



***PEF – 3528 – Ferramentas
Computacionais na Mecânica das
Estruturas Criação e Concepção***

**Valério S. Almeida - 2020
valerio.almeida@usp.br**



OBJETIVOS:

Fornecer aos alunos de graduação uma visão e aplicação prática da mecânica computacional para a análise de estruturas mediante seu contato com os conceitos teóricos da modelagem física do problema em conjunto com sua efetiva modelagem computacional com o uso de métodos matemáticos clássicos. Permitir que os alunos entendam como isso é desenvolvido pelo mercado e quais ferramentas utilizam esses conceitos.

PROGRAMA

- Elementos Finitos.
- Conceitos e comandos básicos e de linguagem computacional.
- Desenvolvimento de códigos computacionais na resolução de problemas lineares de estruturas.
- Métodos de solução.
- Introdução à Visualização Científica.
- Ferramentas e bibliotecas.

AVALIAÇÃO

- 1) trabalho parcial: entrega do programa que resolve estruturas planas reticuladas**
- 2) trabalho final que inclui o item (1) e a parte de interface**

SISTEMAS FÍSICOS:

Mecânica dos Fluidos, Mecânica das Estruturas, Transferência de Calor, Biomecânica, Geomecânica, Acústica.

Modelagem exata muito complexa

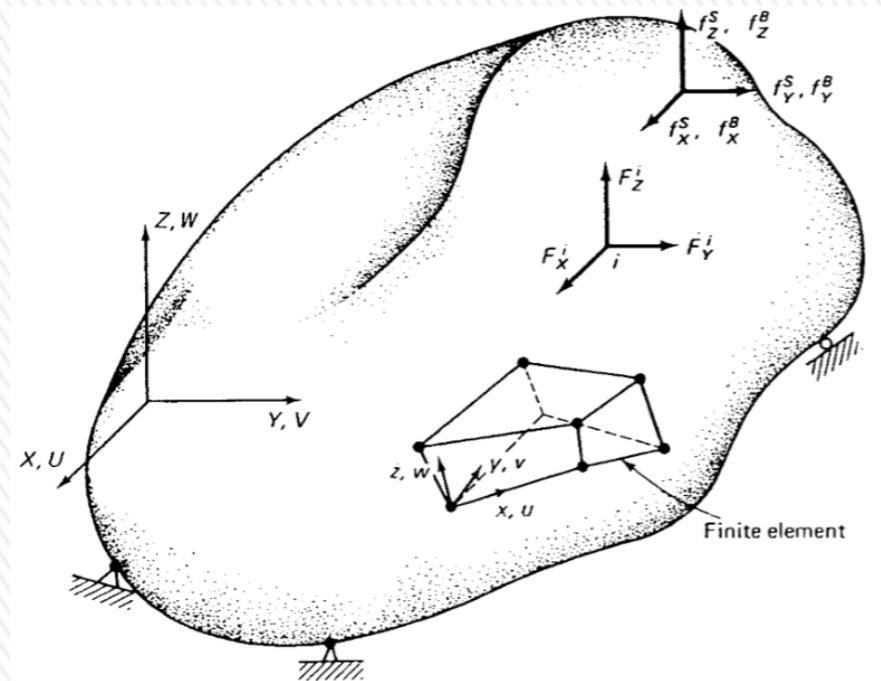
Resolução de equações diferenciais complexas e impossíveis muitas vezes.

EXEMPLOS DE SISTEMAS FÍSICOS

Problema da teoria da elasticidade considerando o meio homogêneo, isotrópico, estático e sofrendo pequenas mudanças de forma. O equacionamento em deslocamentos é expresso pela EDP elíptica de Laplace denominada de Eq. de Navier-Cauchy:

$$u_{i,jj}(s) + \frac{1}{1-2\nu} \cdot u_{j,ji}(s) + \frac{b_i(s)}{G} = 0 \quad i, j = 1,2,3$$

A equação de Navier-Cauchy não admite solução exata para casos gerais



Mecânica das Estruturas

Obter campos de deslocamentos, tensões, frequências das estruturas.

Se efeitos de inércia são considerados ou não:

Mecânica do Contínuo: Estática ou Dinâmica

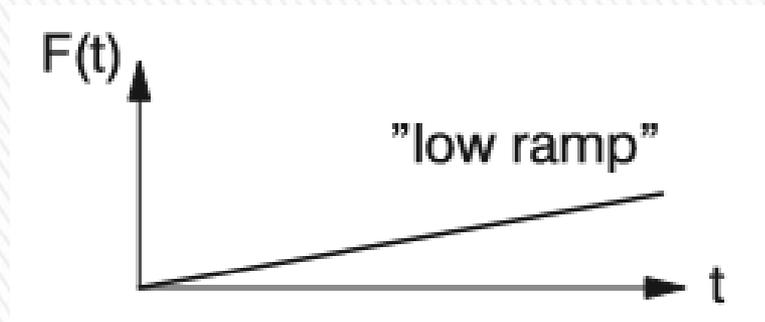
Dinâmica: dependência do tempo é necessária, que requer o cálculo de derivadas de forças inerciais (amortecimento) com respeito ao tempo;

Estática: problemas quase-estático. Em problemas de plasticidade, fluência, é necessário se guardar históricos de deformações (tensões), mas não dependem de forças inerciais.

Tipos de Carregamento:

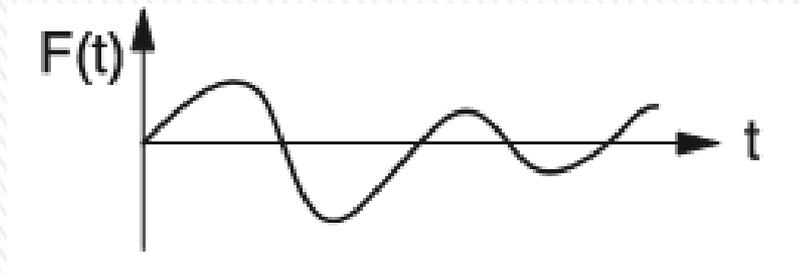
Estático: influencia dos efeitos inerciais são negligenciáveis;

Quase-Estático: há a dependência do tempo, sem forças inerciais, como em fluência (creep), cargas móveis;



Dinâmico: inercias têm que ser considerados: vento, terremoto, impactos.

$$F = m \cdot \ddot{a}$$



Mecânica das Estruturas

Análise de problemas estáticos:

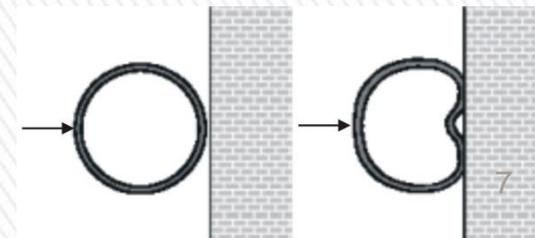
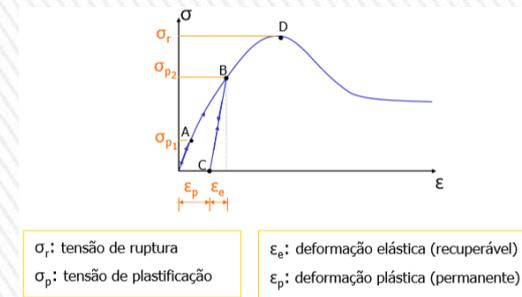
Linear: resposta linear no caso de causa e efeito. Se dobrar a força aplicada, dobra-se os deslocamentos e esforços.

Não-Linear (NL): casos não lineares, tipos:

Não linearidade Geométrica

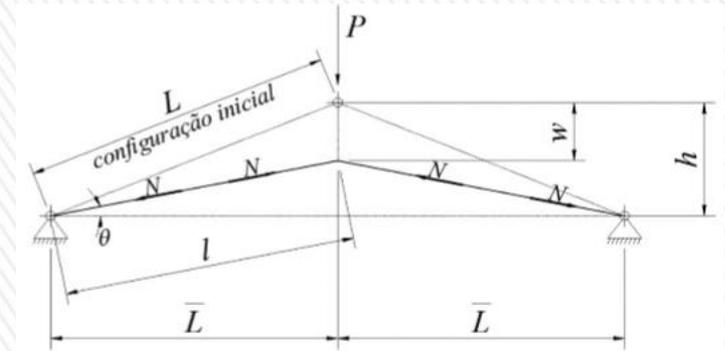
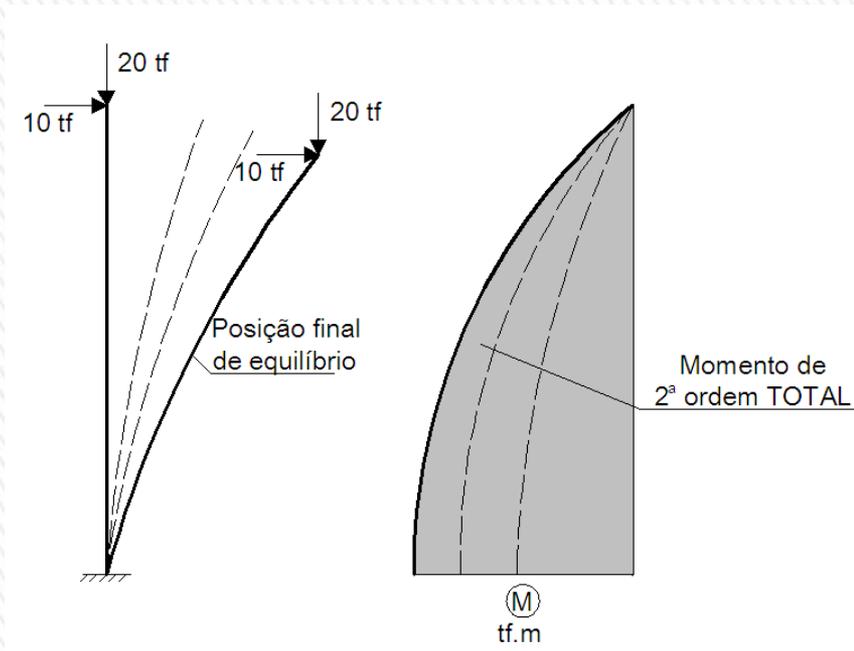
Não Linearidade Física

Não Linearidade de Contato



Problemas NL resolvidos em processos incrementais, simulando passos de tempo.

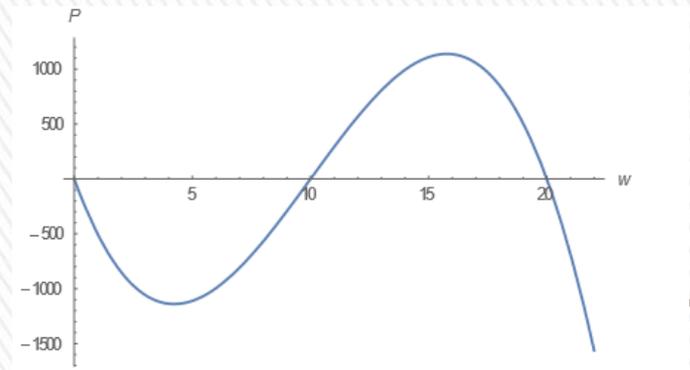
NL Geométrica: Equilíbrio na posição deformada



$$P = 2N \sin\theta = 2N \frac{h - w}{l}$$

$$l = \sqrt{\bar{L}^2 + (h - w)^2}$$

$$P(w) = 2EA \left(\frac{\sqrt{\bar{L}^2 + (h - w)^2} - \sqrt{\bar{L}^2 + h^2}}{\sqrt{\bar{L}^2 + h^2}} \right) \frac{h - w}{\sqrt{\bar{L}^2 + (h - w)^2}}$$



Processo incremental, nesse caso é analítico

NL Geométrica: Equilíbrio na posição deformada

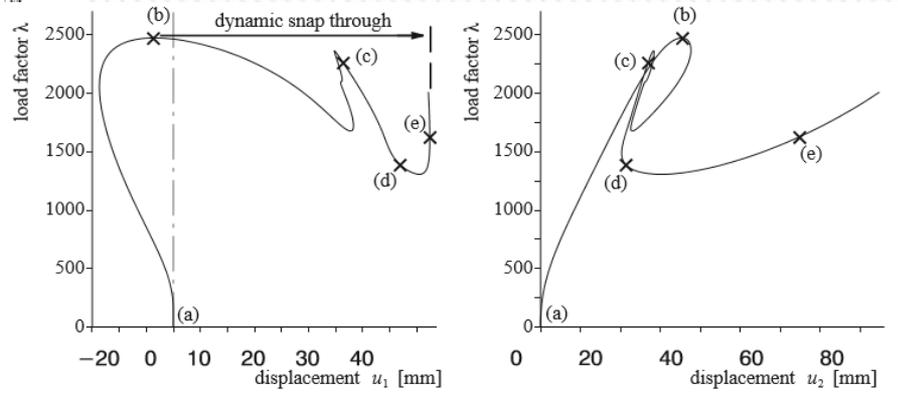
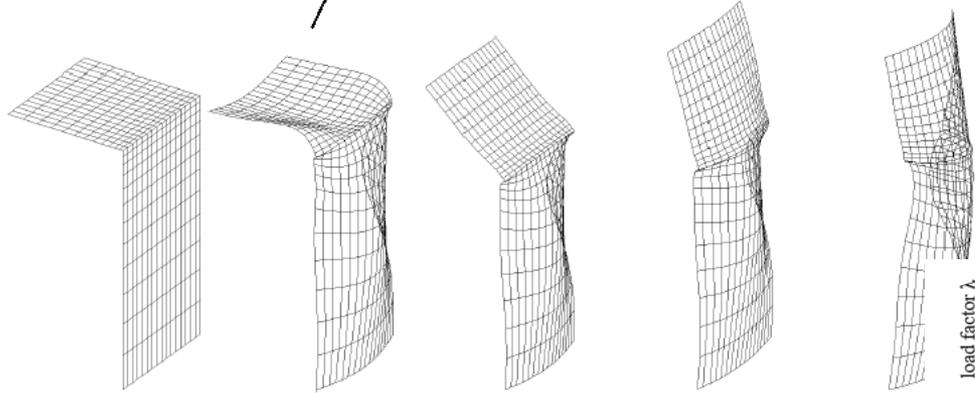
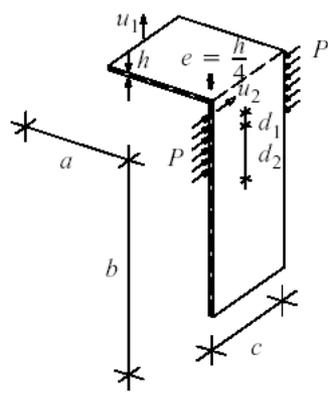
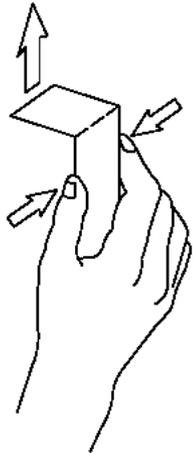
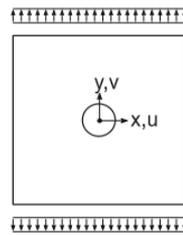
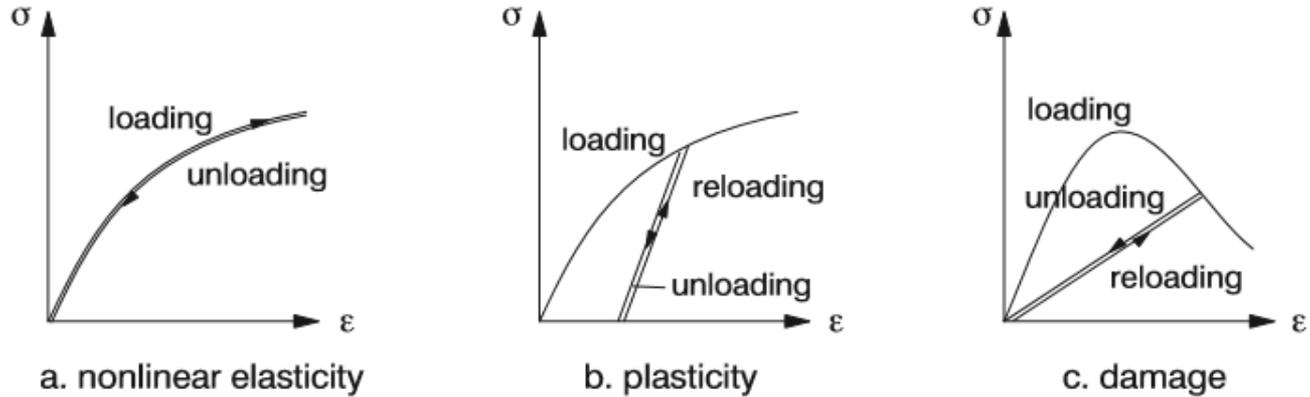


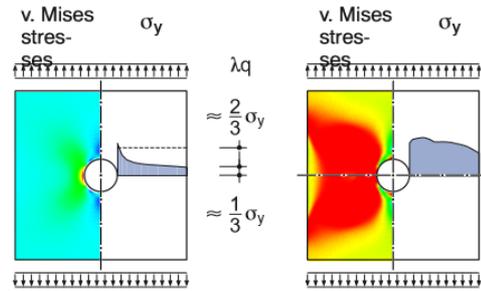
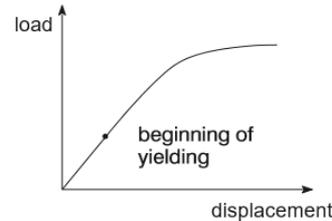
Figure 1.12: Geometrically nonlinear problem (M. Bischoff, PhD-thesis, 1999)

Processo incremental, nesse caso é complexo!

NL Física: Comportamento Constitutivo não é linear

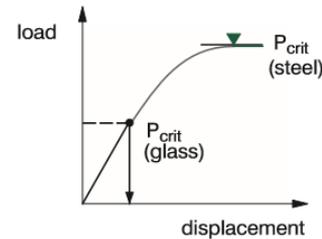


a. steel plate with hole under tension.



elasto-brittle material e.g. glass

elasto-plastic material e.g. steel



b. ductile vs brittle failure.

Material Frágil (rupt. abrupta) x Dúctil (redistribui tensão)

NL Contato



$P = 5\text{KN}$ e $d = 2.1\text{ mm}$

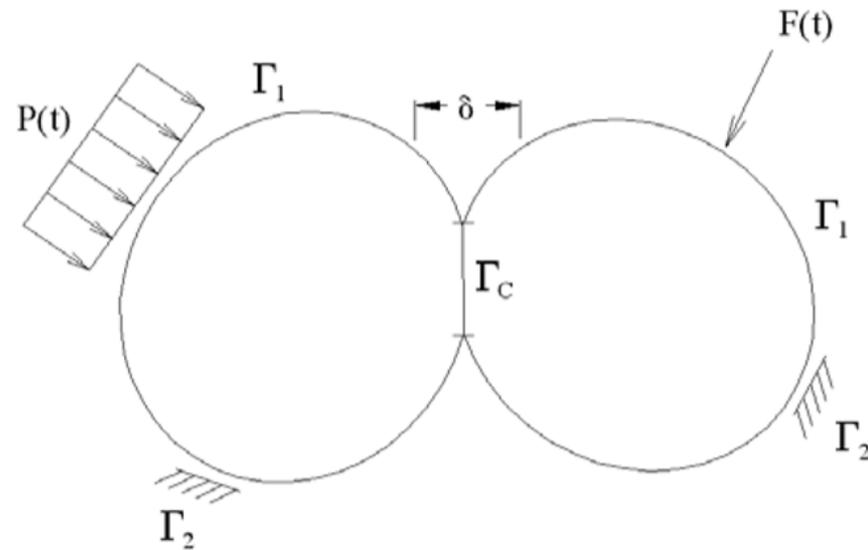


Figura 10 - Impacto entre dois corpos elásticos

Mecânica das Estruturas

Classificação das estruturas:

- Estruturas lineares (reticuladas):
 - treliça (plana, espacial);
 - pórtico plano (vigas e cabos);
 - pórtico espacial;
 - grelha;
- Estruturas de superfície:
 - estado plano: de tensões e deformações
 - placas e cascas
- Estruturas sólidas (3D): Ex. solo, blocos.

Classificação das estruturas:

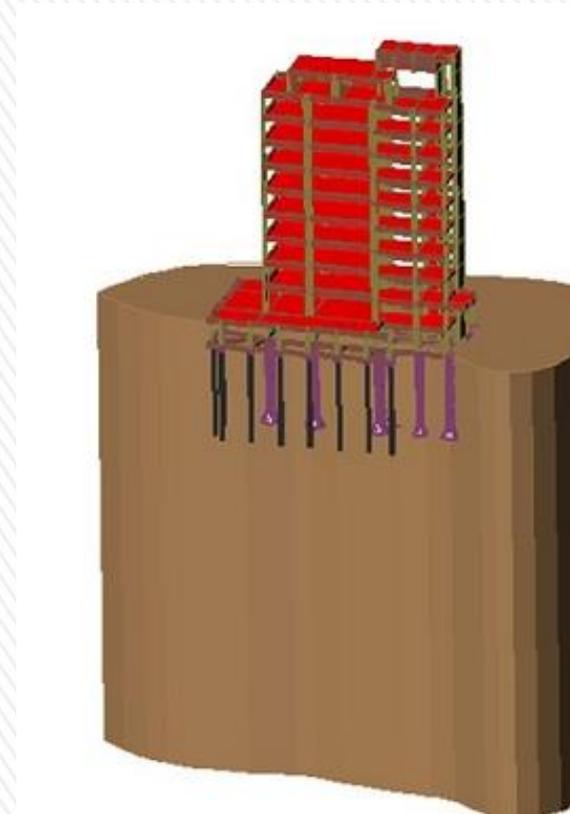


Vigas e pilares (1D)

Cascas (2D)

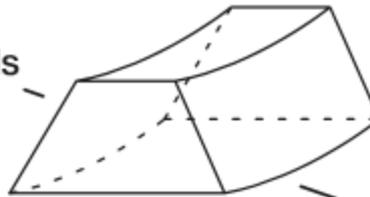


Solo (3D)



3-dim
body like
structures

solids



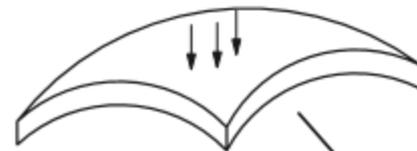
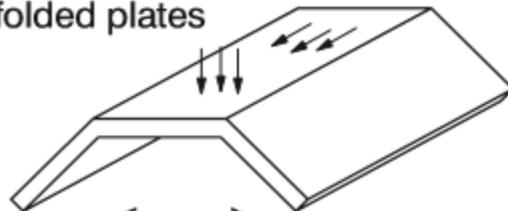
flat

curved

folded plates

shells

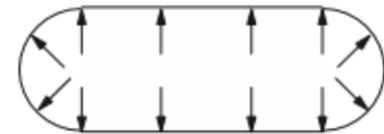
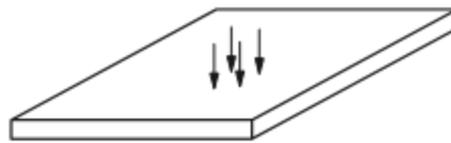
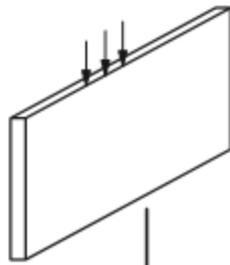
2-dim
"surface"
structures



walls
(plane stress & strain)

plates (slabs)

membranes

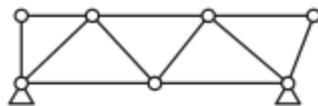
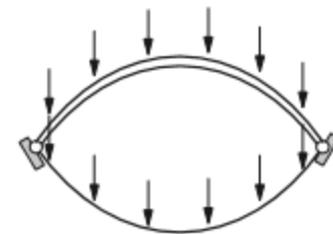


1-dim
"line"
structures

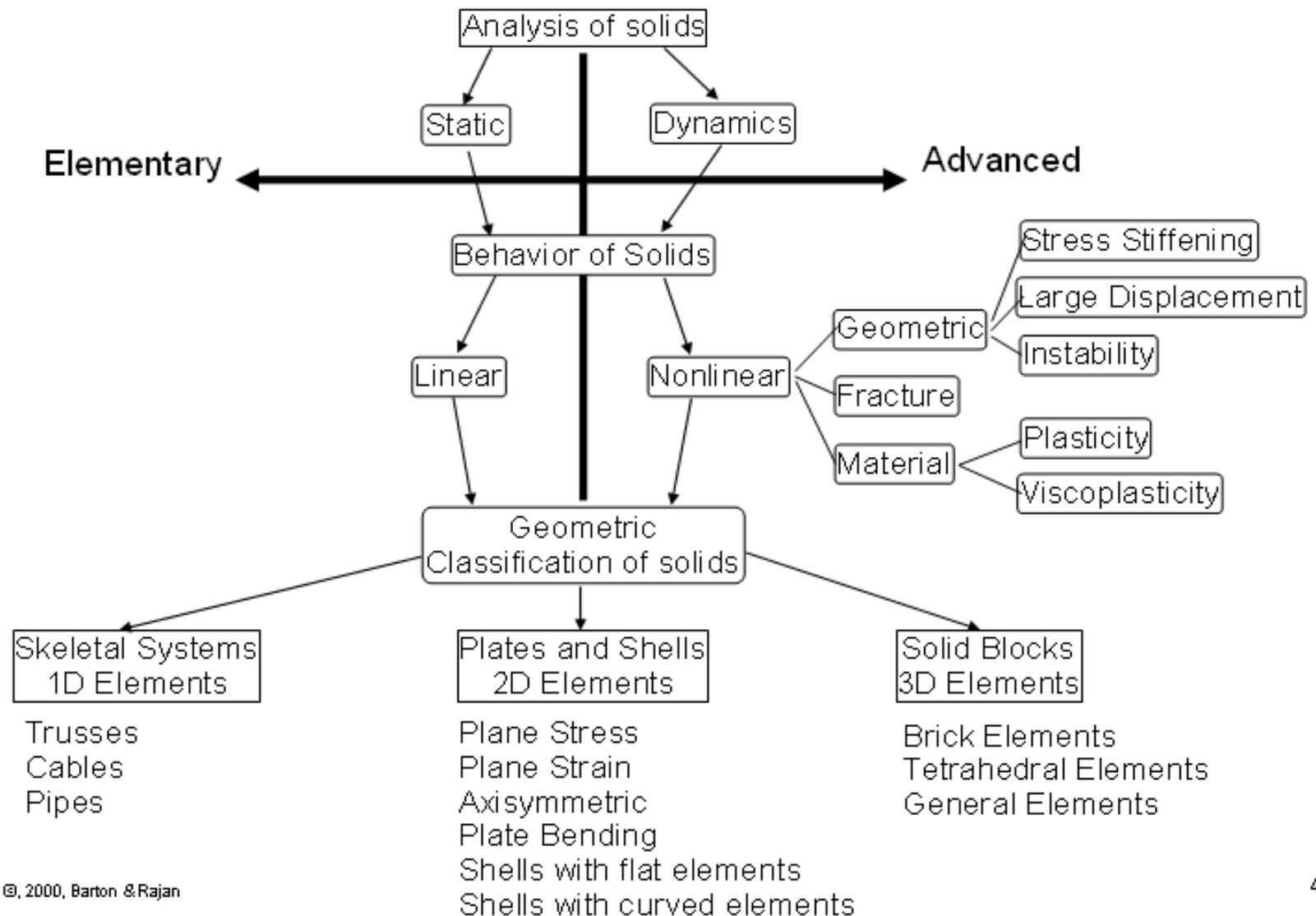
trusses

beams & frames

arches & cables



Classification of Solid-Mechanics Problems

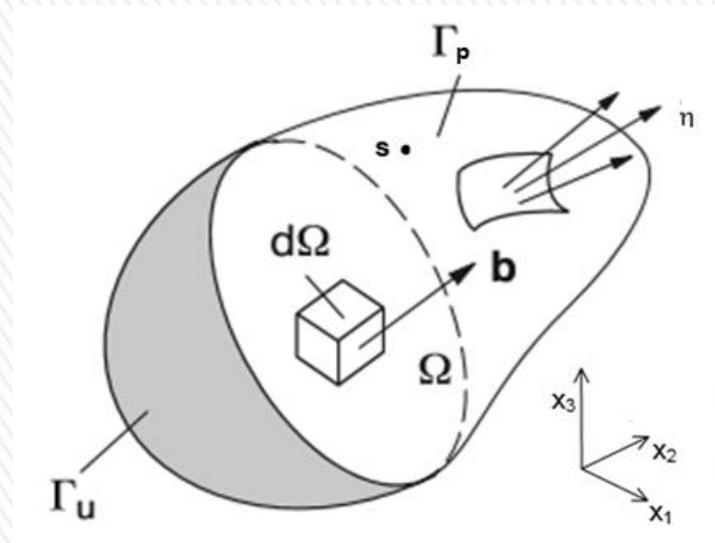


EDP: Sólido 3D

$$u_{i,jj}(s) + \frac{1}{1-2\nu} \cdot u_{j,ji}(s) + \frac{b_i(s)}{G} = 0 \quad i, j = 1,2,3$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{onde} \quad \Gamma = \Gamma_u \quad i = 1,2,3$$

$$p_i = \bar{p}_i \quad \text{onde} \quad \Gamma = \Gamma_p \quad i = 1,2,3$$

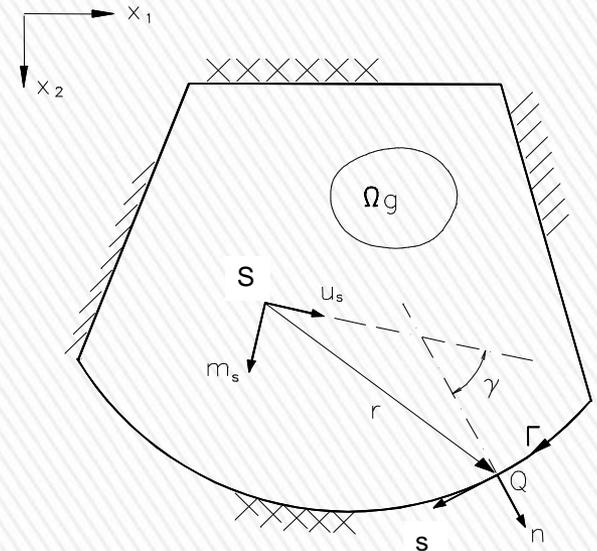


EDP: PLACA

Teoria clássica de placa de Kirchhoff

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

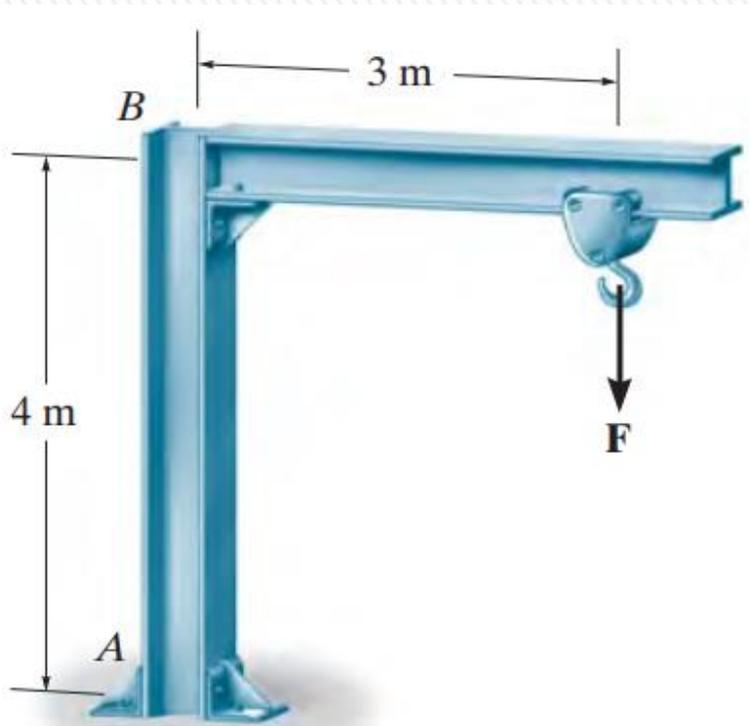


$$m_{ij} = -D[(1-\nu)w_{,ij} + \nu w_{,||} \delta_{ij}] \quad (i,j=1, 2)$$

Teoria de barras

O problema 3D pode ser reduzido ao espaço 1D:

$$L \gg a, b$$



Barras de eixos retos
prismáticos

Teoria clássica de viga de Euler-Bernoulli

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p_z}{D}$$

$$V = -\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} D$$

$$M = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} D$$

$$D = EI$$

Deslocamento axial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{p_x}{EA}$$

Representação da resposta real de um problema físico

Problema Real → Caract. complexas

Meio (Anisotropia, Não-homogeneidade, etc.)

Ação externa (Aleatória, Não-proporcional, etc.)

Condições de Contorno (Mista, unilateral, etc.)

Material com resposta não linear

Resposta Real → Obtenção Extrem. difícil

Resp. Problema Real → Idealização

Suavização das complexidades originais a partir de admissão de hipóteses para o problema

*Conjunto de hipóteses: **Modelo***

Representação matemática do modelo

Representação matemática de um modelo físico

a. Isolar uma região do fenômeno

Volume de controle

b. Aplicação de um princípio físico

1 Balanço de massa: conservação de massa

2 Balanço de momento: 2ª Lei de Newton

3 Balanço de energia: 1ª Lei da Termodinâmica

c. Obtenção das equações governantes

Equações Diferenciais

Equações Integrais

Elemento estruturais: representado por modelo matemático

Equações governantes

Métodos analíticos

Métodos numéricos
(discretos)

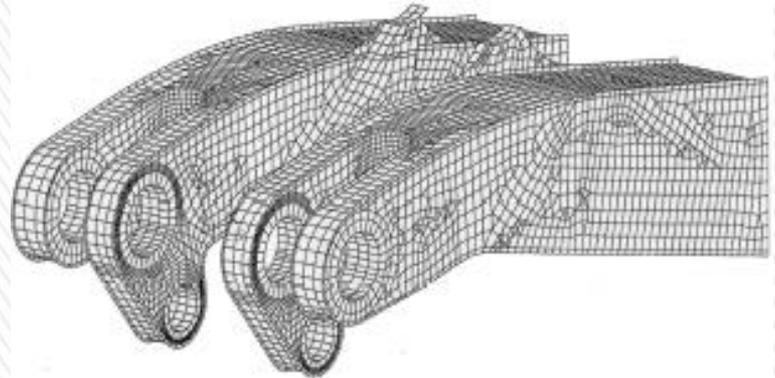
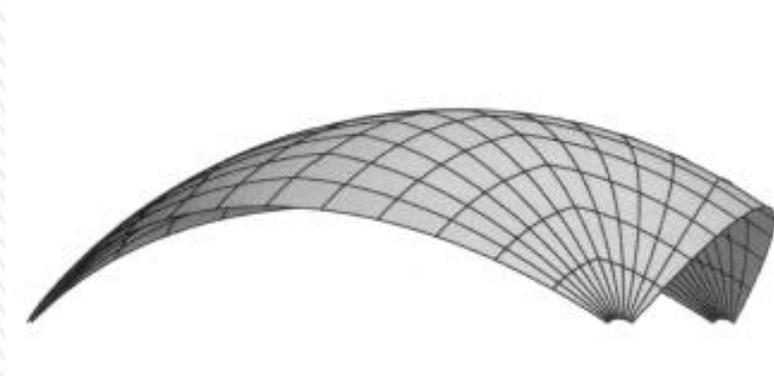
Soluções de problemas limitados

Exemplos:

Séries de Fourier (tabelas de lajes retangulares);
Eq. de Mindlin para solo (homogêneo semi-infinito)

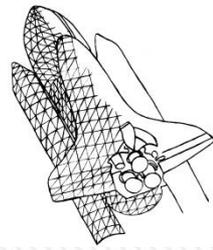
Problemas gerais

SIMULAÇÃO NUMÉRICA: Métodos numéricos

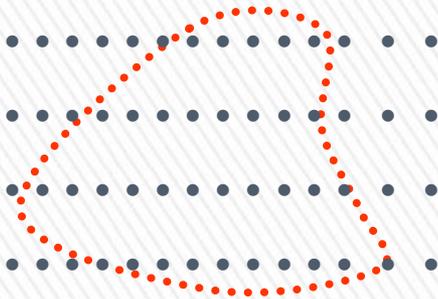


**Modelos complexos: de grande escala,
processos incrementais de cargas e de tempo.**

MÉTODOS APROXIMADOS

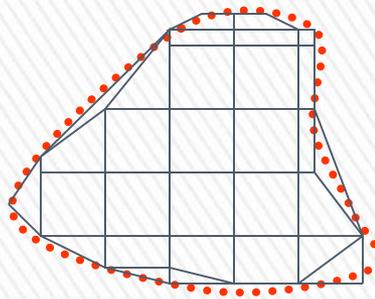


Métodos aproximados



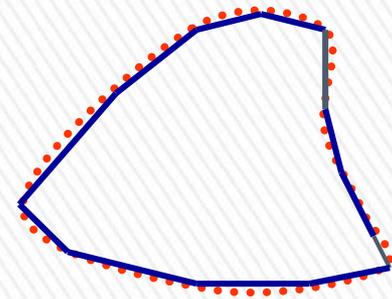
DF (1900)

Diferenças finitas



MEF (1955)

Elementos Finitos



MEC (1967)

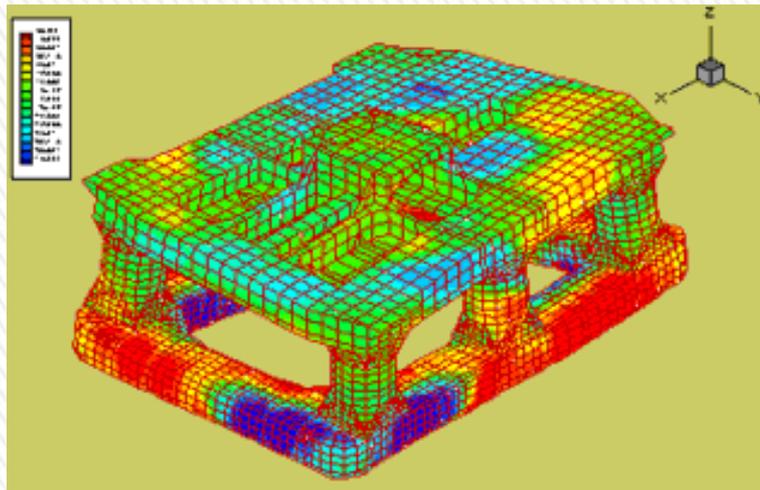
Elementos de Contorno

Alguns métodos numéricos

Métodos de Domínio (Ω):

MDF, MEF

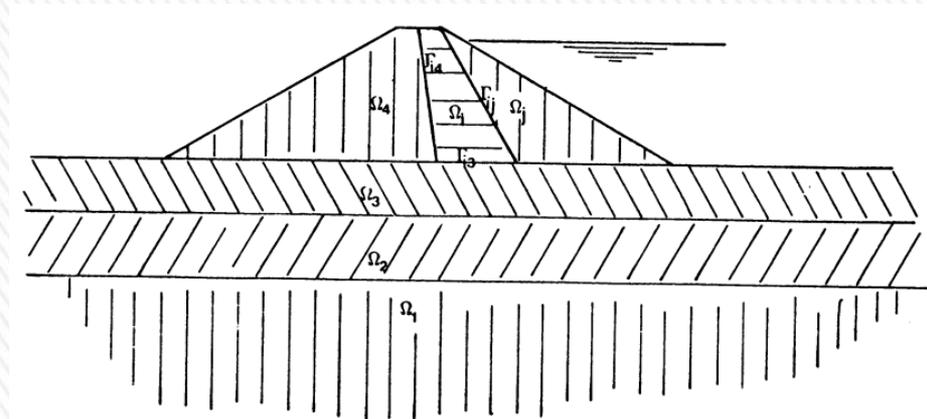
- Formulação + simples
- Discretizar todo o domínio
- Indicado p/ análise de Ω finitos

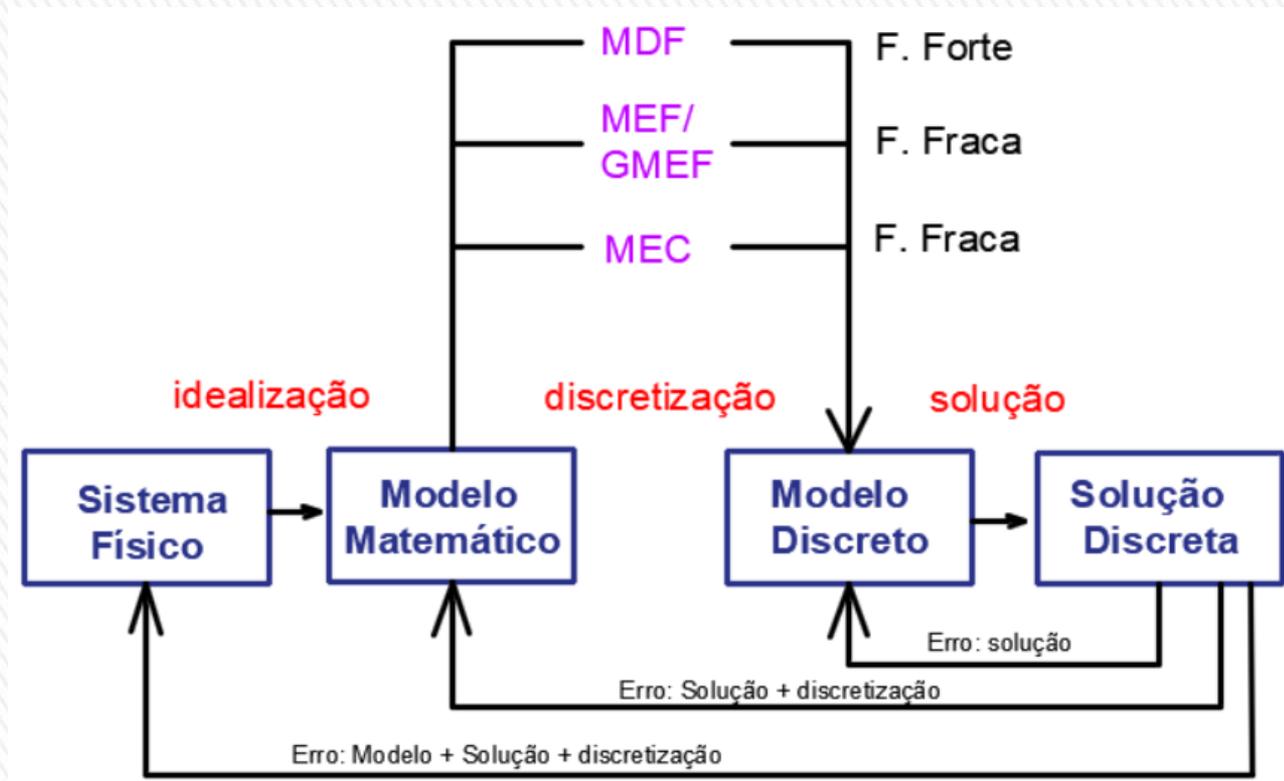


Método de Contorno (Γ):

MEC

- Formulação não tão convencional – integrais singulares
- Discretizar apenas o Γ de interesse
- Indicado p/ análise de Ω infinitos





Formulação Forte:

Diferenças Finitas

Formulação Fraca:

MEF, MEC

Diferenças Finitas

Discretização do domínio e a substituição das derivadas na ED por aprox. por valores numéricos das funções.

As derivadas são trocadas pela razão incremental que converge para o valor da derivada qdo o incremento tende a zero.

Diferenças Finitas: EDOs

Fórmula centrada (Molécula computacional)

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} y'''(\xi)$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi)$$

Aprox. de alta ordem (Molécula computacional)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{12\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \quad \text{central difference}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \quad \text{central difference}$$

Pros and cons of high-order difference schemes

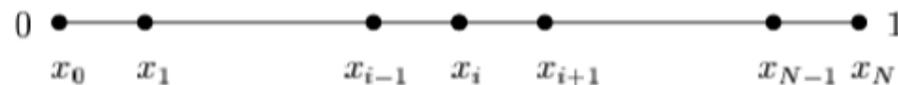
- ⊖ more grid points, fill-in, considerable overhead cost
- ⊕ high resolution, reasonable accuracy on coarse grids

Example: 1D Poisson equation

Boundary value problem

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad \text{in } \Omega = (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

One-dimensional mesh



$$u_i \approx u(x_i), \quad f_i = f(x_i) \quad x_i = i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{1}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Central difference approximation $\mathcal{O}(\Delta x)^2$

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} = f_i, & \forall i = 1, \dots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 & \text{Dirichlet boundary conditions} \end{cases}$$

Result: the original PDE is replaced by a linear system for nodal values

Example: 1D Poisson equation

Linear system for the central difference scheme

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1 \\ i = 2 \\ i = 3 \\ \dots \\ i = N - 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} -\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{(\Delta x)^2} \\ -\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{(\Delta x)^2} \\ -\frac{u_2 - 2u_3 + u_4}{(\Delta x)^2} \\ \dots \\ \frac{u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N}{(\Delta x)^2} \end{array} = \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_{N-1} \end{array}$$

Matrix form

$$Au = F$$

$$A \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1} \quad u, F \in \mathbb{R}^{N-1}$$

$$A = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

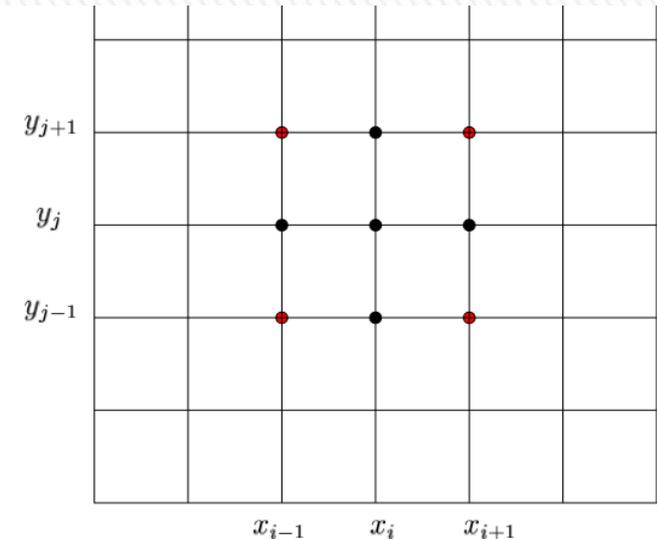
The matrix A is tridiagonal and symmetric positive definite \Rightarrow invertible.

Para EDPs 2D (placas, cascas):

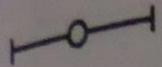
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)^2$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i-1,j} = \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)^2$$

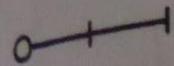


Molécula computacional (1D)



$$u'_k = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & \boxed{0} & +1 \end{bmatrix} u$$

$$-\frac{h^2}{6} u_k''' + \dots$$



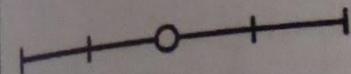
$$u'_k = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} \boxed{-3} & 4 & -1 \end{bmatrix} u$$

$$+\frac{h^2}{3} u_k''' + \dots$$



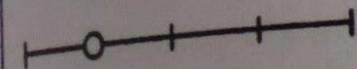
$$u'_k = \frac{1}{6h} \begin{bmatrix} -2 & \boxed{-3} & 6 & -1 \end{bmatrix} u$$

$$-\frac{h^3}{12} u_k^{iv} + \dots$$



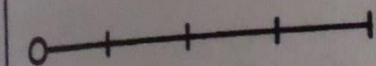
$$u'_k = \frac{1}{12h} \begin{bmatrix} 1 & -8 & \boxed{0} & 8 & -1 \end{bmatrix} u$$

$$-\frac{h^4}{30} u_k^v + \dots$$



$$u'_k = \frac{1}{12h} \begin{bmatrix} -3 & \boxed{-10} & 18 & -6 & +1 \end{bmatrix} u$$

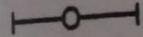
$$-\frac{h^4}{20} u_k^v + \dots$$



$$u'_k = \frac{1}{12h} \begin{bmatrix} \boxed{-25} & 48 & -36 & 16 & -3 \end{bmatrix} u$$

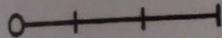
$$-\frac{h^4}{5} u_k^v + \dots$$

Molécula computacional (1D)



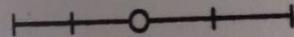
$$u''_k = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$-\frac{h^2}{12} u_k^{iv} + \dots$$



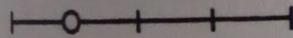
$$u''_k = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & -1 \end{bmatrix} u$$

$$+\frac{11h^2}{12} u_k^{vi} + \dots$$



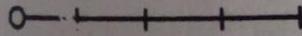
$$u''_k = \frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \end{bmatrix} u$$

$$+\frac{h^4}{90} u_k^{vi} + \dots$$



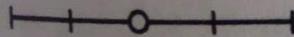
$$u''_k = \frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} 11 & -20 & 6 & 4 & -1 \end{bmatrix} u$$

$$-\frac{h^3}{12} u_k^v + \dots$$



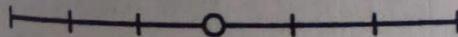
$$u''_k = \frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} 35 & -104 & 114 & -56 & 11 \end{bmatrix} u$$

$$-\frac{5h^3}{6} u_k^v + \dots$$



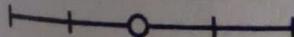
$$u'''_k = \frac{1}{2h^3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$-\frac{h^2}{4} u_k^v + \dots$$



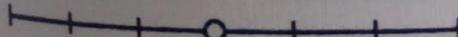
$$u'''_k = \frac{1}{8h^3} \begin{bmatrix} 1 & -8 & 13 & 0 & -13 & 8 & -1 \end{bmatrix} u$$

$$+\frac{7h^4}{120} u_k^{vii} + \dots$$



$$u_k^{iv} = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$-\frac{h^2}{6} u_k^{vi} + \dots$$

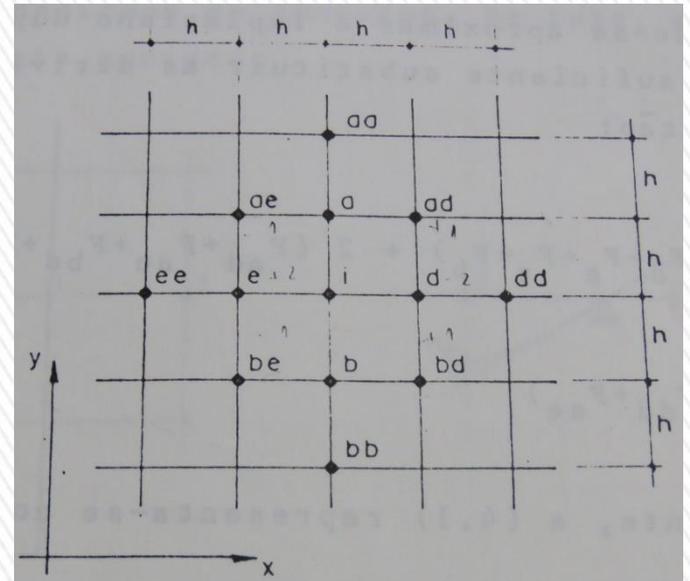


$$u_k^{iv} = \frac{1}{6h^4} \begin{bmatrix} -1 & 12 & -39 & 56 & -39 & 12 & -1 \end{bmatrix} u + \frac{7h^4}{240} u_k^{viii} + \dots$$

Molécula computacional (2D, placa)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$



$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right)_i = \frac{1}{h^4} (F_{dd} - 4F_d + 6F_i - 4F_e + F_{ee})$$

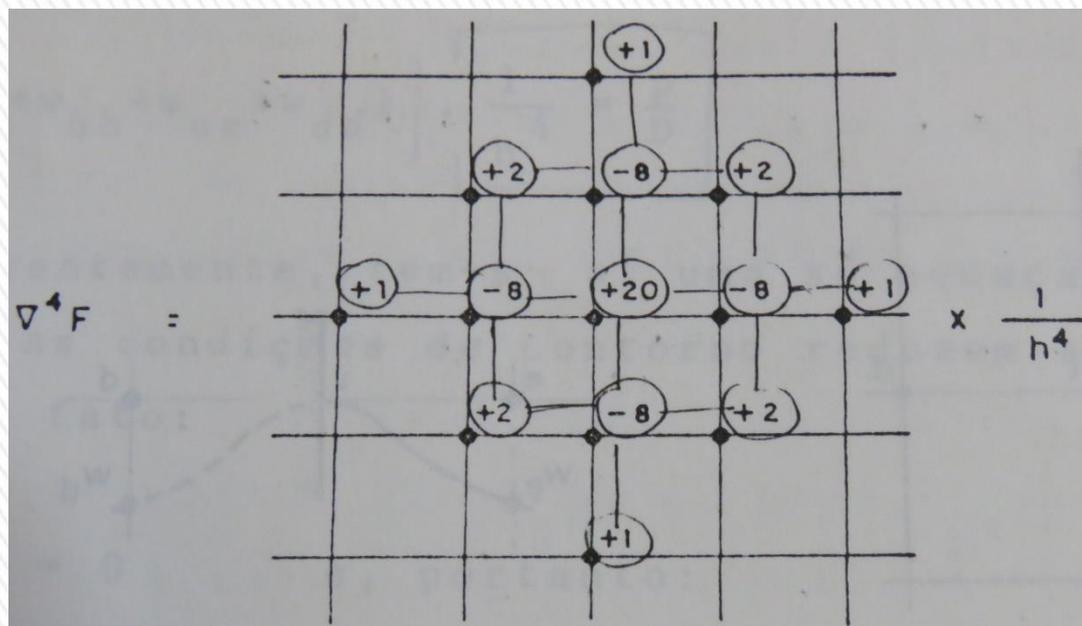
$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right)_i = \frac{1}{h^4} (F_{aa} - 4F_a + 6F_i - 4F_b + F_{bb})$$

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_i = \frac{1}{h^4} (F_{ad} - 2F_a + F_{ae} - 2F_d + 4F_i - 2F_e + F_{bd} - 2F_b + F_{be})$$

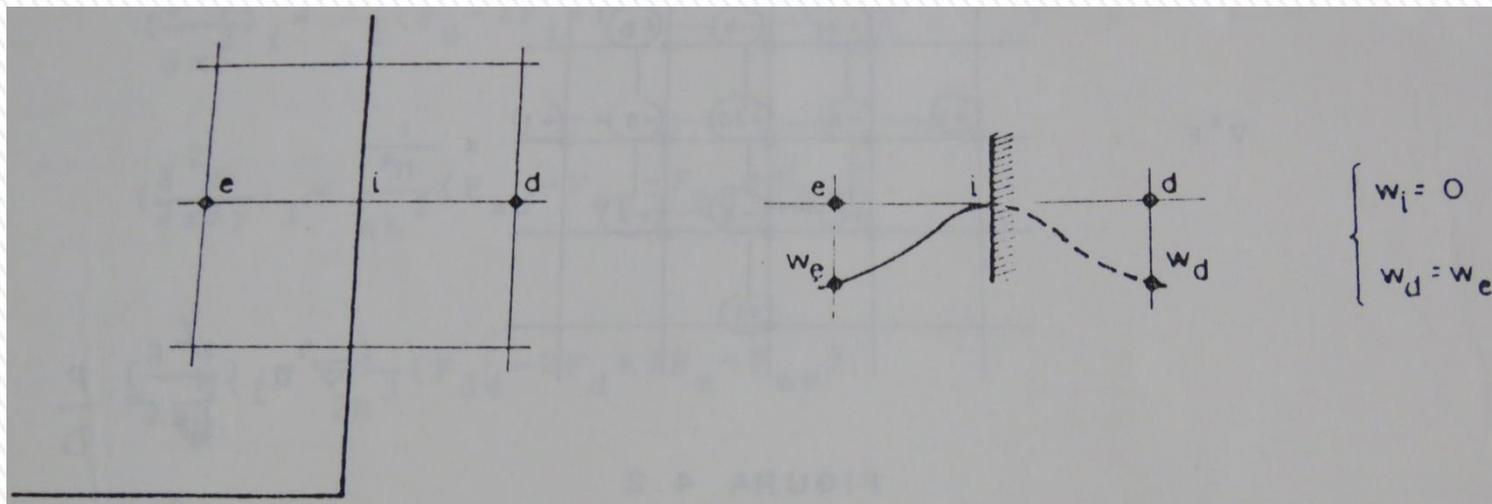
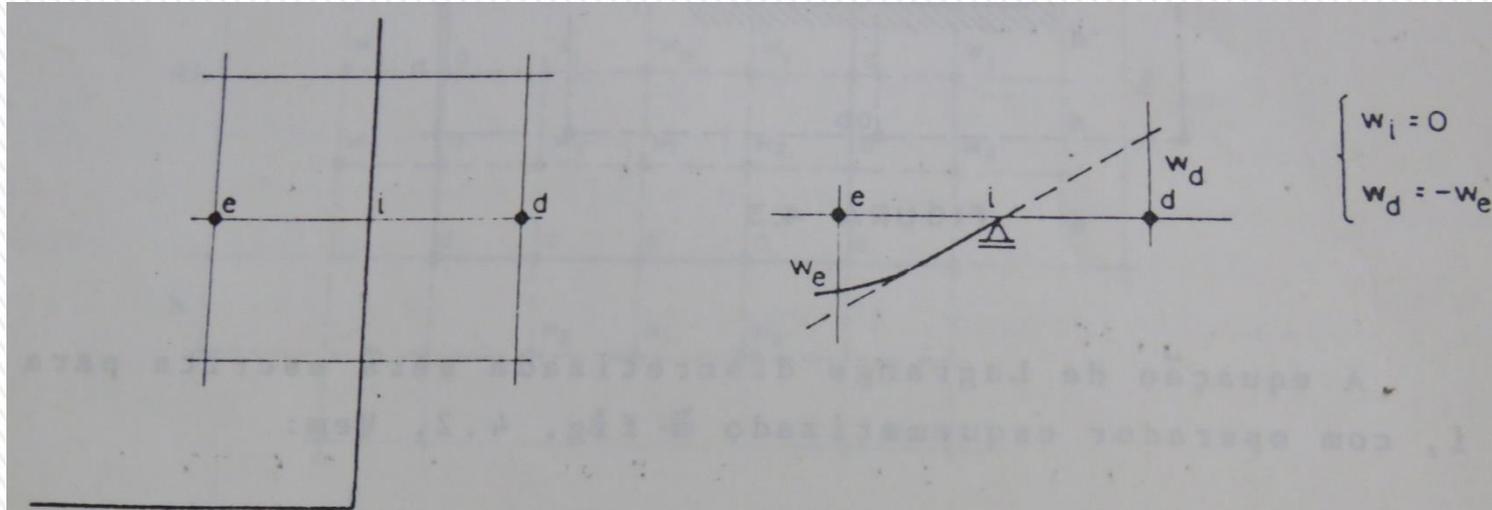
$$(\nabla^4 F) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

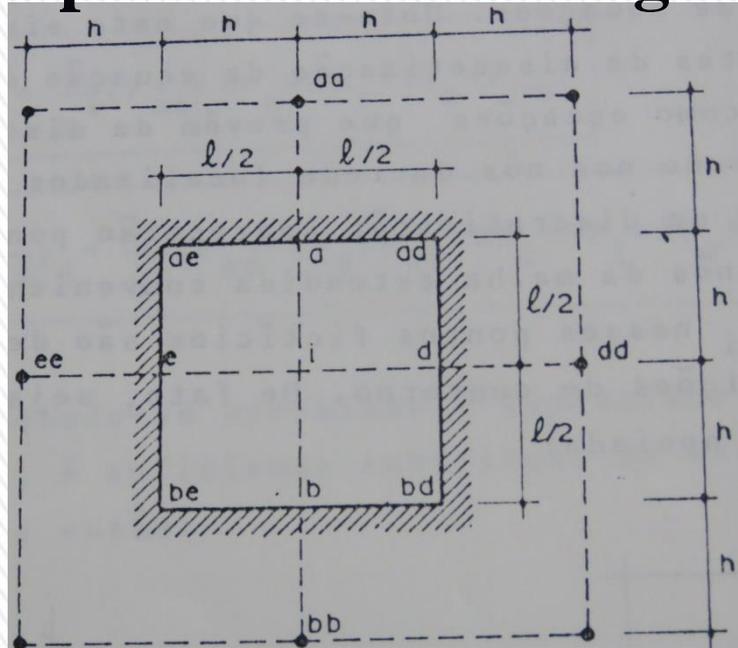
$$(\nabla^4 F)_i = \frac{1}{h^4} \left[20 F_i - 8(F_d + F_e + F_a + F_b) + 2(F_{ad} + F_{ae} + F_{bd} + F_{be}) + (F_{aa} + F_{bb} + F_{dd} + F_{ee}) \right]$$



Pontos fictícios



Exemplo: Placa toda engastada



$$\boxed{\nabla^4 w} = \left[20w_i - 8(w_a + w_b + w_e + w_d) + 2(w_{ae} + w_{ad} + w_{be} + w_{bd}) + \right. \\ \left. + (w_{aa} + w_{bb} + w_{ee} + w_{dd}) \right] \cdot \frac{1}{h^4} = \frac{p}{D} \quad (a)$$

Aparentemente, tem-se aí uma só equação e 13 incógnitas. Todavia, as condições de contorno reduzem as incógnitas a apenas uma. De fato:

- nas bordas $w = 0$ e, portanto:

Exemplo: Placa toda engastada

$$w_a = w_b = w_e = w_d = w_{ae} = w_{ad} = w_{be} = w_{bd} = 0$$

- a placa é engastada no contorno e, portanto (ver final do § 4.1):

$$w_{aa} = w_i ; w_{bb} = w_i ; w_{ee} = w_i ; w_{dd} = w_i$$

A equação (a) simplifica-se então para:

$$20w_i + 4w_i = \frac{ph^4}{D} = \frac{pl^4}{16D}$$

$$w_i = \frac{pl^4}{384D} = 0,00261 \frac{pl^4}{D} \quad (b)$$

A solução é simples mas, naturalmente, de aproximação muito grossa. Utilizemos agora malhas mais apertadas, $h = l/4$

$$(w_i)_{\text{exato}} = 0,00126 \cdot \frac{p \cdot l^4}{D}$$

Placa toda engastada

