Lista 4 – Álgebra Linear (LOB 1037) – Profa. Paula

1. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(x', y') \to (y, 2y)$. Mostre que $\lambda = 2$ é um autovetor de T e vetores da forma $(x, 2x)$ são os autovetores correspondentes.

2. Encontre os autovalores e autovetores correspondentes das TLs abaixo:

   a. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$.

   b. $T: P_2 \to P_2$, tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$.

   c. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tal que $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$.

3. Encontre a TL $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 e autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$, respectivamente.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quais os autovalores e autovetores de A?

5. Suponha que λ_1, λ_2 e λ_3 são autovalores distintos e diferentes de zero de $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Mostre que:

   a. Os autovetores correspondentes $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI.

   b. $T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$ e $T(\vec{v}_3)$ são LI.

6. Seja $T: V \to V$ uma TL.

   a. Se $\lambda = 0$ é um autovalor de T, mostre que T não é injetora.

   b. A recíproca é verdadeira: se T não é injetora, $\lambda = 0$ é um autovalor de T?

7. Verifique se os OLs a seguir são diagonalizáveis:

   a. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(x', y', z') \to (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

   b. OL $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores –2 e 3 associados aos autovetores $y(3,1)$ e $y(-2,1)$, respectivamente.

   c. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $(x', y', z', w') \to (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$.

8. Verifique se as matrizes a seguir são diagonalizáveis e, caso sejam, determine a matriz diagonal D:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Seja A uma matriz $3x3$ triangular superior, com todos os elementos acima da diagonal distintos e não nulos:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

a. Quais são os autovalores e os autovetores de A?

b. Qual é o polinômio mínimo de A?

10. Sejam $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um OL; C a base canônica; e $A = [T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

a. Encontre o polinômio característico de T, seus autovalores e autovetores correspondentes.

b. Se possível, encontre uma base B de $\mathbb{R}^3$, tal que $[T]_B$ seja diagonal. Justifique sua resposta.

11. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Encontre $p(A)$ nos seguintes casos:

a. $p(x) = x^2 - 3x + 7$.

b. $p(x) = x^2 - 6x + 13$.

12. Sejam $[T]_E = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $[T]_{E'} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. O polinômio característico de ambos OLs é $p(\lambda) = (\lambda - 2)\,(\lambda - 1)^2$. Encontre o polinômio mínimo $m(x)$ de cada OL. Algum dos OLs é diagonalizável? Justifique sua resposta e para o OL diagonalizável, escreva a matriz diagonal.

13. Se houver um OL diagonalizável no exercício anterior, determine a matriz diagonal D a partir da abordagem que utiliza base de autovetores.

14. Determine o polinômio característico do OL $\mathbb{D}(\cdot): V \to V$ definido como $\mathbb{D}(f) = \frac{df}{dt}$, em que V é o espaço vetorial das funções cuja base canônica é $C = \{\text{sen}t, \cos t\}$. O OL é diagonalizável?

RESPOSTAS:

2. (a) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$; $\vec{v}_1 = x(1, \sqrt{2})$, $\vec{v}_2 = y(1, -\sqrt{2})$; (b) $\lambda = 1$, $p(x) = ax^2 + bx + b$; (c) $\lambda = 1, \vec{v} = (0,0,0,w)$.

3. $T(x,y) = (-6y, -x + y)$.

4. $\lambda = -2, \vec{v} = y(2,1,-1)$; $\nexists \vec{v}$ / $\lambda = \pm i$.

6. (b) Sim.

7. (a) e (b) são diagonalizáveis.

8. (a) e (c) são diagonalizáveis. (a) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e (c) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

9. (a) $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = d$, $\lambda_3 = f$; $\vec{v}_1 = x(1,0,0)$, $\vec{v}_2 = x\left(1, \frac{d-a}{b}, 0\right)$, $\vec{v}_3 = z\left(\frac{bd-bf-ce}{e(a-f)}, \frac{f-d}{e}, 1\right)$.

10. (a) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$; $\vec{v}_1 = x(1,0,0)$, $\vec{v}_2 = y(0,1,0)$. (b) Não existe a base B que diagonaliza T, pois não é possível montar uma base de autovetores LI do $\mathbb{R}^3$ associada a T.

11. (a) $\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

12. $[T]_E \to m_B(x) = (x-2)\,(x-1)$ e $[T]_{E'} \to m_{B'}(x) = (x-2)\,(x-1)^2$. $[T]_E$ é diagonalizável, pois o polinômio mínimo é o polinômio de menor grau que anula $[T]_E$.

13. $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $D = [T]_B, B$: base de autovetores.

14. $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$. $\mathbb{D}(\cdot)$ não é diagonalizável, pois os autovalores $\lambda_i \notin \mathbb{R}$.