UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

4. Autovalores e Autovetores

LOB 1037 – Álgebra Linear

Profa. Paula C P M Pardal

Matriz de uma Transformação Linear

- Ideia: associar a TL entre EVs de dimensão finita a uma matriz, chamada *matriz da transformação linear*, o que permitirá resolver problemas associados às TLs por meio das operações com matrizes ➔ Ganho: eficiência computacional.

- Sejam: V e W EVs de dimensão finita e $B = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ e $B' = \{\overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_m}\}$ bases de V e W, respectivamente. Se $T: V \longrightarrow W$ é uma TL, então existe uma única matriz da transformação linear, A (ou T_A), tal que:

$$[\underbrace{T(\vec{v})}_{\vec{w} \in W}]_{B'} = A[\underbrace{\vec{v}}_{\vec{v} \in V}]_B$$

- Desta forma, para toda TL $T: V \longrightarrow W$, tal que $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$, existe $A \in M(m, n)$ tal que $T(\vec{v}) = A\,\vec{v}$.

Exemplos:

1) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ ➔ $T(\vec{v}) = A\,\vec{v}$,

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A \in M(2,2)$. A é a matriz da TL T.

2) $\mathbb{D}: P_3(x) \to P_2(x)$ ou $\mathbb{D}\big(p(x)\big) = p'(x)$.

3) $\mathbb{I}: P_3(x) \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{I}\big(p(x)\big) = \int_0^1 p(x)\,dx$.

EXERCÍCIOS

1. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x,y,z) = (x+y, 2z)$. Determine a matriz A associada à TL T.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x,y,z) = (x+y, 2z)$. Se $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,0,-1)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$ e $B' = \{(1,0), (1,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$, determine a matriz A associada à TL T.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Seja $T: P_2(x) \to P_3(x), T\big(p(x)\big) = (x+1)p(x), \forall p(x) \in P_2(x)$. Determine a matriz A da TL T com relação às bases $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ de $P_2(x)$ e $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $P_3(x)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Considere o OL $T: M(2,2) \to M(2,2), T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a+b & 2b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}$. Determine a matriz A associada ao OL T.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Considere o OL T sobre o $\mathbb{R}^3$, definido por $T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$. Determine a transformação inversa T^{-1}, utilizando a matriz A da transformação, em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

$$T^{-1} = \left(\frac{2x+y}{2}, \frac{y}{2}, \frac{2z-y}{2}\right)$$

1. Introdução

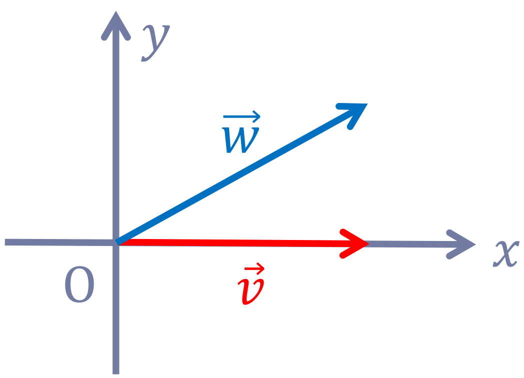
- Dada uma TL de um EV V nele mesmo, quais vetores são levados neles mesmos por esta transformação?
  - *Isto é*: dada $T: V \to V$, quais são os vetores $\vec{v} \in V$ tais que $T(\vec{v}) = \vec{v}$? ($\vec{v}$ é chamado ***vetor fixo***).

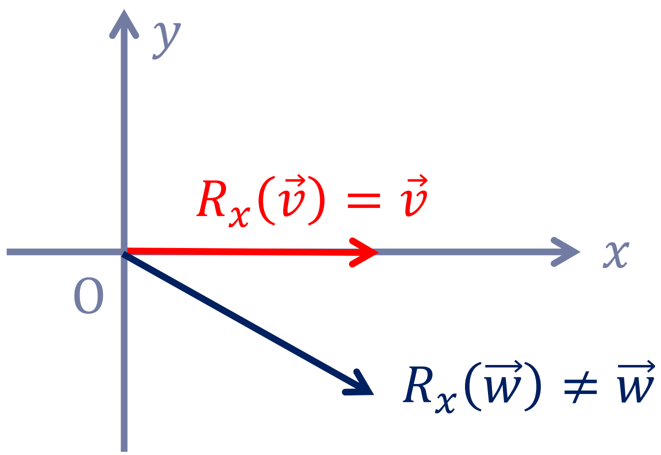
Exemplo (1): Transformação Identidade, I

- $I: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \rightarrow (x, y)$.
  - Neste exemplo, todo $\mathbb{R}^2$ é fixo, pois $I(x, y) = (x, y), \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo (2): Reflexão no eixo Ox, R_x

- $R_x \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x, -y)$.
  - Observe os vetores a seguir:





  - Neste exemplo, todo vetor $\in$ Ox é mantido fixo pelo OL R_x, pois $R_x(x, 0) = (x, 0), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Seja o seguinte **problema**:

Dada a TL de um EV, $T: V \to V$, quais ***vetores*** são levados em ***múltiplos de si mesmo***? Isto é, procuram-se um vetor $\vec{v} \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

Como $\vec{v} = \vec{0}$ satisfaz a equação $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, o interesse está em determinar vetores $\vec{v} \neq \vec{0}$ que satisfaçam a condição acima.

- O escalar λ será chamado ***autovalor***, valor próprio ou valor característico.
- O vetor $\vec{v}$ será chamado ***autovetor***, vetor próprio ou vetor característico.

2. Definição

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Se existirem $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, λ é um *autovalor* de T e $\vec{v}$, um *autovetor* de T associado a λ.

Observação: Um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ será autovetor se a imagem $T(\vec{v})$ for obtida da multiplicação de $\vec{v}$ por um escalar λ. No $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}$ e $T(\vec{v})$ têm a mesma direção. Assim, de acordo com λ, o OL dilata ou contrai e inverte ou mantém o sentido de $\vec{v}$.

Exemplos:

1) Verifique se $\overrightarrow{v_1} = (5,2)$ e $\overrightarrow{v_2} = (2,1)$ são autovetores do OL $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) \rightarrow (4x + 5y, 2x + y)$.
2) Na simetria em relação à origem, definida no $\mathbb{R}^2$ por $T(\vec{v}) = -\vec{v}$, qualquer vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$.

I) Determinação dos Autovalores

- Seja o OL $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, cuja matriz de transformação é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

isto é, $A = [T]_A$.

- Se $\vec{v}$ e λ são, respectivamente, autovetor e autovalor do OL T, tem-se:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad \text{ou} \qquad A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

- E, como $\vec{v} = I\vec{v}$, é possível escrever:

$$(A - \lambda\, I)\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{(1a)}$$

- E para que o Sistema Linear Homogêneo estabelecido em (1a) admita soluções não triviais ($\vec{v} \neq \vec{0}$), deve-se ter que $\det(A - \lambda\, I) = 0$, ou seja:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \qquad (1b)$$

- A equação $\det(A - \lambda\, I) = 0$ é denominada ***equação característica*** do OL T(ou da matriz A), e suas raízes são os autovalores de T (ou de A).
- Observe que $P(\lambda) = \det(A - \lambda\, I)$ é um polinômio em λ de grau n, chamado ***polinômio característico***.

II) Determinação dos Autovetores

- A substituição de cada valor de λ encontrado no SLH definido em (1b) na equação (1a), permite determinar os autovetores associados a cada autovalor.

Exemplo: Determinar os autovalores e autovetores do seguinte OL:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (5x - y, x + 3y).$$

4. Propriedades

I. Se $\vec{v}$ é autovetor associado ao autovalor λ de um operador linear T, então o vetor $k\vec{v}, \forall k \in \mathbb{R}^*$, também é autovetor de T, associado ao mesmo autovalor λ.

II. Se λ é um autovalor de um OL $T: V \rightarrow V$, o conjunto S_λ de todos os vetores $\vec{v} \in V$ associados ao autovalor λ, e o vetor nulo, formam um subespaço vetorial de V, chamado *subespaço associado ao autovalor λ*: $S_\lambda = \{\vec{v} \in V; T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$.

III. Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico e, consequentemente, os mesmos autovalores.

- Duas matrizes $[T]_A$ e $[T]_B$, que representam o OL T nas bases A e B, respectivamente, serão semelhantes se existir uma matriz inversível M tal que:

$$[T]_B = M^{-1}[T]_A M$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule os autovalores e os correspondentes autovetores da matriz de transformação $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   Para $\lambda = 1$, $\vec{v} = k(2,2,1), k \neq 0$; para $\lambda = \pm i$, $\nexists\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, pois $\lambda \notin \mathbb{R}$

2. Sejam $\overrightarrow{v_1} = (1,1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (2,-1)$ autovetores de um OL $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, associados a $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determine a imagem do vetor $\vec{v} = (4,1)$ por esse operador.

   $T(\vec{v}) = (8,11)$

3. Quais são os autovalores e os autovetores da matriz identidade de ordem n?

   $\lambda_i = 1\ (i = 1, \cdots, n)$; qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$