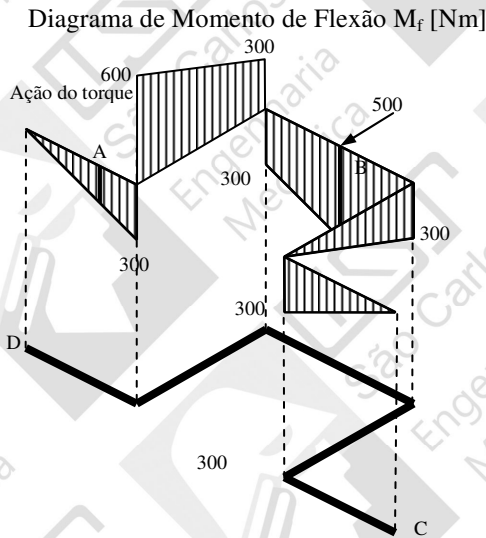


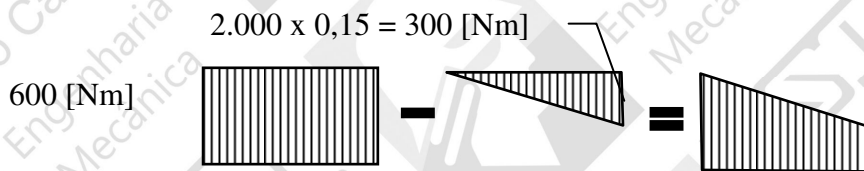
Diagrama de Força Cortante Q [N]



Os diagramas dos esforços solicitantes são os seguintes:
(Obs. O comprimento em x de 200 [mm] da manivela foi adotado)



ocasionando tração na fibra de baixo.

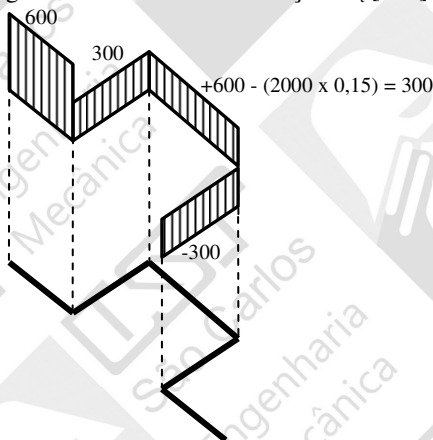


Note-se que, por convenção, desenha-se o gráfico do lado da tração (fibra tracionada).

Na região da manivela, onde está o ponto B, apenas a força de reação exerce influência. O gráfico parte de um valor $2.000 \times 0,15 = 300$ [Nm] até atingir $2.000 \times 0,25 = 500$ [Nm] no centro (ponto B).

Desde o ponto B até o ponto C, o diagrama de momento de flexão é simétrico ao trecho DB, com exceção da ação do torque.

Diagrama de Momento de Torção M_t [Nm]



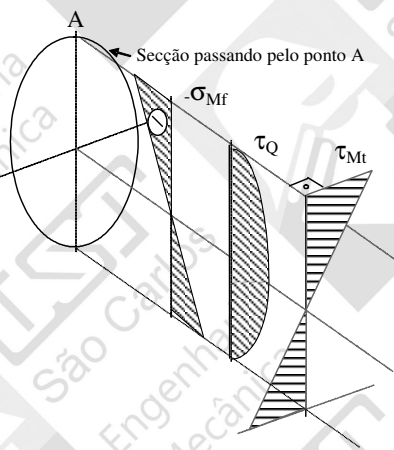
No terceiro trecho (o qual contém o ponto B), tem-se uma combinação do torque externo de 600 [Nm] e no sentido inverso a torção ocasionada por D ($2000 \times 0,15 = 300$ [Nm]), resultando 300 [Nm] no sentido positivo de acordo com a convenção.

A figura anterior à esquerda mostra o diagrama de força cortante. É importante notar que certas convenções usadas em casos simples para vigas, ficam ambíguas em estruturas 2D ou 3D. Para evitar confusão, é bom destacar na figura onde está o observador para, então, adotar o sentido como positivo quando o binário provocado pela cortante percorrer a seção no sentido horário. Em certos casos, a cortante pode ter 2 componentes.

Na figura anterior à direita, outra situação interessante acontece no gráfico do momento de flexão. Tem-se neste caso o momento de torção (torque) ocasionando uma flexão do braço da manivela conforme observado na figura. Nesse trecho atua uma parcela constante de 600 [Nm], devida ao torque, acarretando tração na fibra superior. Este momento de flexão é adicionado algebricamente a outro, variável linearmente, que é devido à ação da reação em D,

O penúltimo trecho apresenta uma peculiaridade. Caso se calcule o valor de M_f a partir da extremidade D, tem-se: $2.000 \times 0,35 - 4.000 \times 0,1 = +300$ [Nm]. Entretanto a convenção de sinal mostra que o sinal correto é negativo. O cálculo a partir do extremo C mostra mais claramente que o correto é mesmo -300 [Nm]. O último trecho tem $M_f = 0$.

a) Na figura abaixo são mostradas as tensões que atuam na seção transversal passando pelo ponto A.



$$\sigma_x = \sigma_{M_f} = \frac{M_f}{W_f} = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{-200 \text{ [N.m]}}{\frac{\pi \times 0,035^3}{32} \text{ [m}^3\text{]}} = -47,51 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{M_f} = \frac{M_f}{W_t} = \frac{T \cdot r}{J_T} = \frac{T \cdot r}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{600 \text{ [N.m]} \times 0,0175 \text{ [m]}}{\frac{\pi \times 0,035^4}{32} \text{ [m}^4\text{]}} = 71,27 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_Q = 0 \text{ (No ponto A)}$$

b) No caso deste exercício, não se tem tensão perpendicular ao plano do elemento de tensão em A. Isto caracteriza um estado plano de tensões. Portanto as tensões principais são dadas por:

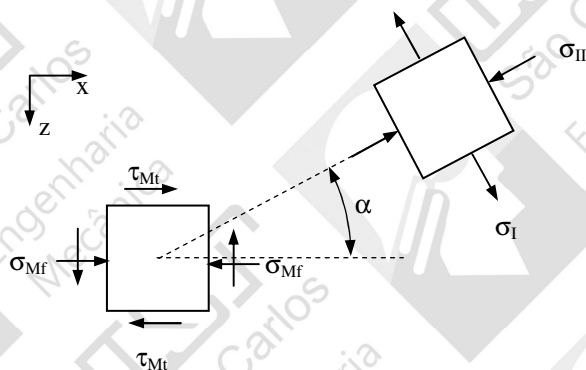
$$\sigma_y = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \quad \sigma_2 = \frac{-47,51}{2} \pm \sqrt{\frac{47,51^2}{4} + 71,27^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = +51,369 \text{ [MPa]} \\ \sigma_2 = -98,879 \text{ [MPa]} \end{cases}$$

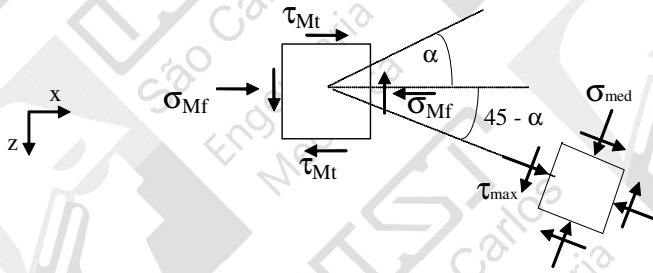
e o ângulo em que essas tensões atuam é dado por:

$$\operatorname{tg}(2 \cdot \alpha) = \frac{2\tau}{-\sigma} = \frac{2 \times 71,27}{-47,51} \Rightarrow \alpha = -35,78^\circ \text{ (anti-horário)}$$

c) O esboço do elemento posicionado nas direções principais pode ser visto na figura abaixo, juntamente com o elemento alinhado com os eixos.



d) Como se sabe, a máxima tensão de cisalhamento está a 45° dos eixos principais.



Exercício 10)

A tensão de cisalhamento (ou tangencial) média não deve ultrapassar 800 [kPa].

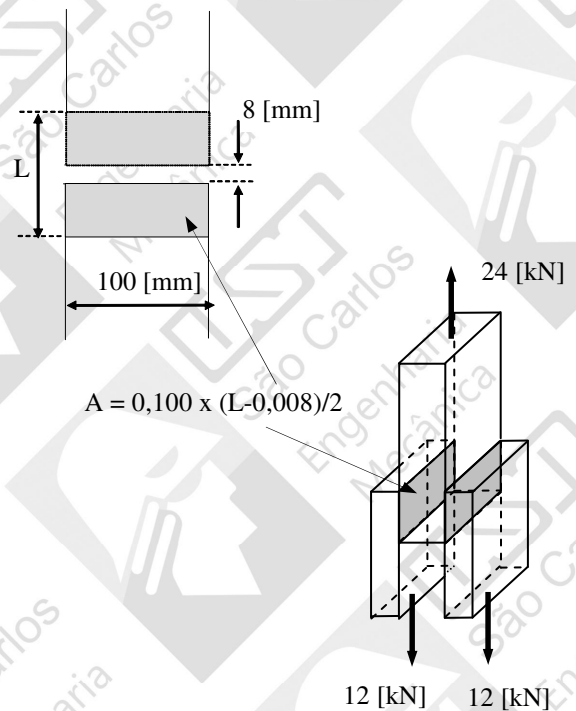
$$\tau_{med} = \frac{Q}{A} = 800 \text{ [kPa]}$$

A área onde atua esta tensão, de cada lado, é:

$$A = 0,100 \times \left(\frac{L - 0,008}{2} \right)$$

$$\tau_{med} = \frac{24000}{2 \times 0,100 \times \left(\frac{L - 0,008}{2} \right)} = 800000$$

$$\Rightarrow L = 0,308 \text{ [m]}$$

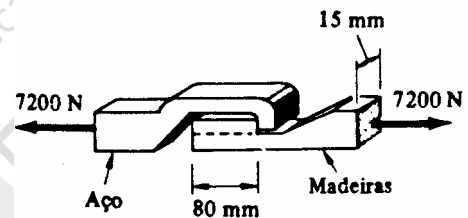


Exercício 11)

A tensão média de cisalhamento é dada por: $\tau_m = \frac{Q}{A}$

Tem-se, portanto todos os valores necessários para o cálculo:

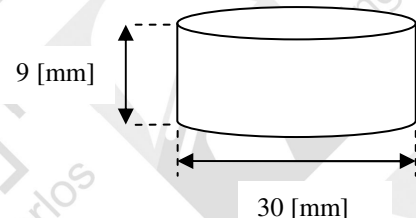
$$\tau_m = \frac{7200}{0,080 \times 0,015} = 6 \text{ [MPa]}$$



Exercício 12)

Novamente $\tau_m = \frac{Q}{A}$

a) A força necessária para romper a chapa por cisalhamento será:
cálculo da área onde atua a tensão de cisalhamento



$$A_s = 2\pi r e \Rightarrow 2 \times \pi \times 15 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{-3} \Rightarrow$$

$$A_s = 8,48 \times 10^{-4} [\text{m}^2]$$

cálculo da força

$$\tau_m = \frac{P}{A_s} \leq \tau_r = 330 \times 10^6 \Rightarrow \frac{P}{8,48 \times 10^{-4}} = 330 \times 10^6 \Rightarrow P = 279916 [\text{N}]$$

b) A tensão normal no punção será:

$$\sigma = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{279916}{\frac{\pi \times 0,03^2}{4}} = 396 [\text{MPa}]$$

Exercício 13)

O momento máximo é dado pela expressão abaixo:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{W_t} \Rightarrow M_{m\acute{a}x} = \tau_{m\acute{a}x} \cdot W_t = 60 \times 10^6 [\text{Pa}] \cdot \frac{\pi \times 0,08^3}{16} [\text{m}^3]$$

$$M_{m\acute{a}x} = 6031,9 [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Caso se adote agora um eixo de mesma massa e 80 [mm] de diâmetro interno, o diâmetro externo deverá ser tal que conserve o mesmo volume (a densidade é a mesma em ambos os casos):

$$\frac{\pi d^2}{4} L = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) L \Rightarrow d^2 = D^2 - d^2 \Rightarrow D = \sqrt{2}d \Rightarrow D = 113,14 [\text{mm}]$$

O novo módulo de resistência à torção será:

$$W_t = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi \times (0,11314^4 - 0,08^4)}{16 \times 0,11314} = 2,13 \times 10^{-4} [\text{m}^3]$$

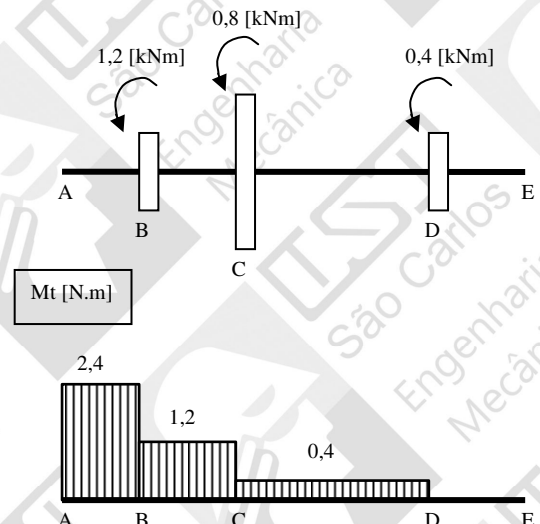
$$\Rightarrow M_{m\acute{a}x} = W_t \cdot \tau_{m\acute{a}x} = 2,13 \times 10^{-4} \times 60 \times 10^6 = 12797 [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Exercício 14)

a) A máxima tensão de cisalhamento no trecho AB será

$$\tau_{AB} = \frac{T_{AB}}{W_t} = \frac{2400}{\frac{\pi \times (0,054)^3}{16}} = 77,62 [\text{MPa}]$$

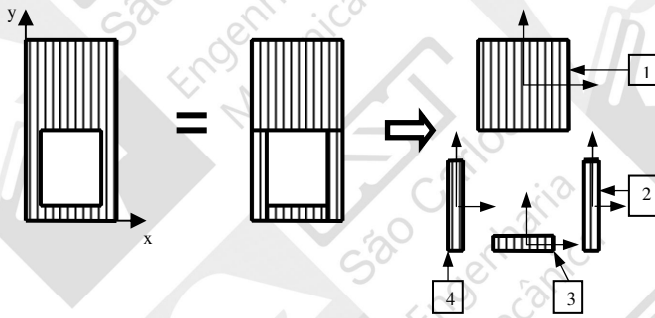
b) No trecho BC, tem-se:



$$\tau_{BC} = \frac{T_{BC}}{W_t} = \frac{1200}{\frac{\pi \times (0,044)^3}{16}} = 71,75 \text{ [MPa]}$$

Exercício 15

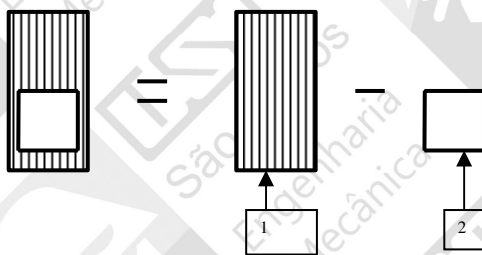
- a) Como não existe força normal, a linha neutra passa pelo CG da seção. Inicialmente se calcula o valor de suas coordenadas:



$\bar{x} = 20 \text{ [mm]}$ (por simetria)

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^4 y_i A_i}{\sum_{i=1}^4 A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = \frac{60 \times (40 \times 40) + 20 \times (5 \times 40) + 5 \times (30 \times 10) + 20 \times (5 \times 40)}{(40 \times 40) + (5 \times 40) + (10 \times 30) + (5 \times 40)}$$

$\bar{y} = 45,87 \text{ [mm]}$



No cálculo do momento de inércia à flexão de seções compostas, primeiro decompõe-se a figura em áreas parciais simples. Calcula-se o J de cada área em relação ao seu centro de gravidade e depois se usa o teorema dos eixos paralelos para obter J de cada seção em torno do CG global. Finalmente soma-se a contribuição de cada área. No exercício, calcula-se o J da figura cheia e retira-se a contribuição da parte vazia (Figura ao lado).

$$J = \frac{bh^3}{12}$$

$$J = \frac{0,04 \times 0,08^3}{12} + 0,080 \times 0,040(0,04587 - 0,040)^2 - \left[\frac{0,03 \times 0,03^3}{12} + 0,030^2 \times (0,04587 - 0,025)^2 \right]$$

$$= 1,357 \times 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]}$$

Cálculo do momento máximo:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_f}{W_f} \Rightarrow M_{f_{\max}} = \sigma_{\max} \cdot W_f = \sigma_{\max} \cdot \frac{J}{y} = \sigma_{\max} \text{ [Pa]} \cdot \frac{1,357 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]}}{y \text{ [m]}}$$

No ponto de máxima tração (fibra superior) tem-se:

$$y = 0,080 - 0,04587 = 0,03413 \text{ [m]} \text{ e } \sigma_{\max} = 120 \text{ [MPa]}$$

$$\Rightarrow M_{f_{\text{máxtração}}} = 120 \times 10^6 \times \frac{1,357 \times 10^{-6}}{0,03413} = 4771,17 \text{ [N.m]}$$

No ponto de máxima compressão (fibra inferior) tem-se:

$$y = 0,04587 \text{ [m]} \text{ e } \sigma_{\max} = 150 \text{ [MPa]}$$

$$\Rightarrow M_{f_{\text{máxcompressão}}} = 150 \times 10^6 \times \frac{1,357 \times 10^{-6}}{0,04587} = 4437,54 \text{ [N.m]}$$

b) Este exercício segue exatamente o raciocínio do anterior, só mudando o cálculo do CG e do momento de inércia J.

Exercício 16)

a) O momento máximo é dado por

$$M_{\max} = \sigma_{\max} \cdot W_f$$

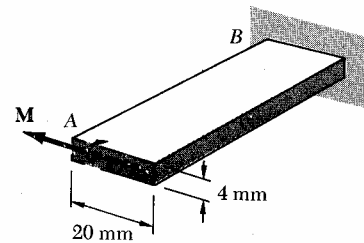
e neste caso

$$W_f = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,02 \times 0,004^2}{6} = 5,333 \times 10^{-8} \text{ [m}^3\text{]}$$

e $\sigma_{\max} = 170 \text{ [MPa]}$, então finalmente:

$$M_{\max} = 170 \times 10^6 \times 5,333 \times 10^{-8} = 9,066 \text{ [N.m]}$$

b) De acordo com a teoria da flexão:



$$\sigma = \frac{E \cdot y}{R}$$

onde R é o raio de curvatura da linha neutra da flexão. O momento acima ocasiona:

$$\sigma_{\text{máx}} = 170 \text{ [MPa]} \text{ e } y = 0,002 \text{ [m]} \Rightarrow R = \frac{E \cdot y}{\sigma} = \frac{200 \times 10^9 \times 0,002}{170 \times 10^6} = 2,35 \text{ [m]}$$