


**AULA 1**

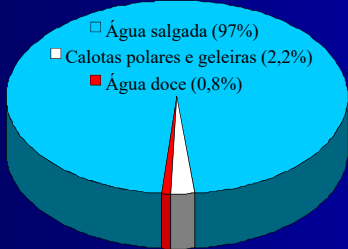
**INTRODUÇÃO**  
André Luiz Andrade Simões

SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos



**1.1 Importância das Águas Subterrâneas**

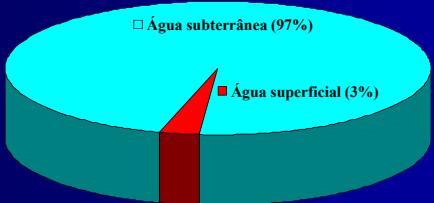


□ Água salgada (97%)  
 ■ Calotas polares e geleiras (2,2%)  
 ■ Água doce (0,8%)

DISTRIBUIÇÃO DA ÁGUA NO GLOBO  
WENDLAND (2003)

SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

**1.1 Importância das Águas Subterrâneas**



□ Água subterrânea (97%)  
 ■ Água superficial (3%)

DISTRIBUIÇÃO DA ÁGUA NO GLOBO  
WENDLAND (2003)

SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

**1.2 Objetivos, Aplicações e Dificuldades**

✓ **OBJETIVOS**

➤ *Expor as possibilidades de aplicação de modelos com suas respectivas limitações*

- 1) Explanar os conhecimentos físicos relevantes
- 2) Apresentar os fundamentos hidráulicos e matemáticos
- 3) Apresentar os métodos correntes

WENDLAND (2003)

SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

**1.2 Objetivos, Aplicações e Dificuldades**

✓ **OBJETIVOS**

- 4) Escolha do método mais adequado ao problema em estudo
- 5) Análise de erros em modelagem
- 6) Capacitar a avaliação de modelos de terceiros

WENDLAND (2003)

SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

**1.2 Objetivos, Aplicações e Dificuldades**

✓ **APLICAÇÕES**

- 1) Estudos de otimização
- 2) Determinação de zonas de proteção exemplo
- 3) Análise de sensibilidade de parâmetros físicos
- 4) Remediação ou recuperação de aquíferos
- 5) Verificação de modelos teóricos e simplificações

WENDLAND (2003)

SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

1.2 Objetivos, Aplicações e Dificuldades

✓DIFICULDADES

- 1) Heterogeneidades geológicas
- 2) Obtenção de dados
- 3) Ergodicidade
- 4) Dados hidrológicos

SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

WENDLAND (2003)

1.3 Definições e Conceitos

✓DEFINIÇÕES

- 1) Sistema
- 2) Modelo:
  - 2.1) *Modelo Físico:*



SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

PIMENTA (1981)



Povh e Tozzi (2001)



Extravasor em Degraus  
(Barragem Dona Francisca)  
IPH - UFRGS

SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

1.3 Definições e Conceitos

✓DEFINIÇÕES

- 2.2) *Modelo Analógico:*

{

*Lei de Darcy*

*Lei de Ohm*

*Lei de Fourier*

$$Q = -KA \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$I = -\sigma A \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$W = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x}$$

- 2.3) *Modelo Matemático*


SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

WENDLAND (2003)

1.3 Definições e Conceitos

✓DEFINIÇÕES

- 3) Fenômeno
- 4) Variável
- 5) Parâmetro
- 6) Simulação



SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

WENDLAND (2003)

1.3 Definições e Conceitos

✓CONCEITOS

- 1) Meio: Isotrópico e anisotrópico
- 2) Meio: Homogêneo e heterogêneo
- 3) Aquífero: Livre e confinado
- 4) Solo: Saturado e não saturado
- 5) Regime: Permanente e não permanente

SHS 5896 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

WENDLAND (2003)

## 1.4 Classificação de Modelos ou Sistemas

- 1) Conceitual
- 2) Empírico
- 3) Estocástico ou Randômico
- 4) Determinístico
- 5) **Fractal**

SOLUÇÕES ANALÍTICAS

SOLUÇÕES NUMÉRICAS

WENDLAND (2003)

## 1.5 Pontos de Partida da Modelação

### ➤ *Questões Relevantes*

- 1) Qual é o problema?
- 2) Qual é o objetivo? Quais respostas estou necessitando?
- 3) É necessário um modelo para se resolver o problema?

WENDLAND (2003)

## 1.5 Pontos de Partida da Modelação

### Questões Relevantes (continuação)

- 4) Quais são os dados disponíveis (conhecidos)?
- 5) Posso verificar através de medições os resultados do modelo? (Aferição)
- 6) Quais processos são considerados?
  - ✓ Escoamento
  - ✓ Transporte de calor
  - ✓ Transporte de gás
  - ✓ Escoamento multifásico
  - ✓ Transporte de vários componentes com reações químicas

WENDLAND (2003)

## 1.6 Limitações de um Modelo

- 1) Todos apresentam vantagens e desvantagens
- 2) Possíveis soluções de um modelo:
  - ✓ *Solução errada para problema correto*
  - ✓ *Solução correta para problema errado*
- 3) O modelo é somente uma ferramenta para apoiar decisões

WENDLAND (2003)

## 1.6 Limitações de um Modelo

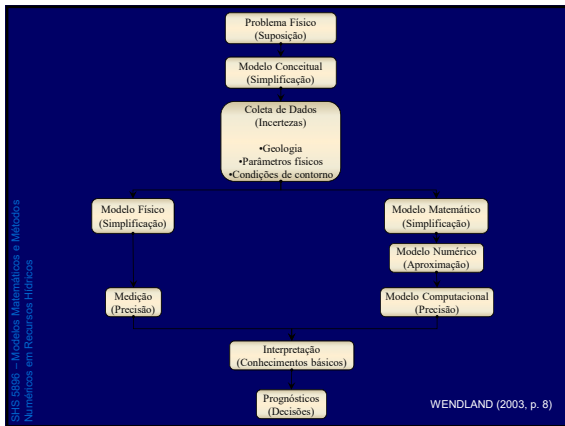
- 4) Não descreve exatamente um processo natural por causa:
  - ✓ Da complexidade dos processos naturais
  - ✓ Da falta de conhecimento dos parâmetros requeridos
  - ✓ Das simplificações e generalizações introduzidas

WENDLAND (2003)

## 1.7 Etapas da Modelação

*Etapas percorridas quando se pretende elaborar um modelo para investigação de um processo natural*





### 1.7 Etapas da Modelação

1) Problema Físico → Suposições

- ✓ Questões relevantes
- ✓ Suposição do processo natural estudado

2) Modelo Conceitual → Simplificações

- ✓ Definição das principais relações causa-conseqüência
- ✓ Descrição qualitativa do comportamento do sistema natural, através do qual podem ser feitas simplificações

SHS 5898 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

WENDLAND (2003)

### 1.7 Etapas da Modelação

3) Modelo Matemático → Simplificações

- ✓ Descrição do processo físico através de relações matemáticas, tendo em vista a conservação de massa e energia. Assim são ignorados ou simplificados alguns fenômenos físicos.
- ✓ Definição das condições iniciais e de fronteira
- ✓ Se possível (e se suficiente), pode-se resolver o problema analiticamente

SHS 5898 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

WENDLAND (2003)

### 1.7 Etapas da Modelação

4) Modelo Numérico → Aproximações

- ✓ Descrição aproximada da expressão matemática diferencial
- ✓ A formulação diferencial é aproximada por uma formulação algébrica, determinando as variáveis em pontos discretos do modelo

SHS 5898 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

WENDLAND (2003)

### 1.7 Etapas da Modelação

5) Modelo Computacional → Erros de Arredondamento

- ✓ Tradução do modelo numérico em linguagem computacional
- ✓ Resolução do sistema com diferentes técnicas matriciais → Resultados

SHS 5898 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

WENDLAND (2003)

### 1.7 Etapas da Modelação

6) Interpretação → Conhecimentos Físicos

- ✓ As grandezas calculadas são interpretadas com base em conhecimentos físicos específicos
- ✓ Comparação dos resultados numéricos com valores medidos (históricos)
- ✓ Calibração ou ajuste. Os valores de parâmetros físicos obtidos da literatura frequentemente não são números absolutos, mas indicados como intervalo de valores. A calibração com base em uma série de dados é requerida

SHS 5898 – Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Recursos Hídricos

WENDLAND (2003)

## 1.7 Etapas da Modelação

- 6) Interpretação → Conhecimentos Físicos (continuação)
- ✓ Validação do modelo, preferencialmente frente uma série de medidas de um período em condições variadas
  - ✓ Solução não-desejável → Retornar ao ponto 1 (problema físico).

## 1.7 Etapas da Modelação

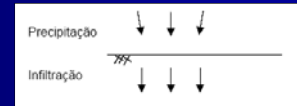
- 7) Prognóstico → Decisões
- ✓ Adaptação do modelo a determinadas perguntas
  - ✓ Decisões econômicas fundamentadas em cálculos
  - ✓ Análise sensitiva

## 1.8 Dimensões dos Modelos

- 1) 0 - dimensional
- 2) Uni - dimensional
- 3) Bi-dimENSIONAL (horizontal e vertical)
- 4) Tri-dimENSIONAL
- 5) Acoplados

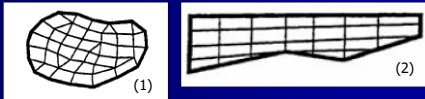
## 1.8 Dimensões dos Modelos

- a) 0 - dimensional  
Exemplos:  $NaCl \Rightarrow Na^+ + Cl^-$
- b) Uni - dimensional

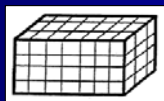


## 1.8 Dimensões dos Modelos

- c) Bi-dimENSIONAL: horizontal (1) e vertical (2)

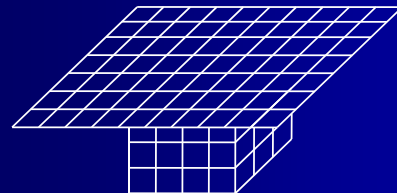


- d) Tri-dimENSIONAL



## 1.8 Dimensões dos Modelos

- e) Acoplados



## Referências Bibliográficas

ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

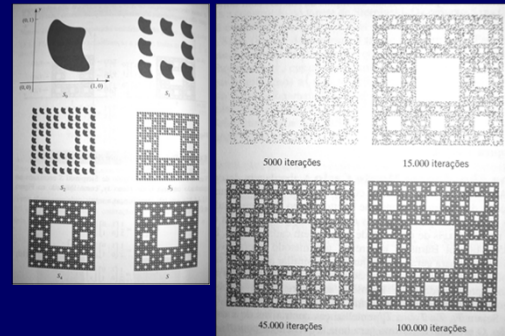
POVH, P.H.; TOZZI, M.J. avaliação da energia residual a jusante de vertedouros em degraus: estudo de caso. In: SIMPOSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HIDRICOS, 15, 2001, Aracaju. Anais... Porto Alegre: ABRH: Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 2001. 20p.

TUCCI, Carlos E. M. Modelos Hidrológicos, 2ª ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2005.

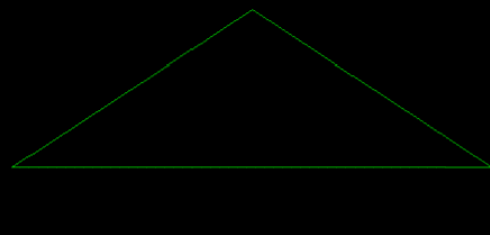
WENDLAND, Edson. Modelos matemáticos e métodos numéricos em águas subterrâneas - São Carlos, SP: SBMAC, 2003 xii, 95 p. (Notas em Matemática Aplicada; 3)

PIMENTA, Carlito F. Curso de hidráulica geral. 4a ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1981.

[www.wikipedia.com](http://www.wikipedia.com), acesso às 11 hs, dia 10/03/2007



Tapete de Waclaw Sierpinski (1882-1969)  
ANTON e RORRES (2001, p. 450, 452)



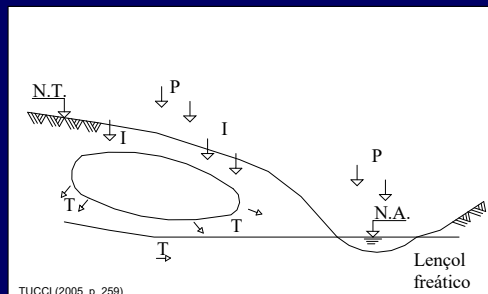
WIKIMEDIA COMMONS (2007)

Modelo da superfície de uma montanha (Animação com Fractal)

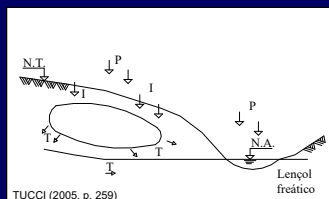
Voltar

Da parcela que precipita sobre áreas permeáveis, é necessário calcular os volumes infiltrado, percolado para o aquífero e o que gera escoamento superficial.

## ✓ EXEMPLO



TUCCI (2005, p. 259)



TUCCI (2005, p. 259)

$$\frac{dS}{dt} = I(t) - T(t)$$

$$I(t) = Ib + (Io - Ib)e^{-kt}$$

$$T(t) = Ib(1 - e^{-kt})$$

S(t) = estado de umidade da camada de solo considerada (variável de estado)

t = tempo (variável independente)

I(t) = infiltração (variável de entrada do sistema)

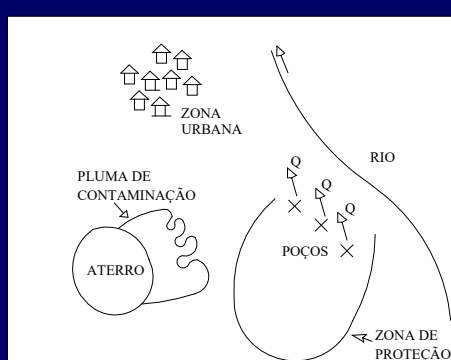
T(t) = percolação (variável de saída)

Ib = capacidade de infiltração quando o solo está saturado

Io = capacidade de infiltração quando a umidade do solo é So

k = parâmetro que caracteriza o decaimento da curva exponencial de infiltração e depende das características do solo

Voltar



Voltar