

MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Modelos Populacionais

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Modelos Epidemiológicos: O Modelo SIR (Suscetíveis Infectados Removidos)

Este modelo trata da propagação de uma 'doença' em uma população de N indivíduos. Doenças típicas tratadas por este tipo de modelagem englobam Sarampo, Rubéola, Surtos de Gripe, e recentemente, a COVID-19.

A ideia básica consiste em separar a população em grupos de indivíduos, neste caso, 3 grupos. Os suscetíveis, são os indivíduos sujeitos a contrair a doença. Os infectados são aqueles que contraíram a doença, da qual se tornam transmissores. Os removidos são os infectados que se recuperaram (ou vieram a perecer) da doença, não sendo mais transmissores.

Neste modelo, algum suscetível se infecta devido ao contágio via infectados. Os infectados se recuperam em algum determinado período de tempo, a uma certa taxa. O número de infectados em um dado instante (vamos considerar variações dia a dia, ou semana a semana) será modelado como:

$$I_{i+1} = I_i + \alpha S_i I_i - \beta I_i$$

Esta população cresce devido à contaminação de suscetíveis, a uma taxa α . O crescimento é proporcional aos 'encontros' entre suscetíveis e infectados, modelado pelo produto $S_i I_i$.

O número de infectados que são removidos é proporcional ao número de infectados.

A evolução dos 3 grupos ocorre de acordo com o modelo:

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i - \alpha S_i I_i \\ I_{i+1} = I_i + \alpha S_i I_i - \beta I_i \\ R_{i+1} = R_i + \beta I_i \end{cases}$$

Note que $S_{i+1} + I_{i+1} + R_{i+1} = S_i + I_i + R_i = N$, ou seja, o número total de indivíduos permanece constante, variando-se apenas sua distribuição entre os grupos.

Efeitos de nascimento ou migração não são contabilizados. As epidemias modeladas são de duração relativamente curta. Observe que em princípio pode-se alterar a modelagem, incluindo mais categorias de indivíduos. No modelo para Covid, em geral coloca-se mais categorias, como por exemplo, expostos à doença (separando melhor quem está isolado ou não) e o grupo gravemente enfermo (que requer internação).

Antes de vermos um tal modelo, vamos considerar um modelo com taxas de propagação de uma gripe e sua evolução semana a semana. Vamos supor que o prazo para a recuperação da gripe seja

de 10 dias. Modelaremos a taxa β de Recuperação (Remoção) dos indivíduos, de maneira mais ou menos uniforme, ou seja, $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ a cada semana. Há ainda que se estimar a taxa α de transmissão da doença, o que é feito em função da evolução inicial da doença.

Analisemos um pouco a evolução dos infectados:

$$I_{i+1} = I_i + \alpha S_i I_i - \beta I_i$$

É possível observarmos que no início, com poucos indivíduos infectados e a grande maioria suscetível, normalmente $(\alpha S_i - \beta) > 0$ e o número de infectados cresce. Podemos estimar que o pico da infecção deve ocorrer quando $S_i = \beta/\alpha$. Enquanto o número de suscetíveis for maior que este valor, o número de infectados aumenta. Há doenças para as quais esta taxa α é baixa, com a doença se espalhando pouco. Quando α é maior o pico só ocorre quando o número de suscetíveis já se reduziu bastante, ou seja, muitos se infectaram.

Modelos Populacionais Discretos e Equações diferenciais.

Em um modelo discreto de crescimento de uma população a uma taxa constante (proporcional ao tamanho da população) temos:

$$P_{i+1} = P_i + \lambda P_i$$

Onde consideramos a variação no número de indivíduos de uma população: $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i = \lambda P_i$ durante um certo período de tempo. Esta taxa de variação, deve refletir o período de tempo a que nos referimos. Uma forma de levar isto em consideração é considerarmos instantes separados por uma variação temporal Δt .

Assim P_i se refere à população no instante t_i e P_{i+1} ao instante $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Como a variação da população deve levar em conta o intervalo de tempo, escrevemos $P_{i+1} = P_i + \lambda \Delta t P_i$, ou

$$\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} = \lambda P_i$$

Se tomarmos o limite, para $\Delta t \rightarrow 0$ temos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t_i + \Delta t) - P(t_i)}{\Delta t} = \lambda P(t_i)$$

ou, portanto, $P'(t) = \lambda P(t)$.

Esta última equação, é uma equação diferencial, onde a solução é uma função cuja derivada é um múltiplo dela mesma. Fixado o valor num instante inicial (digamos $t=0$), P_0 .

temos como solução $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$.

O modelo logístico contínuo, também se escreve de forma contínua como uma equação diferencial:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Os outros modelos, de competição e presa-predador, em sua forma contínua são sistemas de equações diferenciais:

Competição:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = \delta y(t) - \gamma x(t)y(t) \end{cases}$$

Presa-Predador:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = -\delta y(t) + \gamma x(t)y(t) \end{cases}$$

x - presa
y - predador

Cada um deles com alguma condição inicial

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo as equações diferenciais numericamente:

Para resolver numericamente uma equação diferencial, voltamos a uma forma discreta das equações.

No método de Euler aproximamos a derivada da função através de diferenças. A partir do instante inicial t_0 , aproximamos a solução em instantes consecutivos ($t_i = t_0 + i\Delta t$) espaçados por um intervalo de tempo Δt , e definimos:

$$x'(t_i) \sim \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t}$$

Desta forma, o modelo de crescimento fica:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \lambda x_i \quad \left(\text{onde denotamos: } x_i = x(t_i) \right)$$

O logístico

$$x_{i+1} = x_i + \alpha \Delta t x_i (1 - x_i/M)$$

e análogamente os outros modelos.

No limite, para $\Delta t \rightarrow 0$, a solução discreta converge para a solução contínua.