Lista 1 – Álgebra Linear (LOB 1037) – Profa. Paula

Sejam um conjunto V e operações de adição entre vetores e multiplicação por escalar nele definidas. Verifique quais são espaços vetoriais e, para aqueles que não forem, cite os axiomas que não se verificam:

1. $V = \mathbb{R}^3$. Operações:$\begin{cases} (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ k(x_1, y_1, z_1) = (0,0,0) \end{cases}$
2. $V = \mathbb{R}^3 = \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$. Operações usuais.
3. $V = \mathbb{R}^2$. Operações:$\begin{cases} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ k(x_1, y_1) = (k^2 x_1, k^2 y_1) \end{cases}$
4. $V = M(2,2) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\right\}$. Operações usuais.

Sejam os subconjuntos S a seguir. Em relação às operações usuais de adição entre vetores e multiplicação por escalar, verifique quais são subespaços vetoriais:

5. $S = \{(x, y); y = -x\}$.
6. $S = \{(x, y); x \geq 0\}$.
7. $S = \{(x, y, z); z = 2x - y\}$.
8. $S = \{(x, y, z); x = z^2\}$.
9. $S = \{(x, y, z); x + y + z = 0\}$.
10. $S = \{(x, y, z); x \geq 0\}$.
11. $S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ (matrizes triangulares superiores).
12. $S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ (matrizes simétricas).
13. $S = \left\{\begin{bmatrix} a & 1 \\ a & b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
14. $S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; ad - bc \neq 0\right\}$ (conjunto das matrizes inversíveis).

15. Sejam o espaço vetorial $V = M(2,2)$ e os vetores $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Escreva o vetor $M = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear de M_1, M_2 e M_3.
16. Escreve o vetor $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1} = (1,3)$ e $\overrightarrow{v_2} = (2,6)$.
17. Expresse o vetor $\vec{u} = (-1,4,-4,6) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1} = (3,-3,1,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,1,-1,2)$ e $\overrightarrow{v_3} = (1,-1,0,0)$.
18. Seja S um subespaço de $V = M(2,2)$: $S = \left\{\begin{bmatrix} a - b & 2a \\ a + b & -b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
    a. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in S$?
    b. Qual o valor de k para que $\begin{bmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \in S$?
19. Determine o subespaço gerado $G(A)$ para $A = \{(1,-2), (-2,4)\}$. O que esse subespaço representa geometricamente?
20. Mostre que os vetores $\overrightarrow{v_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,1,1)$ e $\overrightarrow{v_3} = (0,0,1)$ geram o $\mathbb{R}^3$.
21. Determine o subespaço de P_3 (espaço dos polinômios de grau ≤ 3) gerado pelos vetores $p_1 = x^3 + 2x^2 - x + 3$ e $p_2 = -2x^3 - x^2 + 3x + 2$.

Classifique os subconjuntos em LD ou LI:

22. $\{(1,3)\}$
23. $\{(1,0),(-1,1),(3,5)\}$
24. $\{(1,-1,1),(-1,1,1)\}$
25. $\{(2,1,3),(0,0,0),(1,5,2)\}$
26. $\{(1,-1,-2),(2,1,1),(-1,0,3)\}$
27. $\{-x^2+x+2, 4x^2-x-4, 2x^2+x\}$
28. $\{2x^2+x-1, x^2-x, x^2\}$
29. $\{(2,1,0,0),(1,0,2,1),(-1,2,0,-1)\}$
30. $\{(0,1,0,-1),(1,1,1,1),(-1,2,0,1),(1,2,1,0)\}$
31. $\{\text{sen}^2(t), \cos^2(t), \pi\}$

32. Determine k para que o conjunto $\{(-1,0,2),(1,1,1),(k,-2,0)\}$ seja LI.
33. Mostre que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI, então $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{w}$ e $\vec{v}+\vec{w}$ também são LI.

34. Para que valores de k o conjunto $B=\{(1,k),(k,4)\}$ é base do $V=\mathbb{R}^2$?

Verifique quais dos conjuntos de vetores formam base dos respectivos espaços vetoriais V:

35. $(1,1,-1),(2,-1,0),(3,2,0); V=\mathbb{R}^3$
36. $(1,0,1),(0,-1,2),(-2,1,-4); V=\mathbb{R}^3$
37. $1, x, x^2; V=P_2$
38. $x+1, -x^2+x, -x^2+2x+1; V=P_2$

39. Mostre que o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $V=M(2,2)$.
40. Mostre que o conjunto $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,3),(0,0,0,5)\}$ é uma base de $V=\mathbb{R}^4$.
41. Mostre que os polinômios $p_1=-3x^2+2x+1$, $p_2=2x^2-3x+1$ e $p_3=5x^2-x+2$ formam uma base do espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2. Calcule p_B, dados: $p=-13x^2-9x-2$ e $B=\{p_1,\ p_2,\ p_3\}$.
42. Determine o vetor-coordenada de $\vec{v}=(6,2)$ em relação às bases:
    a. $A=\{(1,2),(2,1)\}$
    b. $B=\{(1,0),(0,1)\}$
    c. $C=\{0,1,(1,0)\}$

Determine a dimensão e uma base para cada um dos subespaços vetoriais:

43. $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; y=3x\}$
44. $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; y=5x\ ,\ z=0\}$
45. $S=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; b=a+c\right\}$
46. $S=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; c=a-3b\ ,\ d=0\right\}$

RESPOSTAS:

1. Não é. Falham $A4$ e $M4$.
2. É.
3. Não é. Falha $M2$.
4. É.
5. É.
6. Não é.
7. É.
8. Não é.
9. É.
10. Não é.
11. É.
12. É.
13. Não é.
14. Não é.
15. $M = 4M_1 + 3M_2 - 2M_3$
16. $\vec{0} = -2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$
17. $\vec{v} = -\overrightarrow{v_1} + 3\overrightarrow{v_2} + 2\overrightarrow{v_3}$
18. a) Sim. b) $k = -2$.
19. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -2x\}$. Reta que passa pela origem.
21. $S = \{ax^3 + bx^2 + cx + 3d; b = 5a + 3c\ ,\ d = 11a + 8c\}$
22. LI
23. LD
24. LI
25. LD
26. LI
27. LD
28. LI
29. LI
30. LD
31. LD
32. $k \neq -3$
34. $k \neq \pm 2$
35. É base.
36. Não é base.
37. É base.
38. Não é base.
41. $p_B = (-4,5,1)$
42. a) $\vec{v}_A = \left(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ b) $\vec{v}_B = (6,2)$ c) $\vec{v}_C = (2,6)$
43. $\dim(S) = 2$
44. $\dim(S) = 1$
45. $\dim(S) = 3$
46. $\dim(S) = 2$