

Notas de Aula:
Mecânica Clássica

Airton Deppman

08/2020 - Distribuição limitada aos estudantes da disciplina
Versão não revisada e não corrigida.

Índice

1	Mecânica Newtoniana	7
1.1	Mecânica do ponto material	8
1.1.1	Movimento linear	8
1.1.2	Movimento circular	9
1.1.3	Trabalho, Energia Cinética e Energia Potencial	9
1.2	Mecânica de um sistema de partículas	10
1.2.1	Exercícios	14
2	Conceitos básicos	19
2.1	Introdução	19
2.2	Transformações Contínuas	19
2.2.1	Translação	19
2.2.2	Rotação	20
2.2.3	Estudo das rotações infinitesimais	25
2.2.4	Tensores	29
2.3	Analiticidade	30
2.4	Exercícios e Problemas	31
3	Movimento de Corpo Rígido	33
3.1	Introdução	33
3.2	Rotações do Corpo Rígido	34
3.2.1	Tensor Momento Momento Angular	35
3.2.2	Eixos Principais	36
3.2.3	Teorema dos eixos paralelos	40
3.2.4	Torque	42
3.3	Estudo do pião simétrico	43
4	Apêndice D: Estudo Dirigido de Corpo Rígido	47

Introdução

“Os antigos consideravam a mecânica sob dois aspectos: como racional – a qual procede rigorosamente por demonstrações – e prática. À mecânica prática pertencem todas as artes manuais, das quais a mecânica tomou seu nome. Mas como os artesãos não trabalham com rigor perfeito, diferenciam a mecânica da geometria: o que é perfeitamente preciso é chamado de geométrico, o que é menos rigoroso é chamado mecânico. No entanto, os erros não estão na arte, mas nos artesãos. Aquele que trabalha com menos rigor é um mecânico imperfeito; e se alguém pudesse trabalhar com rigor perfeito, seria o mais perfeito dos mecânicos, pois os desenhos das linhas retas e círculos, sobre os quais a geometria está fundada, pertence à mecânica.” Trecho do prefácio de Newton à primeira edição do “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural” em 8 de maio de 1686

Newton dispensa apresentações. Seu legado solidificou o que chamamos de Revolução Científica que começou na verdade com Galileo. No final do século XVII, Newton publicou sua obra prima “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, publicação que foi um marco na história da Ciência. Filosofia Natural era o estudo da natureza, diferente da Filosofia de hoje. Seu trabalho além de ter sido a estrutura da Física e da Matemática durante dois séculos foi também a base do que conhecemos hoje como Mecânica. Galileo introduziu a discussão de como um objeto se comporta sob a força da gravidade terrestre e depois Newton previu o que acontece com o movimento dos corpos, nas suas três leis da Mecânica.

Diz-se que Isaac Newton afirmou ter enxergado mais longe por ter se apoiado em ombros de gigantes. Seu trabalho formalizou achados de Galileu Galilei, obtidos através de uma série de experimentos engenhosos e de observações precisas. Galileu foi um dos responsáveis por colocar a experimentação como fator determinante para a compreensão da natureza. Ele também foi um dos primeiros a reconhecer a importância do rigor matemático na descrição dos fenômenos. O outro gigante certamente foi René Descartes, que usou a álgebra para descrever objetos da geometria. Newton foi capaz de unir os resultados destes dois gigantes em uma estrutura conceitual que permitiu descrever um

enorme número de fenômenos de forma simples, consistente e precisa.

A formulação de Newton para a dinâmica e para a cinemática já coloca em estreita relação a Física e a Geometria. Os desenvolvimentos posteriores, realizados principalmente por Lagrange, aprofundaram e iluminaram essa relação, permitindo visões diferentes dos princípios da Mecânica Newtoniana, sem no entanto se desviar dos fundamentos estabelecidos, ao menos até a formulação da Teoria da Relatividade Restrita. O principal objetivo deste texto é tornar mais explícita e evidente as conexões entre aquelas duas áreas do conhecimento. O ponto máximo da formulação matemática da Mecânica se dá com o Princípio de Hamilton, que descreve a evolução de um sistema físico como um percurso ao longo de uma trajetória que minimiza uma certa distância calculada no espaço de fase, a ação, um conceito muito próximo ao da geodésica na geometria de espaços curvos. Este princípio não difere das Três Leis de Newton, mas oferece novas perspectivas na compreensão dos fenômenos físicos, e em particular permite a introdução das Transformações Canônicas, que nos mostram que a definição de coordenadas e momentos é em grande parte arbitrária, o que abre a possibilidade de se resolver de forma muito eficiente problemas que podem ser bastante difíceis quando usamos apenas as ferramentas da Mecânica Newtoniana.

A Teoria da Relatividade abre um novo espaço para a interpretação geométrica dos fenômenos físicos, e Herman Minkowski foi o primeiro a perceber essa possibilidade. Albert Einstein levou essa interpretação a suas últimas consequências com a Teoria da Relatividade Geral.

Capítulo 1

Mecânica Newtoniana

Mecânica é o estudo do movimento de objetos no espaço e das causas desse movimento. A parte da Mecânica que estuda o movimento *per se* é a Cinemática; a parte que estuda as causas do movimento se chama Dinâmica. As grandezas fundamentais da Cinemática são: posição, velocidade e aceleração. As grandezas fundamentais da Dinâmica são: energia, trabalho e força.

Os fundamentos da Mecânica encontram-se nas três Leis de Newton:

1. *Lei da inércia:* Todo corpo tende a manter seu estado de movimento quando a força resultante sobre ele é nula.
2. *Lei da força:* A aceleração de um corpo \mathbf{a} , depende da força resultante sobre o corpo, \mathbf{F} , através da relação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, onde m é a massa, isto é, uma medida da inércia do corpo.
3. *Lei da ação e reação:* A toda ação sobre um corpo corresponde uma reação sobre o mesmo corpo que exerceu a ação, igual em módulo e direção mas em sentido oposto à ação.

A Segunda Lei de Newton apresenta a conexão entre a Cinemática e a Dinâmica. Observe que as grandezas fundamentais nessa conexão são a aceleração do lado das grandezas cinemáticas e a força do lado das grandezas dinâmicas. Daqui decorre o importante Princípio da Relatividade de Galileu, que define que toda a Física é invariante em relação a mudanças de referenciais inerciais, isto é, aqueles referenciais que se movem com velocidade constante em relação a um outro observador inercial. O fato de que uma lei física, a Equação da Onda Eletromagnética formulada por Maxwell, apresente uma velocidade como grandeza cinemática fundamental, e não a aceleração, gerou uma crise nos fundamentos da Física que foi resolvida por Einstein em sua Teoria da Relatividade Restrita.

A seguir faremos uma breve revisão da Mecânica Newtoniana. Nosso objetivo aqui é ir além dessa formulação básica, chegando a formalismos como os de Lagrange e de Hamilton, que permitem observar princípios gerais da Mecânica que são mais abstratos e mais amplos do que as três leis descritas acima. Este capítulo não tem a intenção de ser uma descrição completa e detalhada da Mecânica Newtoniana, mas apenas elenca as grandezas fundamentais e apresenta as principais relações entre elas.

1.1 Mecânica do ponto material

A partir das Leis de Newton, todo o movimento pode ser descrito a partir de suas causas, ou seja, conhecendo-se a posição e o estado de movimento de um corpo em um certo instante, bem como as forças que agem sobre esse corpo, toda informação sobre a posição, velocidade e aceleração em qualquer outro instante pode ser obtida.

1.1.1 Movimento linear

As relações abaixo são aquelas necessárias para descrever o movimento de qualquer objeto sujeito a forças externas.

Definindo-se o momento linear, \mathbf{p} , como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

onde o momento linear, \mathbf{p} é definido por

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \tag{1.1}$$

sendo \mathbf{v} a velocidade, isto é

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{1.2}$$

De fato, como a aceleração é dada por

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

segue que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{1.3}$$

como é dado pela Segunda Lei de Newton.

1.1.2 Movimento circular

No caso do movimento circular, no entanto, algumas grandezas auxiliares são definidas para descrever de forma mais sucinta o movimento.

Para o movimento circular as grandezas mais convenientes são o momento angular, \mathbf{L} , dado pelo produto vetorial

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

e o torque, τ definido por

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Como

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} (m\mathbf{v})$$

e

$$\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$$

segue que

$$\tau = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

de onde decorre que

$$\boxed{\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}}$$

1.1.3 Trabalho, Energia Cinética e Energia Potencial

Definimos o trabalho exercido por uma força \mathbf{F} num dado deslocamento entre os pontos 1 e 2 por

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (1.4)$$

Entende-se que esta integral é realizada sobre um caminho C que corresponde à trajetória descrita pelo objeto sobre o qual age a força \mathbf{F} .

Das definições de velocidade e posição dadas acima, podemos escrever

$$W_{12} = m \int_1^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d}{dt} (v^2) dt. \quad (1.5)$$

Integrando-se no tempo entre os instantes t_1 e t_2 , que correspondem aos instantes de tempo em que o corpo se encontrava na posição inicial e na posição final, respectivamente, resulta

$$\boxed{W_{12} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1} \quad (1.6)$$

Este resultado é o Teorema Trabalho-Energia Cinética, e daqui segue a definição da energia cinética

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.7)$$

Uma força tal que $\oint \mathbf{F} ds = 0$ e chamada conservativa. Pelo teorema de Stokes

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

Como $\nabla \times \nabla f = 0$ para qualquer função f , segue que $\mathbf{F} = -\nabla V$ onde V é a energia potencial. Para um deslocamento ds segue

$$\mathbf{F} \cdot ds = -dV, \quad ,$$

portanto podemos escrever

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial s}. \quad (1.8)$$

Portanto o trabalho realizado pela força \mathbf{F} resulta em

$$W_{12} = -\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial s} ds = V_1 - V_2,$$

de onde segue que

$$\boxed{W_{12} = V_1 - V_2},$$

e portanto

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \quad \implies \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

e finalmente obtemos

$$E_1 = E_2 \quad .$$

A igualdade acima mostra que a energia mecânica dada por $E = T + V$ é uma grandeza conservada num sistema conservativo.

1.2 Mecânica de um sistema de partículas

O formalismo descrito acima pode ser estendido para sistemas de múltiplas partículas, como veremos a seguir. Consideraremos inicialmente sistemas formados por um conjunto de partículas puntiforme, e posteriormente os corpos extensos.

Sendo \mathbf{F}_{ij} a força que o corpo j exerce sobre o corpo i , e $\mathbf{F}_i^{(e)}$ a resultante das forças externas sobre o corpo i , temos

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i$$

$\mathbf{F}_i^{(e)}$ \equiv forças externas sobre a i -ésima partícula.

Somando sobre todas as partículas temos

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}.$$

Definindo

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{r}_i$$

temos que

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}}_{=0 \text{ } \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}}$$

Sendo o momento linear total

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

segue que

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$$

Daqui vemos que se a soma das forças externas é nula o momento total é conservado.

Momento Angular e Torque

O momento angular do ponto material é

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

então para um sistema de partículas o momento angular total é

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

Daqui segue que

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i \left[\underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i}_{=0 \text{ } \dot{\mathbf{r}}_i \parallel \mathbf{p}_i} + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i \right]$$

portanto

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i$$

mas

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$$

portanto, usando

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}$$

Usando

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$$

temos

$$\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} = \sum_{i<j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}$$

Mas como $\mathbf{F}_{ji} \parallel \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ segue que este termo é nulo.

Sendo $\tau = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}$ segue

$$\dot{\mathbf{L}} = \tau$$

O momento angular é conservado se o torque externo é nulo.

Momento Angular Total e do Centro de Massa

Sendo \mathbf{R} a posição do CM, temos

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \quad \implies \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}$$

sendo \mathbf{r}'_i e \mathbf{v}'_i a posição e a velocidade da partícula no referencial do CM e \mathbf{V} a velocidade do CM no referencial inicial.

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}) = \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \\ &\quad \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V}$$

onde $\sum_i m_i \mathbf{r}_i'$ é a posição do CM no referencial do CM, portanto

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i' = 0$$

Da mesma forma

$$\sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}_i' = \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i' = 0$$

já que $\sum_i m_i \mathbf{r}_i' = 0$. Portanto resulta que

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \left(\sum_i m_i \right) \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i'$$

então

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i'$$

ou

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i'$$

O primeiro termo corresponde ao momento angular do CM e o segundo ao momento angular do sistema no referencial CM.

Energia de um Sistema de Partículas

O trabalho realizado pelas forças que agem sobre um sistema de partículas é

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{j \neq i} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i \right]$$

$$W_{12} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Big|_1^2 = T_2 - T_1$$

Em função da velocidade do centro de massa temos

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}_i'$$

então

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}_i')$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i' \right)$$

e como $\sum_i \mathbf{r}_i' = 0$ o último termo é nulo. Assim

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$$

A passagem de sistemas de partículas puntiformes é feita considerando-se que o corpo tem uma densidade de massa, $\rho(\mathbf{r})$, e discretizando-se o volume do corpo. Assim temos a substituição

$$\Sigma_i \rightarrow \int d^3r \rho(\mathbf{r}).$$

Com isso resulta, para o movimento linear, que a posição do centro de massa fica determinada por

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r},$$

e o momento linear total resulta em

$$\mathbf{P} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}.$$

1.2.1 Exercícios

1. Uma caixa de massa m_A é colocada dentro de um elevador, e sobre ela é colocada uma caixa de massa m_B . Determine as forças que agem sobre cada caixa quando o elevador sobe com uma aceleração a e quando desce com aceleração a , como observadas por um observador inercial.
2. Uma conta de massa m desliza sem atrito ao longo de um fio de forma espiral dada pela equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = \rho\lambda, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde z é o eixo vertical, R , ρ são constantes, e λ é o comprimento da espira medido a partir do ponto em que ela intersecciona o plano xy . Sendo g a aceleração da gravidade, determine a equação de movimento da conta.

3. Um objeto se move sobre um plano inclinado de um ângulo α em relação ao plano horizontal. Esse objeto é lançado a partir de um ponto inicial com uma velocidade \mathbf{v} paralela ao plano. Sendo g a aceleração gravitacional, determine a equação de movimento do copo.

4. Um foguete de massa inicial M_o começa a ejetar gases com velocidade de escape v_e , ganhando velocidade na direção oposta. Determine a variação de velocidade do foguete após queimar uma quantidade de combustível tal que sua massa se reduza a M . **R:** $v - v_o = v_e \ln(M_o/M)$
5. Num porto uma carga de grãos finos é transportada para o navio através de uma esteira onde a carga de um trem é despejada. A esteira é movida por um motor que mantém sua velocidade constante e igual a V .
 - a) Determine a potência fornecida pelo motor. **R:** $P = d/dt[(m + M)V^2]$
 - b) Determine a variação de energia cinética da carga depositada por unidade de tempo. $dE/dt == d/dt[(m + M)V^2/2]$
 - c) Por que a potência fornecida é diferente da taxa de variação de energia cinética? Justifique.
6. Uma corrente de anéis bem pequenos comparados ao comprimento da corrente, l , tem massa m e é colocada dentro de um tubo horizontal liso que se encontra a uma altura h sobre a mesa. A corrente é posicionada de modo que uma parte da mesma fique pendurada para fora do tubo. Esta parte tem inicialmente comprimento h , de forma que a sua extremidade inferior toca levemente a superfície da mesa. No instante inicial a outra extremidade, dentro do tubo, é liberada. determine a velocidade desta extremidade ao sair do tubo. **R:** $v^2 = 2Hg \ln(l/h)$
7. A partir do resultado obtido no problema anterior, mostre que a solução é equivalente considerar a massa invariante. Explique esse resultado.
8. Considere um corpo de massa m acoplado a uma mola ideal de constante elástica k . Obtenha a equação do movimento e a solução geral dessa equação.
9. Considere um corpo de massa m acoplado a uma mola ideal de constante elástica k e que se move sob a ação de uma força viscosa $\mathbf{F}_v = -bv$, onde v é a velocidade do corpo e b uma constante. Obtenha a equação do movimento e a solução geral dessa equação.
10. Considere um corpo de massa m acoplado a uma mola ideal de constante elástica k e que se move sob a ação de uma força viscosa $\mathbf{F}_v = -bv$, onde v é a velocidade do corpo e b uma constante, e de uma força externa periódica, \mathbf{F}_p . Obtenha a equação do movimento e a solução geral dessa equação.

11. Um corpo de massa m se encontra suspenso por uma corda elástica de constante k_A . Presa à parte inferior desse corpo encontra-se uma outra corda elástica de constante k_B . Considere que as duas cordas têm a mesma resistência a ruptura e que suas massas são desprezíveis. No instante t_o a corda B começa a ser puxada com velocidade constante, V_o .
- Determine a equação de movimento enquanto nenhuma das cordas se rompe.
 - Determine a solução geral dessa equação.
 - Qual a frequência de oscilação, ω do corpo de massa m ?
 - Mostre que se a velocidade V_o é menor do que uma velocidade crítica $V_c = mg\omega/k_B$, então a corda que se romperá é a corda A .
12. Uma corda de massa M e comprimento L é mantida na posição mostrada na figura 1.1, com uma das extremidades presa ao suporte. Assuma que o comprimento da corda que se encontra abaixo da altura do suporte no início seja desprezível. No instante $t = 0$ a ponta superior da corda é liberada, determine a força que o suporte aplica na corda em função do tempo.

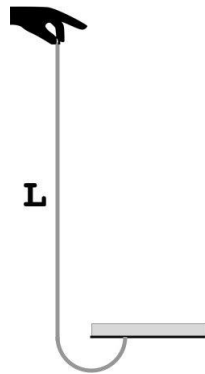


Figure 1.1: Corda em queda.

13. Em $t = 0$, um balde de massa desprezível contém uma massa inicial, M , de areia e está a uma distância L da parede. Ele está conectado a uma corda de massa desprezível e que exerce uma força independente constante sobre o balde (Fig. 1.2). Não há atrito entre o balde e o solo. Sejam x e m , respectivamente, a distância à parede e a massa de areia no balde em instantes posteriores ao inicial, quando o balde é liberado.

No caminho que o balde percorre até a parede, derrama areia a uma taxa $dm/dx = M/L$. Note que essa taxa é constante para deslocamentos iguais, mas não necessariamente para intervalos de tempo iguais. Também, sendo o deslocamento na direção da parede, $dx < 0$.

- (a) Qual a energia cinética da areia dentro do balde como função da distância até a parede? Qual seu valor máximo?
- (b) Qual o momento linear da areia no interior do balde em função da distância à parede? Qual seu valor máximo?

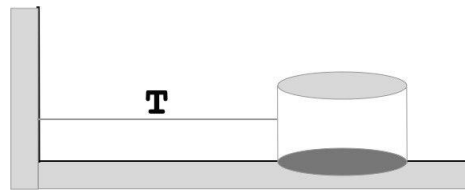


Figure 1.2: TO balde furado.

Capítulo 2

Conceitos básicos

2.1 Introdução

Vimos no capítulo anterior que alguns problemas de mecânica podem ser resolvidos mais facilmente se eliminamos graus de liberdade supérfluos, como nos problemas da conta se movendo numa espira vertical, ou do corpo se movendo sobre um plano inclinado. Isso é possível porque forças normais ao deslocamento restringem o movimento em outras direções, como na direção perpendicular ao plano, no caso do plano inclinado, ou qualquer direção ortogonal à direção do fio, no caso do problema da conta. Com a eliminação dos graus de liberdade, reduzimos os problemas a duas dimensões, no caso do plano, e a uma dimensão no caso do movimento da conta.

Ao eliminarmos os graus de liberdade espúrios, geralmente reescrevemos o problema em termos de novas coordenadas, como as coordenadas do plano inclinado, ou como a variável λ no caso do problema linear da conta deslizando num fio. Para isso temos que fazer *transformações de coordenadas*, e neste capítulo estudaremos essas transformações, em especial as rotações.

2.2 Transformações Contínuas

2.2.1 Translação

A transformação mais simples é a translação, que corresponde a uma mudança da posição da origem do sistema de coordenadas. Se na nova posição é deslocada para um ponto O' determinado, no sistema original, pelo vetor $\mathbf{R} = a_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, temos que as novas coordenadas serão dadas por $x'_i = x_i - a_i$.

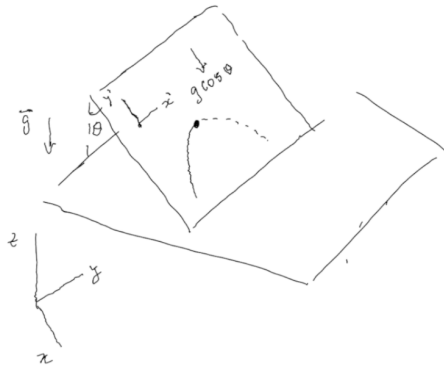


Figure 2.1: Esquema de resolução do problema de lançamento de objeto sobre plano inclinado. Há redução do número de graus de liberdade e rotação do sistema de coordenadas.

2.2.2 Rotação

Um dos aspectos fundamentais da Cinemática é a descrição da posição e da velocidade de objetos no espaço. A ferramenta matemática para realizar essa tarefa é o vetor, que apresenta as propriedades de direção e sentido. Vamos estudar como os vetores se comportam por rotação.

A figura (2.2) vemos um plano descrito por 3 sistemas de coordenadas diferentes: $x : (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$; $e : (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$; $e' : (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$. No plano, o vetor \mathbf{r} é indicado, e faz um ângulo α com relação ao eixo \mathbf{x}_1 , de modo que pode ser descrito pela expressão

$$\mathbf{r} = \cos\alpha \mathbf{x}_1 + \sin\alpha \mathbf{x}_2. \quad (2.1)$$

Os versores do sistema e podem ser escritos em termos do sistema x da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos\theta \mathbf{x}_1 + \sin\theta \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{e}_2 = -\sin\theta \mathbf{x}_1 + \cos\theta \mathbf{x}_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

e nesse sistema o vetor \mathbf{r} tem a forma

$$\mathbf{r} = \cos(\alpha - \theta) \mathbf{e}_1 + \sin(\alpha - \theta) \mathbf{e}_2. \quad (2.3)$$

Note que podemos escrever as coordenadas x'_1 e x'_2 , do sistema e' , podem ser escritas como

$$\begin{cases} x'_1 = \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 \\ x'_2 = -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

e portanto, para escrevermos as componentes do vetor no sistema e' temos que fazer a transformação

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta x'_1 - \operatorname{sen}\theta x'_2 \\ x_2 = -\operatorname{sen}\theta x_1 + \cos\theta x'_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

e daqui já vemos que é a transformação inversa àquela que sofrem os versores.

O sistema e' é obtido por rotação do sistema e de um ângulo $d\theta$, e temos

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \cos(\theta + d\theta) \mathbf{x}_1 + \operatorname{sen}(\theta + d\theta) \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = -\operatorname{sen}(\theta + d\theta) \mathbf{x}_1 + \cos(\theta + d\theta) \mathbf{x}_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Expandindo as funções trigonométricas até primeira ordem em $d\theta$, obtemos

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta d\theta) \mathbf{x}_1 + (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta d\theta) \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = -(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta d\theta) d\theta \mathbf{x}_1 + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta d\theta) \mathbf{x}_2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Daqui segue que as variações $\delta\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}_1$, e $\delta\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}_2$ são dadas por

$$\begin{cases} \delta\mathbf{e}'_1 = d\theta(-\operatorname{sen}\theta d\theta \mathbf{x}_1 + \cos\theta d\theta \mathbf{x}_2) = d\theta\mathbf{e}_2 \\ \delta\mathbf{e}'_2 = -d\theta(\cos\theta d\theta \mathbf{x}_1 + \operatorname{sen}\theta d\theta \mathbf{x}_2) = -d\theta\mathbf{e}_1, \end{cases} \quad (2.8)$$

e portanto, e' pode ser obtido a partir de e pela transformação

$$R = \begin{pmatrix} 1 & d\theta \\ -d\theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Vamos agora estudar como as coordenadas do vetor \mathbf{r} varia. Note que no referencial e' temos,

$$\mathbf{r} = \cos(\alpha - \theta - d\theta) \mathbf{x}_1 + \operatorname{sen}(\alpha - \theta - \theta) \mathbf{x}_2. \quad (2.10)$$

Em primeira ordem temos

$$\mathbf{r} = [\cos(\alpha - \theta) - \operatorname{sen}(\alpha - \theta)d\theta] \mathbf{x}_1 + [\operatorname{sen}(\alpha - \theta) - \cos(\alpha - \theta)] d\theta \mathbf{x}_2. \quad (2.11)$$

daqui segue imediatamente que

$$\begin{cases} \delta x'_1 = d\theta x'_2 \\ \delta x'_2 = -d\theta x'_1, \end{cases} \quad (2.12)$$

Assim, sendo $x'' = (x''_1, x''_2)$, as coordenadas de \mathbf{r} no sistema e' temos que

$$x'' = R x', \quad (2.13)$$

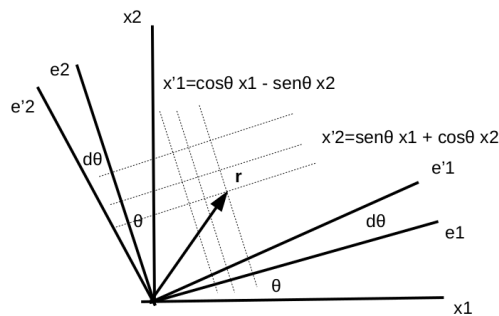


Figure 2.2: Transformação de vetores 2D por rotação em torno de um eixo perpendicular ao plano.

onde a transformação R^{-1} é a mesma usada para a transformação dos versores \mathbf{e}_i . Esta expressão nos dá as coordenadas no referencial e' em termos das coordenadas do sistema e , então para completar a passagem para o sistema e' devemos fazer a transformação inversa, isto é escrever x' em termos de x'' . Isso nos dá

$$x' = R^{-1} x'' , \quad (2.14)$$

Dessa forma, vemos que a transformação das coordenadas é a inversa daquela dos versores.

Do estudo acima, vemos que podemos classificar os vetores de acordo com o tipo de transformação que sofre ao se transformar as coordenadas. Agora vamos verificar, em mais detalhes, o que foi feito acima.

Considere um vetor $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$, onde \mathbf{e}_i é o versor (vetor de módulo unitário) na direção i , para uma determinada base vetorial. Considere uma

transformação R do sistema de coordenadas, tal que transforme os versores

$$\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}'_j = R^i_j \mathbf{e}_i. \quad (2.15)$$

Podemos obter a expressão para o vetor \mathbf{v} em termos da base transformada observando que

$$\mathbf{v} = v_i [R^{-1}]^i_j R^i_j \mathbf{e}_i, \quad (2.16)$$

onde R^{-1} é a transformação inversa, isto é, $[R^{-1}]^i_j R^i_j = \delta_{ij}$. Assim vemos que o vetor inicial pode ser escrito nas novas coordenadas como

$$\mathbf{v} = v'_j \mathbf{e}'_j, \quad (2.17)$$

com

$$v'_j = v_i [R^{-1}]^i_j. \quad (2.18)$$

Observe que as componentes do vetor se transformam de acordo com a inversa da transformação aplicada nas coordenadas. Vetores que se comportam dessa forma são chamados *contravariantes*. Ao generalizarmos o espaço vetorial para geometrias não Euclidianas (espaços curvos), veremos que estes vetores pertencem ao *espaço tangente*.

Há vetores que não se comportam dessa forma. O vetor gradiente de uma função, por exemplo, tem suas componentes transformadas do mesmo modo que as coordenadas. Estes são chamados vetores *covariantes*, e nos espaços vetoriais curvos pertencem ao *espaço cotangente*. Para descrever esses dois tipos de vetores, usamos duas bases distintas e complementares, indicando com índices inferiores os vetores contravariantes, e com índices superiores os vetores covariantes. Assim,

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i \quad (2.19)$$

é um vetor contravariante, e

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i \quad (2.20)$$

é um vetor covariante.

O interesse na classificação de vetores como contravariantes e covariantes reside no fato de que o produto vetorial de pares desses vetores resulta num invariante por transformação R das coordenadas. De fato,

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = u^i v_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j, \quad (2.21)$$

onde, por definição,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j, \quad (2.22)$$

o que significa que para cada versor \mathbf{e}_i existe um versor dual ortogonal \mathbf{e}^i .

Note que após a transformação esse produto resulta em

$$u^i v_i \rightarrow u'^i v'_i = u^j [R^{-1}]_j^i R_i^j v_j = u^j v_j, \quad (2.23)$$

ou seja, o produto escalar $\mathbf{u}\mathbf{v}$ é um invariante por transformação das coordenadas. Em particular, a norma ou módulo do vetor é conservado.

Visto que existem dois tipos de vetores, que se comportam de modo diverso sob uma transformação de coordenadas, podemos voltar ao estudo de como essas transformações afetam cada um dos tipos de vetores.

Na figura (2.2) vemos as linhas determinadas pelas funções $x'_1(x_1, x_2)$ e $x'_2(x_1, x_2)$. Observe que, dado um vetor \mathbf{s} no espaço tangente, temos

$$\mathbf{e}^i = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial q_i}. \quad (2.24)$$

Se a transformação leva as coordenadas $q \rightarrow q'$, temos

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial q_i} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial q'_j}, \quad (2.25)$$

e como

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial q'_j} = \mathbf{e}'^j \quad (2.26)$$

temos que

$$\mathbf{e}^i = \frac{\partial q'_j}{\partial q_i} \mathbf{e}'^j, \quad (2.27)$$

e portanto

$$\mathbf{e}'^j = \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \mathbf{e}^i. \quad (2.28)$$

A componente do vetor contravariante pode ser facilmente obtido a partir da relação acima. De fato, temos

$$v'_i = \mathbf{v}\mathbf{e}'_i = v_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i. \quad (2.29)$$

Usando a relação para \mathbf{e}'_i , obtemos

$$v'_i = v_k \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \mathbf{e}^j, \quad (2.30)$$

e usando o fato de que

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^j = \delta_k^j \quad (2.31)$$

resulta que

$$v'_i = v_k \frac{\partial q_i}{\partial q'_k}. \quad (2.32)$$

Do mesmo modo, para um vetor covariante temos

$$\mathbf{e}'_j = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} \mathbf{e}_i \quad (2.33)$$

para os versores, e

$$v'^i = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} v^j. \quad (2.34)$$

para as componentes.

2.2.3 Estudo das rotações infinitesimais

É fácil generalizar as rotações para sistemas de três dimensões. Por exemplo, podemos considerar que as rotações mencionadas acima são rotações no plano xy , ou seja, no plano perpendicular ao eixo z . Nessas rotações, as componentes x e y dos vetores se modificam, mas a componente z permanece inalterada. A forma matricial para tal transformação fica sendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

As matrizes de rotação em relação aos outros eixos podem ser facilmente obtidas de modo análogo.

Um aspecto curioso das rotações finitas é o fato de elas não serem independentes da ordem em que rotações em relação a diferentes eixos são feitas. É fácil mostrar rigorosamente que a ordem das rotações importa, mas antes disso vamos verificar através de um exemplo simples como isso acontece.

Imagine que você tem um livro colocado sobre a mesa como mostrado na **Figura ??**, e estabelece o sistema de referência mostrado na mesma figura. Vamos aplicar rotações de um ângulo $\theta = \pi/2$ sucessivamente em relação a dois eixos diferentes: x e y . Num caso, aplicamos as rotações $R_y(\pi/2)R_x(\pi/2)$, ou seja, primeiro rotacionamos o livro em relação ao eixo x e depois em relação ao eixo y ; no segundo caso fazemos o contrário, aplicamos as rotações $R_x(\pi/2)R_y(\pi/2)$. É fácil ver, como mostra a figura, que o resultado final é diferente em cada caso. Isso acontece porque as rotações finitas são operações que não permitem: $R_y(\alpha)R_x(\theta) \neq R_x(\theta)R_y(\alpha)$ para α e θ finitos.

Matematicamente isso pode ser mostrado da seguinte forma. Por exemplo, considere rotações de 90° em torno dos eixos Z (matriz R_z) e do eixo X (matriz R_x). É fácil notar que $AB \neq BA$. De fato, temos

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) & 0 \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ 0 & -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daqui temos que

$$R_z R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$R_x R_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que $R_z R_x \neq R_x R_z$. Operadores que não são independentes da ordem de aplicação são chamados *operadores não-comutativos*, enquanto que os operadores em que a ordem não importa são chamados *operadores comutativos*.

As rotações infinitesimais, no entanto, apresentam uma característica diferente, pois elas são comutativas e rotações infinitesimais em torno de diferentes eixos podem ser consideradas comutativas. De forma geral, no espaço tridimensional, uma rotação infinitesimal pode ser representada assim:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3 \\ x'_2 &= x_2 + \varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2 + \varepsilon_{23}x_3 \\ x'_3 &= x_3 + \varepsilon_{31}x_1 + \varepsilon_{32}x_2 + \varepsilon_{33}x_3 \end{aligned}$$

onde ε_{ij} são infinitésimos. O anterior pode-se escrever de forma matricial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Das relações anteriores temos

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{I} + \mathbf{E})\mathbf{x}$$

onde \mathbf{I} é a matriz unidade e $\mathbf{I} + \mathbf{E}$ é o operador de uma rotação infinitesimal. Sejam agora duas rotações infinitesimais

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_1 \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_2$$

Temos que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$$

e

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$$

Se os infinitésimos de ordem superior não são considerados:

$$\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = 0.$$

Isto pode ser feito somente enquanto $\mathbf{E}_1 \sim 0$ e $\mathbf{E}_2 \sim 0$, ou seja, a sequência de rotações deve incluir uma rotação infinitesimal em torno de um eixo seguida de outra rotação infinitesimal em torno de outro eixo.

Então

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

e

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

Com isso concluímos que as rotações infinitesimais são comutativas. Claramente, qualquer rotação finita pode ser obtida por uma sequência apropriada de rotações infinitesimais. O esquema chamado Rotações de Euler são usados com frequência no contexto da Mecânica Clássica.

O ponto mais importante, neste momento, do que vimos sobre transformações de coordenadas, é o fato de que as novas coordenadas são relacionadas às antigas através de funções contínuas e que consideraremos infinitamente deriváveis (ou classe C^∞), do tipo

$$x'_i = x'_i(x_1, \dots, x_n). \quad (2.36)$$

Este será um aspecto importante no estudo do Princípio de D'Alembert e na obtenção, a partir deste princípio, das Equações de Lagrange, no próximo capítulo.

Rotações de Euler

É bastante comum nos livros-textos adotar uma sequência de rotações infinitesimais chamadas de Rotações de Euler. A figura ?? mostra a sequência de rotações infinitesimais, que se dão em torno dos eixos z_0, x_1, z_2 , sendo z_0 o eixo na direção z inicial, x_1 indica a direção do eixo x após a rotação em torno de z_0 , e z_2 indica a direção do eixo z após a rotação em torno de x_1 .

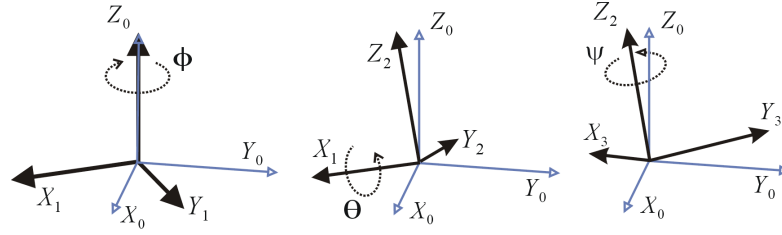


Figure 2.3: Sequência de rotações infinitesimais chamadas de Rotações de Euler. Autor: DF Malan, obra de domínio público.

A representação matricial dessa sequência de rotações pode ser facilmente obtida, já que a primeira rotação em torno do eixo z é dada por

$$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos(d\phi) & \sin(d\phi) & 0 \\ -\sin(d\phi) & \cos(d\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para a segunda rotação, temos

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 1 \end{pmatrix},$$

e para a terceira rotação temos

$$\mathbf{R}_{z'} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d\psi & 0 \\ -d\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A última igualdade à direita corresponde à aproximação linear da transformação. A combinação dessas três rotações fica, até primeira ordem na variações infinitesimais dos ângulos,

$$\mathbf{R}_{z'}\mathbf{R}_x\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} 1 & d\phi + d\psi & 0 \\ -d\phi - d\psi & 1 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Observe que a transformação final pode ser escrita como

$$\mathbf{R}_{z'}\mathbf{R}_x\mathbf{R}_z = \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.38)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & d\phi + d\psi & 0 \\ -d\phi - d\psi & 0 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Comparando a matriz acima com a relação entre produto vetorial e matriz de rotação, vemos que o vetor obtido após a rotação pode ser descrita como

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r} \times d\Omega \mathbf{n}, \quad (2.40)$$

onde o vetor \mathbf{n} é tal que

$$d\Omega \mathbf{n} = d\theta \mathbf{i} + (d\phi + d\psi) \mathbf{k}. \quad (2.41)$$

A relação acima mostra que existe um isomorfismo entre operação de matrizes e o produto vetorial, ambos reproduzindo os efeitos da rotação de vetores. Esse isomorfismo aparece em vários aspectos da Mecânica Clássica e Quântica, bem como na teoria de campos clássicos.

Observe que um vetor pode variar devido à rotação do sistema de coordenadas, como dado pela equação (2.40), que vamos chamar de *rotação passiva*. Neste tipo de transformação, podemos supor um referencial, R , no qual o vetor permanece fixo, e outro, R' , que gira em relação ao primeiro. As componentes do vetor não mudam em relação a R , mas varia em relação a R' de acordo com a equação (2.40). Podemos considerar uma outra situação em que o vetor varia por uma transformação de rotação em relação ao vetor fixo. Neste caso, há uma *rotação ativa*, já que o sistema permanece fixo enquanto as componentes do vetor mudam. Claro que há uma arbitrariedade na definição do que é um vetor fixo, mas a linguagem estabelecida aqui permite a descrição da rotação de um vetor em todos os casos possíveis.

A rotação do vetor no sistema R deve, então, descontar a rotação do sistema girante, então a variação do vetor por rotações infinitesimais fica dada por

$$dr = dr_A - \mathbf{r} \times d\Omega \mathbf{n}. \quad (2.42)$$

Se o sistema girante rotaciona com velocidade constante no tempo dada por $\omega = d\Omega/dt$, então

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.43)$$

onde o vetor velocidade angula é dado por $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$.

2.2.4 Tensores

Os conceitos introduzidos no caso de vetores podem ser generalizados para tensores de ordens arbitrária. Um tensor contravariante, $T^{k_1 k_2 \dots k_p}$ de ordem p é tal que se transforma segundo a lei

$$T'_{k_1 k_2 \dots k_p} = \frac{\partial q_{k_1}}{\partial q'_{l_1}} \frac{\partial q_{k_2}}{\partial q'_{l_2}} \dots \frac{\partial q_{k_p}}{\partial q'_{l_p}} T_{l_1 l_2 \dots l_p}. \quad (2.44)$$

Do mesmo modo, um tensor covariante de ordem p é definido por

$$T^{k_1 k_2 \dots k_p} = \frac{\partial q^{k_1}}{\partial q^{l_1}} \frac{\partial q^{k_2}}{\partial q^{l_2}} \dots \frac{\partial q^{k_p}}{\partial q^{l_p}} T^{l_1 l_2 \dots l_p}. \quad (2.45)$$

A partir dos dois tipos de tensores descritos acima, podemos construir tensores mistos. Um tensor de ordem (p, q) de modo que

$$T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{k_1 k_2 \dots k_q} = \frac{\partial q_{k_1}}{\partial q^{l_1}} \frac{\partial q_{k_2}}{\partial q^{l_2}} \dots \frac{\partial q_{k_q}}{\partial q^{l_q}} \frac{\partial q^{i_1}}{\partial q^{j_1}} \frac{\partial q^{i_2}}{\partial q^{j_2}} \dots \frac{\partial q^{i_p}}{\partial q^{j_p}} T^{j_1 j_2 \dots j_p}_{l_1 l_2 \dots l_q}. \quad (2.46)$$

2.3 Analiticidade

Outro aspecto importante é a redução do número de graus de liberdade. Podemos entender isso como uma redução no número de coordenadas necessárias para descrever o problema. No exercício do lançamento de um corpo sob ação da força peso sobre um plano inclinado, reduzimos o espaço de 3 dimensões para duas dimensões, sendo que as novas dimensões descreviam um plano inclinado em relação ao plano xy . No caso da conta deslizando pelo fio, igualmente reduzimos o espaço descritivo de 3 dimensões para 1 dimensão. Neste caso, o espaço é uma linha curva com o formato do fio.

Em todos os casos de interesse para nós, essa redução implica em passar do espaço euclidiano R^3 para um outro espaço, \mathcal{M} de dimensão inferior. Se tivéssemos N corpos no sistema, o número de graus de liberdade seria $3N$, e o novo espaço seria com dimensão inferior ao, dependendo do número de graus de liberdade eliminados.

O espaço \mathcal{M} é um subconjunto de pontos do espaço euclidiano original, que pode receber um sistema de referência próprio, e é chamado *variedade*. Note que \mathcal{M} não precisa ser um plano ou uma reta, como aconteceu no caso da conta deslizando no fio. em geral esse espaço é curvo. Funções infinitamente deriváveis com múltiplas variáveis descrevem superfícies num espaço de dimensão superior. Superfícies curvas, como o relevo de uma região montanhosa, são um exemplo de variedade imersa no espaço euclidiano tridimensional. O fio espiralado do exercício do capítulo anterior também é um exemplo, neste caso de uma variedade de dimensão 1.

Seja $\mathcal{M} = \mathcal{M}(x_1, \dots, x_n)$, a função que descreve uma superfície qualquer. Sendo diferenciável, uma variação da infinitesimal das coordenadas x_i leva a uma variação da função dada por

$$\delta \mathcal{M} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_i} dx_i. \quad (2.47)$$

Além disso, como acontece quando nos deslocamos numa região montanhosa, sempre que nos encontramos num determinado ponto da montanha, a nossa altura em relação ao nível do mar é a mesma, não importa o caminho seguido para se chegar àquele ponto. é fácil mostrar que essa condição leva à identidade

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (2.48)$$

Os conceitos apresentados aqui formam um conjunto de ferramentas para se estudar a Mecânica Clássica de um ponto de vista que resulta ser bastante geral, e pode ser chamado de Mecânica Analítica. A teoria resultante tem um carácter central em toda a física, tanto clássica quanto moderna, já que os mesmos conceitos são estendidos para a Mecânica Relativística e para a Mecânica Quântica. A compreensão desta teoria favorecerá a compreensão de todos os demais aspectos teóricos da Física.

2.4 Exercícios e Problemas

1. Mostre que toda matriz real com determinante não nulo pode ser diagonalizada.
2. Mostre que a matriz dada pela equação (2.39) é relacionada à expressão vetorial dada pela equação (2.40).
3. Mostre que uma função analítica deve apresentar a propriedade descrita na equação (2.48).

Capítulo 3

Movimento de Corpo Rígido

3.1 Introdução

Um dos exemplos mais importantes de sistemas com vínculos é o corpo rígido, isto é, um sistema complexo, com várias partes cujas posições relativas permanecem sempre inalteradas. Na maior parte dos casos, os objetos mais frequentes no nosso cotidiano podem ser considerados, com boa precisão, como corpos rígidos.

Se considerarmos os corpos como formados por átomos, há um enorme número de partículas formando os sistemas contínuos, da ordem de 10^{23} partículas por grama, grosso modo. Seria impensável descrever o movimento de um corpo rígido por meio da descrição de cada um de seus componentes. Porém, a sua rigidez impõe vínculos que reduzem o número de graus de liberdade do sistema de um modo radical. Em geral, para designar a posição de um corpo estenso precisamos de seis graus de liberdade: três para indicar a posição do centro de massa e três para indicar a orientação do corpo, ou, de forma equivalente, a posição de um outro ponto fixo do corpo.

Note que aqui já estamos usando os vínculos de um corpo rígido. Se fosse um gás monoatômico, por exemplo, o sistema teria $3N$ graus de liberdade, onde N é o número de partículas livres do gás. Para um sistema de alguns gramas, $N \approx 10^{23}$, e o número de graus de liberdade do gás é muito grande. Portanto, para o corpo rígido, o fato de a posição relativa de duas partes quaisquer do corpo se manter fixa leva a uma enorme redução do número de graus de liberdade. No caso do gás, técnicas estatísticas são usadas para tratar de um sistema tão complexo.

Assim, dizemos que o corpo rígido tem três graus de liberdade, as três direções espaciais de rotação, já que sempre podemos escolher um referencial em que o seu centro de massa está em repouso na origem. Descrever o

movimento do corpo rígido se resume a descrever as suas possíveis rotações.

3.2 Rotações do Corpo Rígido

Vamos supor uma combinação de três rotações infinitesimais ao redor dos eixos cartesianos, um ângulo $d\theta_x$ ao redor do eixo x , um ângulo $d\theta_y$ ao redor do eixo y e um ângulo $d\theta_z$ ao redor do eixo z , desta forma podemos considerar três velocidades angulares

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{d\theta_x}{dt} \\ \omega_y = \frac{d\theta_y}{dt} \\ \omega_z = \frac{d\theta_z}{dt} \end{cases} \quad (3.1)$$

A rotação ao redor do eixo x é:

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix}$$

Para o caso infinitesimal $\theta_x \rightarrow d\theta_x$ temos:

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta_x \\ 0 & -d\theta_x & 1 \end{pmatrix}$$

igualmente as outras rotações podem ser representadas assim:

$$\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ d\theta_y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} 1 & d\theta_z & 0 \\ -d\theta_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo as três rotações simultaneamente e desprezando os infinitésimos de ordens superiores pode-se demonstrar que:

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} 1 & d\theta_z & -d\theta_y \\ -d\theta_z & 1 & d\theta_x \\ d\theta_y & -d\theta_x & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando essa rotação ao vetor \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{E}\mathbf{r}$$

a mudança diferencial do vetor é então:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = (\mathbf{E} - \mathbf{1})\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & d\theta_z & -d\theta_y \\ -d\theta_z & 0 & d\theta_x \\ d\theta_y & -d\theta_x & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}$$

Dividendo por dt :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & d\theta_z/dt & -d\theta_y/dt \\ -d\theta_z/dt & 1 & d\theta_x/dt \\ d\theta_y/dt & -d\theta_x/dt & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}$$

A equação matricial anterior é o mesmo que

$$\begin{cases} \mathbf{v}_x = \omega_z r_y - \omega_y r_z \\ \mathbf{v}_y = -\omega_z r_x + \omega_x r_z \\ \mathbf{v}_z = \omega_y r_x - \omega_x r_y. \end{cases}$$

Se definimos o vetor $\boldsymbol{\omega}$ tal que

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

então as relações obtidas anteriormente podem ser expressas por

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

3.2.1 Tensor Momento Momento Angular

O momento angular é:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

A seguir usamos a identidade do triplo produto vetorial:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

então

$$\mathbf{J} = m [\mathbf{r}^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}]$$

Temos

$$\mathbf{J} = m [\mathbf{r}^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}]$$

Fazendo a decomposição nas direções x, y, z temos

$$\begin{cases} J_x = m [(r^2 - r_x^2)\omega_x - r_y r_x \omega_y - r_z r_x \omega_z] \\ J_y = m [-r_x r_y \omega_x + (r^2 - r_y^2)\omega_y - r_z r_y \omega_z] \\ J_z = m [-r_x r_z \omega_x - r_y r_z \omega_y + (r^2 - r_z^2)\omega_z] . \end{cases}$$

Matricialmente pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} r^2 - r_x^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_y r_x & r^2 - r_y^2 & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & r^2 - r_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$$

os elementos matriciais de \mathbf{I} são:

$$I_{ij} = m(\delta_{ij}r^2 - r_{ij}^2)$$

A matriz \mathbf{I} é chamada tensor momento de inércia.

Até aqui consideramos um ponto de massa m no sólido rígido, agora, se consideramos um corpo contínuo, podemos considerar que temos um diferencial de volume dm então:

$$dI_{ij} = dm(\delta_{ij}r^2 - r_{ij}^2) = \rho(\mathbf{r})(\delta_{ij}r^2 - r_{ij}^2)dV$$

3.2.2 Eixos Principais

É possível encontrar um referencial onde \mathbf{I} seja diagonal, ou seja:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} = \mathbf{D} \tag{3.2}$$

onde a matriz \mathbf{D} é diagonal e representa a \mathbf{I} no referencial onde \mathbf{I} é diagonal.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

sendo λ_1, λ_2 e λ_3 os autovalores de \mathbf{D} .

Demonstremos que os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 também são os autovalores de \mathbf{I} , isto é,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{1}\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade. Das relações anteriores temos:

$$(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{1}\mathbf{x}) = 0$$

e portanto

$$(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Multiplicando por \mathbf{P} na esquerda temos

$$\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

e assim

$$\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Portanto

$$(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} - \lambda\mathbf{P}\mathbf{1}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ou ainda

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x}.$$

Com isso mostramos que as matrizes \mathbf{D} e \mathbf{I} têm os mesmos autovalores.

Agora temos que para passar do referencial original para o sistema eixos principais temos que fazer a seguinte transformação

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} = \mathbf{D}.$$

No referencial dos eixos principais temos que

$$\mathbf{D}\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}'.$$

O problema da determinação dos eixos principais no referencial inicial consiste em encontrar as componentes de \mathbf{x}' no referencial inicial. Para passar ao referencial original aplicamos \mathbf{P} à equação anterior:

$$\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{P}\mathbf{x}'$$

ou

$$\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{P}\mathbf{x}'$$

e usando $\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$ da equação 3.2 e $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}'$ chega-se a:

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Portanto, para determinar o vetor \mathbf{x} é preciso a determinação dos autovetores da matriz \mathbf{I} e a equação característica seria então

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

A equação anterior só tem solução se

$$\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1}) = 0$$

Vamos supor que seja conhecida a matriz \mathbf{I} no referencial inicial e seus autovalores λ_1 , λ_2 e λ_3 os quais podem ser calculados através da equação característica. É conhecido também o vetor $\boldsymbol{\omega}$ no referencial inicial. Para encontrar $\boldsymbol{\omega}'$ no referencial dos eixos principais, é preciso o cálculo da transformação \mathbf{P} que faz $\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{P}\boldsymbol{\omega}$. Essa transformação faz a rotação de qualquer vetor do referencial inicial para o referencial dos eixos principais, e em particular, dos versores que representam os eixos principais no referencial inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{x}$, que são os autovetores da matriz \mathbf{I} .

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Aplicando \mathbf{P} passamos ao referencial dos eixos principais, onde \mathbf{I} é a matriz diagonal formada pelos autovalores dela:

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{P}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}'$$

$$\mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}'$$

Do anterior temos que

$$\mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{D}$$

multiplicando o anterior por \mathbf{P}

$$\mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{D}\mathbf{P}$$

ou

$$\mathbf{P}\mathbf{I} = \mathbf{D}\mathbf{P}$$

A equação anterior é:

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Definindo os seguintes vetores:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{pmatrix}$$

a equação matricial fica:

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \mathbf{IP}_1 & \mathbf{IP}_2 & \mathbf{IP}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{P}_1 & \lambda_2 \mathbf{P}_2 & \lambda_3 \mathbf{P}_3 \end{pmatrix}$$

portanto temos que

$$\begin{cases} \mathbf{IP}_1 = \lambda_1 \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{IP}_2 = \lambda_2 \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{IP}_3 = \lambda_3 \mathbf{P}_3. \end{cases} \quad (3.3)$$

Pode-se observar que os vetores \mathbf{IP}_1 , \mathbf{IP}_2 e \mathbf{IP}_3 são os autovetores da matriz \mathbf{I} , portanto, a matriz de transformação \mathbf{P} está formada pelos autovetores de \mathbf{I} :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix}$$

Desta forma, calculando os autovetores de \mathbf{I} e formando a matriz de transformação \mathbf{P} , pode-se calcular a velocidade angular no referencial dos eixos principais através da equação

$$\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{P}\boldsymbol{\omega}.$$

A direção dos eixos principais corresponde exatamente à direção da componente associada da velocidade angular. Obviamente, no referencial dos eixos principais as direções desses eixos são determinadas pelos versores

$$\mathbf{x}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar os eixos principais no referencial inicial temos que fazer a transformação

$$\mathbf{x}_{1,2,3} = \mathbf{P}\mathbf{x}'_{1,2,3}$$

ou seja

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_2$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_3$$

3.2.3 Teorema dos eixos paralelos

A energia cinética de rotação o redor de um ponto é:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2.$$

Permutando os vetores do produto misto temos

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \cdot \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}}{2}, \quad (3.4)$$

e usando o valor de \mathbf{J} obtido anteriormente, segue que

$$\mathbf{J} = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i].$$

Assim, obtemos a expressão para a energia de rotação,

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \cdot \sum_i m_i [\mathbf{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i],$$

e sendo $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{n}}$ temos

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i [\mathbf{r}_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2]. \quad (3.5)$$

Podemos expandir a equação 3.4, obtendo

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} = \frac{\omega^2}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.6)$$

Aqui o escalar $I = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ representa o momento de inércia respeito ao eixo de rotação. Comparando as equações 3.5 e 3.6 concluímos que

$$I = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2].$$

Seja \mathbf{R} o vetor que va desde a origem O do referencial ao centro de massas do corpo, e \mathbf{r}_i e \mathbf{r}'_i os vetores que vão desde a origem do referencial O e desde o CM até a partícula i -ésima, respectivamente. Esses vetores devem satisfazer a equação

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i.$$

Com isso o momento de inércia fica dado por

$$I = \sum_i m_i [(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i)^2 - ((\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \cdot \hat{\mathbf{n}})^2],$$

e expandindo as potências segue que

$$I = \sum_i m_i \mathbf{R}^2 + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i{}^2 + 2 \sum_i m_i \mathbf{r}' \cdot \mathbf{R} - \sum_i m_i (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 - \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 - 2 \sum_i m_i (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2$$

e portanto

$$I = \mathbf{R}^2 \sum_i m_i + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i{}^2 + 2 \mathbf{R} \sum_i m_i \mathbf{r}' - (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \sum_i m_i - \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 - 2 (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} (\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) \cdot \hat{\mathbf{n}})^2$$

Observe que a somatória

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$$

pois no referencial do CM, este encontra-se na origem, e a soma dos vetores \mathbf{r}' é exatamente a posição do CM nesse referencial. Por outro lado,

$$\sum_i m_i = M,$$

então temos

$$I = \mathbf{R}^2 M + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i{}^2 - (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 M - \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2.$$

Agrupando os termos adequadamente, temos

$$I = \sum_i m_i [\mathbf{r}'_i{}^2 - (\mathbf{r}'_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2] + \mathbf{R}^2 M - (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 M$$

Observe que o termo dentro da somatória é o momento de inercia no referencial do CM

$$I_c = \sum_i m_i [\mathbf{r}'_i{}^2 - (\mathbf{r}'_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2].$$

Como o vetor \mathbf{R} pode ser expresso na forma

$$\mathbf{R} = R_n \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{R}_p,$$

onde \mathbf{R}_p é a componente de \mathbf{R} perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$. A distância entre os eixos paralelos de rotação inicial e do CM é $d = R_p$. Desta forma temos

$$I = I_c + \mathbf{R}^2 M - (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 M = I_c + (R_n^2 + R_p^2) M - R_n^2 M$$

e portanto

$$I = I_c + R_p^2 M = I_c + M d^2.$$

Este resultado é conhecido como Teorema dos Eixos Paralelos.

Energia Cinética de Rotação

Para um corpo em rotação livre de forças externas temos:

$$L = T$$

Se usamos o sistema de eixos principais (x', y', z') pode-se usar como variáveis generalizadas os ângulos de Euler que expressam a rotação do referencial (x', y', z') respeito ao referencial (x, y, z) . No referencial (x', y', z') temos

$$T = \frac{I_1 \omega_{x'}^2}{2} + \frac{I_2 \omega_{y'}^2}{2} + \frac{I_3 \omega_{z'}^2}{2}$$

onde as componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ e $\omega_{z'}$ tem a seguinte relação com os ângulos de Euler:

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_{y'} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_{z'} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2.4 Torque

Observe que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i} \right) = I_i \dot{\omega}_i, \quad (3.8)$$

onde $i = x', y', z'$. O lado esquerdo, de forma semelhante ao caso linear, está relacionado à aceleração angular. No caso linear teríamos $m\dot{a}_i$, e por semelhança vemos que o momento de inércia está relacionado à inércia do sistema para variação de seu estado de movimento. Como no caso linear este termo é igual à componente da força aplicada, no caso da rotação ele é a componente do torque, $\boldsymbol{\tau}$. O torque pode ser escrito, na ausência de forças dissipativas, em termos da energia potencial, V , de tal forma que

$$\boldsymbol{\tau}_i = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}, \quad (3.9)$$

onde $\alpha_i = \theta, \psi, \phi$. Por outro lado, também temos a igualdade

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{J}}{dt}, \quad (3.10)$$

sendo \mathbf{J} o vetor momento angular do sistema girante.

Note que, devido à equação (2.43), temos

$$\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt} \right)_R + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}, \quad (3.11)$$

e usando a relação acima para $\boldsymbol{\tau}$. temos

$$\begin{cases} \tau_1 = \left(\frac{dJ_1}{dt}\right)_R + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J})_1 \\ \tau_2 = \left(\frac{dJ_2}{dt}\right)_R + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J})_2 \\ \tau_3 = \left(\frac{dJ_3}{dt}\right)_R + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J})_3. \end{cases} \quad (3.12)$$

Como $\mathbf{J}_i = I_i \omega_i$, segue que

$$\begin{cases} \tau_1 = \left(\frac{dJ_1}{dt}\right)_R + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \\ \tau_2 = \left(\frac{dJ_2}{dt}\right)_R + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 \\ \tau_3 = \left(\frac{dJ_3}{dt}\right)_R + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2. \end{cases} \quad (3.13)$$

As equações anteriores são conhecidas como Equações de Euler para o corpo rígido.

3.3 Estudo do pião simétrico

Tomando o eixo z' como eixo de simetria, $I_1 = I_2$ e as equações de Euler ficam:

$$I_1 \dot{\omega}_{x'} = \omega_{y'} \omega_{z'} (I_1 - I_3)$$

$$I_1 \dot{\omega}_{y'} = -\omega_{z'} \omega_{x'} (I_1 - I_3)$$

$$I_3 \dot{\omega}_{z'} = 0$$

Da última destas equações temos que $\omega_{z'}$ é constante. Das duas primeiras equações pode-se obter:

$$\ddot{\omega}_{x'} = - \left[\frac{(I_1 - I_3)\omega_{z'}}{I_1} \right]^2 \omega_{x'}$$

que tem a seguinte solução

$$\omega_{x'} = A \sin \Omega t$$

e

$$\omega_{y'} = A \cos \Omega t$$

onde

$$\Omega = \frac{(I_1 - I_3)\omega_{z'}}{I_1}$$

Pode-se observar que o vetor $\omega_{x'}\mathbf{i} + \omega_{y'}\mathbf{j}$ tem módulo constante y gira uniformemente ao redor do eixo z' do corpo com uma frequência angular Ω

Para o pião simétrico:

$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_{z'}^2$$

e em função dos ângulos de Euler:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

A energia potencial é:

$$V = Mgl \cos \theta$$

onde l é a distância do CM à origem do referencial situado no ponto fixo do corpo.

Então a lagrangiana fica:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta$$

Pode-se olhar que ϕ e ψ são coordenadas cíclicas, portanto p_ϕ e p_ψ são constantes do movimento:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3\omega_{z'} = I_1a \quad (3.14)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi} \cos \theta = I_1b \quad (3.15)$$

onde são usadas as novas constantes a e b em função dos momentos generalizados constantes anteriores. Como o sistema é conservativo, a energia total E é também uma constante:

$$E = T + V = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3\omega_{z'}^2 + Mgl \cos \theta \quad (3.16)$$

De 3.14 temos

$$I_3\dot{\psi} = I_1a - I_3\dot{\phi} \cos \theta \quad (3.17)$$

Substituindo em 3.15:

$$I_2\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_1a \cos \theta = I_1b$$

ou

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (3.18)$$

Substituindo 3.18 em 3.17 temos:

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (3.19)$$

Da equação da energia pode-se definir uma nova constante

$$E' = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + Mgl \cos \theta \quad (3.20)$$

Substituindo 3.18 em 3.20 e reagrupando temos:

$$\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = \sin^2 \theta (\alpha - \beta \cos \theta) - (b - a \cos \theta)^2 \quad (3.21)$$

onde α e β são constantes:

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1} \quad \beta = \frac{2Mgl}{I_1}$$

Fazendo $u = \cos \theta$ temos:

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$$

Capítulo 4

Apêndice D: Estudo Dirigido de Corpo Rígido

1. Rotações finitas e consecutivas em geral não comutam, isto é, alterar a ordem em que rotações sucessivas ao redor de diferentes eixos leva a configurações finais diferentes. Porém, as rotações infinitesimais comutam. Discuta as diferenças entre esses dois casos.
2. Considere um corpo rígido que gira com velocidade angular ω em torno de um ponto fixo O .
 - 1) Quantos graus de liberdade tem o sistema?
 - 2) Determine a velocidade \mathbf{v} de um ponto do objeto na posição na posição \mathbf{r} em relação ao ponto O .
 - 3) Se nessa posição do corpo tivéssemos apenas uma partícula de massa m_i , mostre que o momento angular seria $\mathbf{J}_i = m_i[\mathbf{r}_i^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_i]$
3. Usando este resultado, mostre que para o corpo rígido podemos escrever $\mathbf{J} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$, onde \mathbf{I} é o tensor de inércia, cujas componentes são $I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r})(\mathbf{r}^2\delta_{ij} - \mathbf{x}_i\mathbf{x}_j)dV$, onde dV é o elemento de volume na posição \mathbf{r} . Podemos encontrar um sistema de coordenadas em que o tensor de inércia tem todas as suas componentes fora da diagonal nulas. Neste caso o sistema é chamado “eixos principais”.
4. Encontre a equação característica para a determinação dos eixos principais.
5. Determine a velocidade angular ω nesse sistema de coordenadas formado pelos eixos principais.

48CAPÍTULO 4. APÊNDICE D: ESTUDO DIRIGIDO DE CORPO RÍGIDO

6. Determine a direção dos eixos principais a partir da velocidade angular.
7. Determine a energia cinética de um corpo rígido em rotação.
8. Mostre que $I = I_c + Md^2$ onde I é o momento de inércia de um corpo que gira em torno de um eixo arbitrário, I_c é o momento de inércia do mesmo corpo girando em torno de um eixo paralelo ao anterior mas passando pelo centro de massa do sistema, M é a massa total do corpo e d é a distância entre os dois eixos. (Teorema dos eixos paralelos)
9. Obtenha a Lagrangeana de um corpo em rotação livre de forças externas.
10. Considere agora que existe um potencial externo que não depende da velocidade do corpo. Determine cada componente do torque sobre o sistema.
11. Descreva o movimento de um pião simétrico livre de torque.
12. Descreva o movimento de um pião simétrico sujeito à força peso.