Lista de Exercício I

As equações de Maxwell são dadas por

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\;; \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B} - \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\,\vec{J} \tag{0.1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\;; \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{0.2}$$

1. Mostre que se escrevermos os campos elétrico e magnético em termos de potenciais como

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}\;; \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{0.3}$$

as equações (0.2) são automaticamente satisfeitas. Mostre que os campos elétrico e magnético são invariantes pelas transformações locais de gauge

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial\alpha}{\partial t}\;; \qquad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha \tag{0.4}$$

2. Mostre que as equações de Maxwell (0.1) e (0.2) podem ser escritas em termos de vetores e tensores de Lorentz como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\mu\;; \qquad \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{0.5}$$

onde

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\rho\sigma} \tag{0.6}$$

e

$$E_i = F_{0i}\;; \qquad B_i = -\frac{1}{2\,c}\,\varepsilon_{ijk}\,F_{jk}\;; \qquad j_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\;; \qquad j_i = \frac{1}{\varepsilon_0\,c}\,J_i \tag{0.7}$$

3. Mostre que o primeiro conjunto de equações de Maxwell dado em (0.5) pode ser obtido pelo princípio de mínima ação a partir da ação

$$S = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} - j_\mu\,A^\mu\right] \tag{0.8}$$

Neste caso as coordenadas independentes utilizadas no cálculo variacional são o campo A_μ e suas derivadas $\partial_\mu A_\nu$, e onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

4. Utilizando a força de Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right) \tag{0.9}$$

e a equação de Newton, determine a trajetória de uma partícula carregada na presença de um campo magnético constante na direção z, i.e $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$.

5. Utilizando o princípio de gauge ou acoplamento minimal, resolva a equação de Schrödinger (não relativística) para uma partícula carregada sem spin na presença de um campo magnético constante na direção z, i.e $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$.

6. Mostre que a equação de Schrödinger (não relativística) para uma partícula de carga q, sem spin acoplada minimamente ao campo eletromagnético é invariante pelas transformações locais de gauge dadas por

$$\psi \to e^{i\,q\,\alpha/\hbar}\,\psi\;; \qquad\qquad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha \tag{0.10}$$