ENGENHARIA ECONÔMICA
Prof. Reinaldo Pacheco da Costa

Nov 2019

Engenharia Econômica

"Lênin, segundo se diz, declarou que a melhor maneira de destruir o sistema capitalista é desmoralizar a moeda. Por um contínuo processo de inflação, os governos podem confiscar, de modo secreto e despercebido, parte importante da riqueza de seus cidadãos. Com este método, ele não apenas confiscam, mas confiscam arbitrariamente*; e enquanto o processo empobrece a muitos, de fato enriquece a alguns (...)".*
J M Keynes (Inflação e Deflação – Coleção Os Pensadores. Abril Cultural).

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
PRO – Departamento de Engenharia de Produção
PRO 2612
Prof. Dr. Reinaldo Pacheco da Costa


FUNDAMENTOS DA
ENGENHARIA
ECONÔMICA

ENGENHARIA ECONÔMICA

MATEMÁTICA FINANCEIRA

- Juros
- Taxas de Juros
- Fluxo de Caixa
- Regimes de Juros
- Juros Simples
- Juros Compostos
- Taxa Contínua
- Equivalência de Taxas
- Período de Capitalização
- Taxas Nominal x Taxa Efetiva
- Considerações sobre Taxas de Juros
- Período de capitalização, taxa nominal e taxa efetiva
- Taxas Correntes
- TAXA SELIC
- Taxas Reais

ENGENHARIA ECONÔMICA

- Métodos para Análise de Alternativas
  - Método do Valor Presente Líqüido (VPL);
  - Método do Futuro Líqüido;
  - Método do Valor Uniforme Líqüido;
  - Método do Benefício-Custo;
  - Método da Taxa de Retorno ou Taxa Interna de Retorno (TIR); e
  - Método do Prazo de Retorno ou Payback.

Engenharia Econômica

Objetivo do Curso

- Capacitar os alunos em engenharia econômica.

- Esta capacitação visa permitir-lhes participar das atividades necessárias à análise de investimentos estruturada de empreendimentos (industriais e/ou serviços) e, principalmente, integrar tais análises quando os esforços forem administrados por projeto.

Engenharia Econômica

Conteúdo

- Introdução à Engenharia Econômica, contabilidade e finanças;
- Variável tempo: juros simples, juros compostos;
- Métodos de amortização;
- Equivalência de métodos;
- Métodos de Decisão;
- Renovação e substituição de equipamentos;
- Depreciação;
- Análise de Projetos;
- Análise de Risco em Projetos;
- Métodos Multicritério.

Engenharia Econômica

Origem

- Em nossas atividades, encontramos sempre varias alternativas para solucionar um problema, e devemos escolher a melhor, de acordo com um ou mais critérios. Um critério sempre presente é o econômico, em que temos de comparar as alternativas com base em valores monetários.

- A Engenharia Econômica nos fornece os instrumentos para estas comparações. O nome Engenharia Econômica vem do fato de terem sido os engenheiros, no fim do século XIX, os primeiros a tratar, de forma sistemática, dos problemas de alternativas de investimento, inerentes aos grandes projetos de engenharia.

Engenharia Econômica

Engenharia Econômica X Gerência de Projetos

- A Engenharia Econômica permite definir alternativas de soluções do ponto de vista econômico para os projetos;
- Permite a alocação eficiente dos recursos disponíveis.

Matemática Financeira

15 aulas

Introdução à Matemática Financeira; economia e finanças;
Variável tempo: juros simples, juros compostos, juros contínuos
Equivalência de métodos; P, F, A
Séries uniformes
Projetos com diferentes horizontes
Métodos de amortização; price, sac, americano
Inflação
Depreciação e impostos
Análise de Alternativas
Substituição Econômica
Métodos de Análise

Taxas de juros

- Juros
  - Taxa de juro
    - Taxa Nominal e Taxa Efetiva
      - Inflação – Juros Correntes e Juros Reais
        - Taxa Básica de juros
        - Taxa Mínima de Atratividade

- Taxa Interna de Retorno
  - Exemplos

Taxas de juros

Finanças

Matemática financeira

Nominal

Efetiva

Corrente

Real

Período de capitalização

Inflação (aula)

ROI

TIR

Contabilidade Financeira

Passado x futuro (aulas)

Engenharia Econômica

Taxas de Juros

Taxa de Juros (i)

- É a medida dos juros – interesse (em outros idiomas). Pode ser diário, semanal, quinzenal, mensal, anual etc.
- → porcentagem/unidade de tempo
- Pode ser influenciada por: risco de perda (inadimplência); prazo; inflação; custos de transação (comissões, tributos → CPMF+IOF)

Exemplos

- CDI
  - Certificado de depósitos interbancários
  - Certificado de dívida de um banco para com outro
- CDB
  - Certificado de depósito bancário
  - Referente a uma transação do cliente com o banco
  - 14/09/2011 – Andima (CDB/CDI) 11,83%aa

Exemplos

- TJLP
  - Taxa de juros de longo prazo
  - Custo básico dos financiamentos do BNDES
  - Fixada periodicamente pelo Banco Central
  - Valor atual 6,5 % (a.a.)

Juros

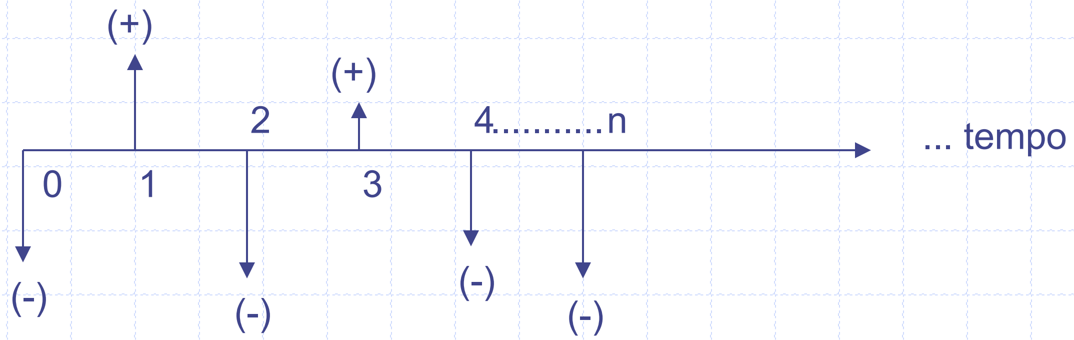
- É a remuneração pelo uso de determinada riqueza. É o aluguel pelo empréstimo do dinheiro.
- “a noção de juro decorre do fato de que a maioria das pessoas prefere consumir seus bens no presente e não no futuro. Em outras palavras, havendo uma preferência temporal para consumir, as pessoas querem uma recompensa pela abstinência. Este prêmio para que não haja consumo é o juro.”. (MATHIAS 1978)

Taxas de Juros

Fluxo de Caixa

Fluxo de entrada e saída de dinheiro ao longo do tempo.

Representação Gráfica: **Diagrama de Fluxo de Caixa**



Taxas de Juros

Regimes de Juros:

- Simples (Taxa Linear)
- Compostos (Taxa Composta)
- Taxa Contínua

Taxas de Juros

Juros Simples

A remuneração é diretamente proporcional ao capital inicial, ao valor e ao tempo investido, e cujo fator de proporcionalidade é a taxa de juros.

$$\mathbf{M = C\,(1 + i.n)}$$

M: montante

C: capital investido

i: taxa de juros por período

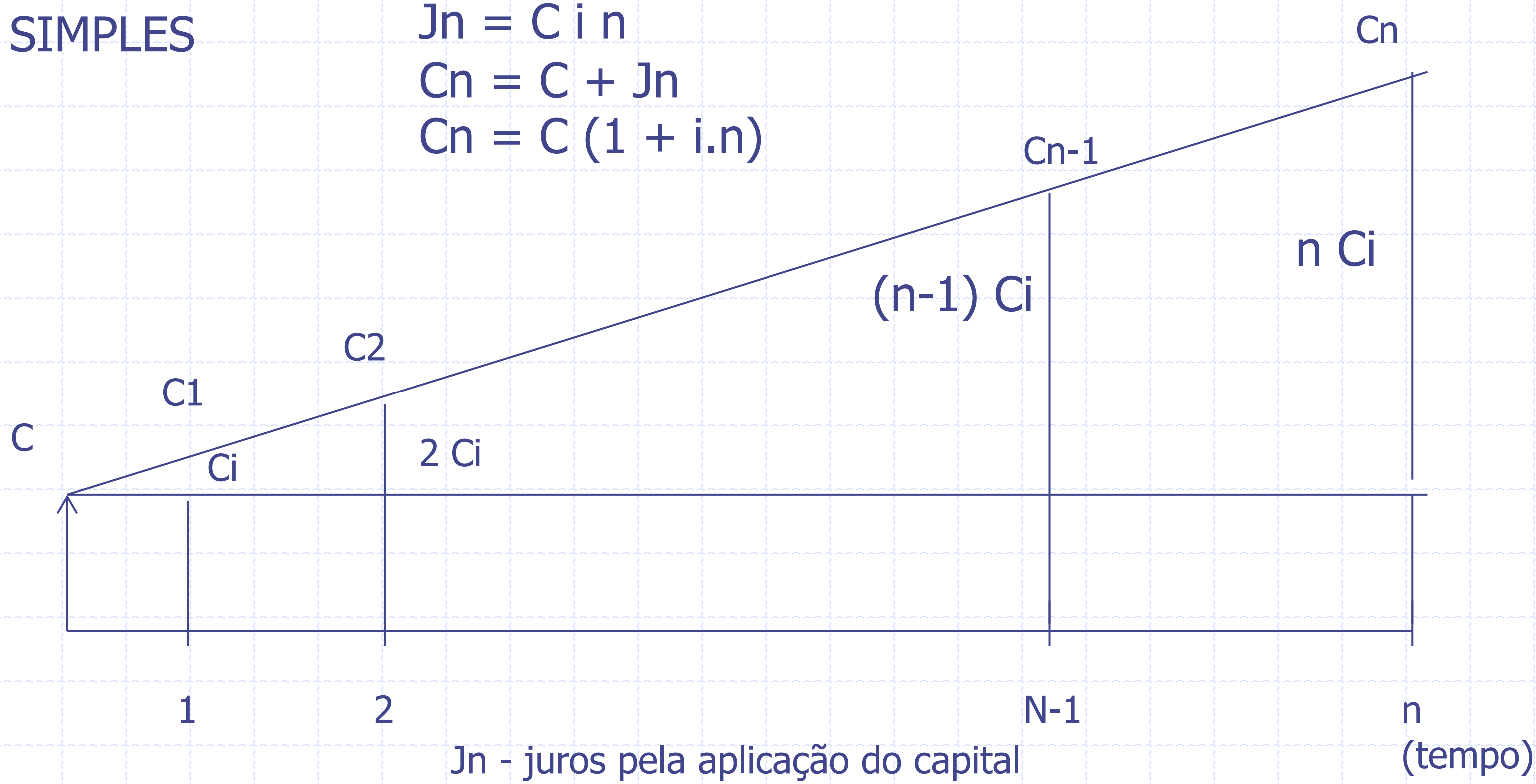
n: número de períodos

Na prática comercial os juros simples são usados apenas para prazos pequenos ou para calcular os juros de frações de período. (FADIGAS – pg. 4)

FORMAS DE CAPITALIZAÇÃO

- SIMPLES

$$J_n = C\, i\, n$$
$$C_n = C + J_n$$
$$C_n = C\,(1 + i.n)$$



Jn - juros pela aplicação do capital
C – capital inicial
i - taxa de juros
n – período de aplicação
Cn – (montante) capital obtido

Taxas de Juros

Juros Compostos

O juro gerado é incorporado à própria aplicação para a geração de juros do período seguinte.

$$\mathbf{M = C \,.\, (1 + i)^n}$$

M: montante

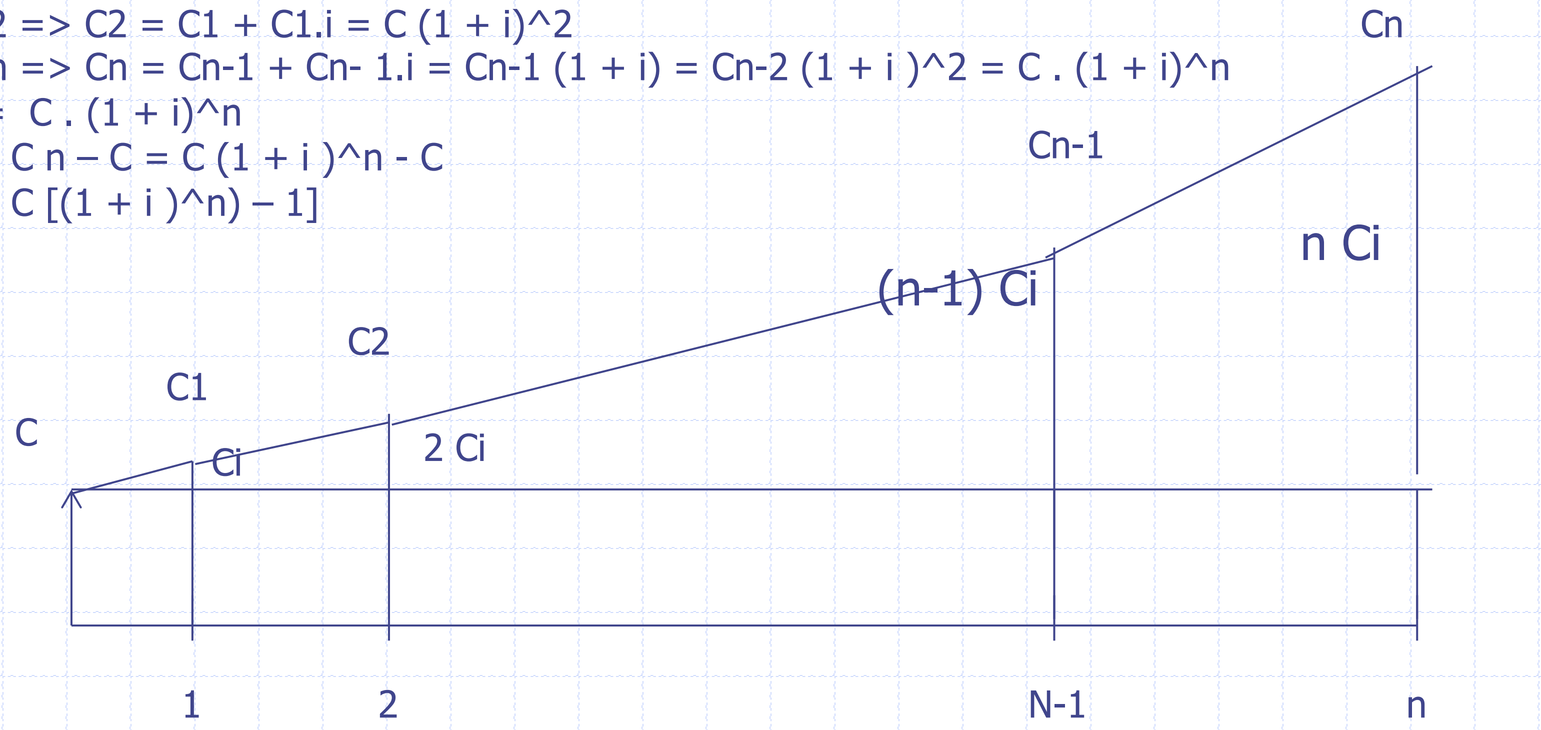
C: capital investido

i : taxa de juros por período

n: número de períodos

FORMAS DE CAPITALIZAÇÃO (COMPOSTO)

t = 0 => t
t = 1 => C1 = C + C.i = C (1 + i)
t = 2 => C2 = C1 + C1.i = C (1 + i)^2
t = n => Cn = Cn-1 + Cn- 1.i = Cn-1 (1 + i) = Cn-2 (1 + i)^2 = C . (1 + i)^n
Cn = C . (1 + i)^n
Jn = C n – C = C (1 + i)^n - C
Jn = C [(1 + i)^n) – 1]



Jn - juros pela aplicação do capital
C – capital inicial
i - taxa de juros
n – período de aplicação
Cn – (montante) capital obtido

Taxas de Juros

Como visto, então, para o regime de juros compostos, pode-se usar a expressão

$$F = P\ (1+ i)^n$$

que fornece **valores futuros** baseados em um valor presente, uma taxa de juros compostos e um número de períodos. Naturalmente a fórmula pode ser invertida para obter

Valor presente: $P = F\ /\ (1+ i)^n \qquad (3.6)$

Taxa de juros:

$$F/P = (1+ i)^n$$

$$1+i = (F/P)^{(1/n)}$$

$$i = (F/P)^{(1/n)} - 1 \qquad (3.7)$$

Número de períodos necessários para equivalência entre valores presente e futuro, dada uma taxa de juros:

$$F/P = (1+ i)^n$$

$$n = \log_{1+i}(F/P) \qquad (3.8)$$

Taxas de Juros

Taxa Contínua

$$M = C \,.\, e^{i.n}$$

M: montante

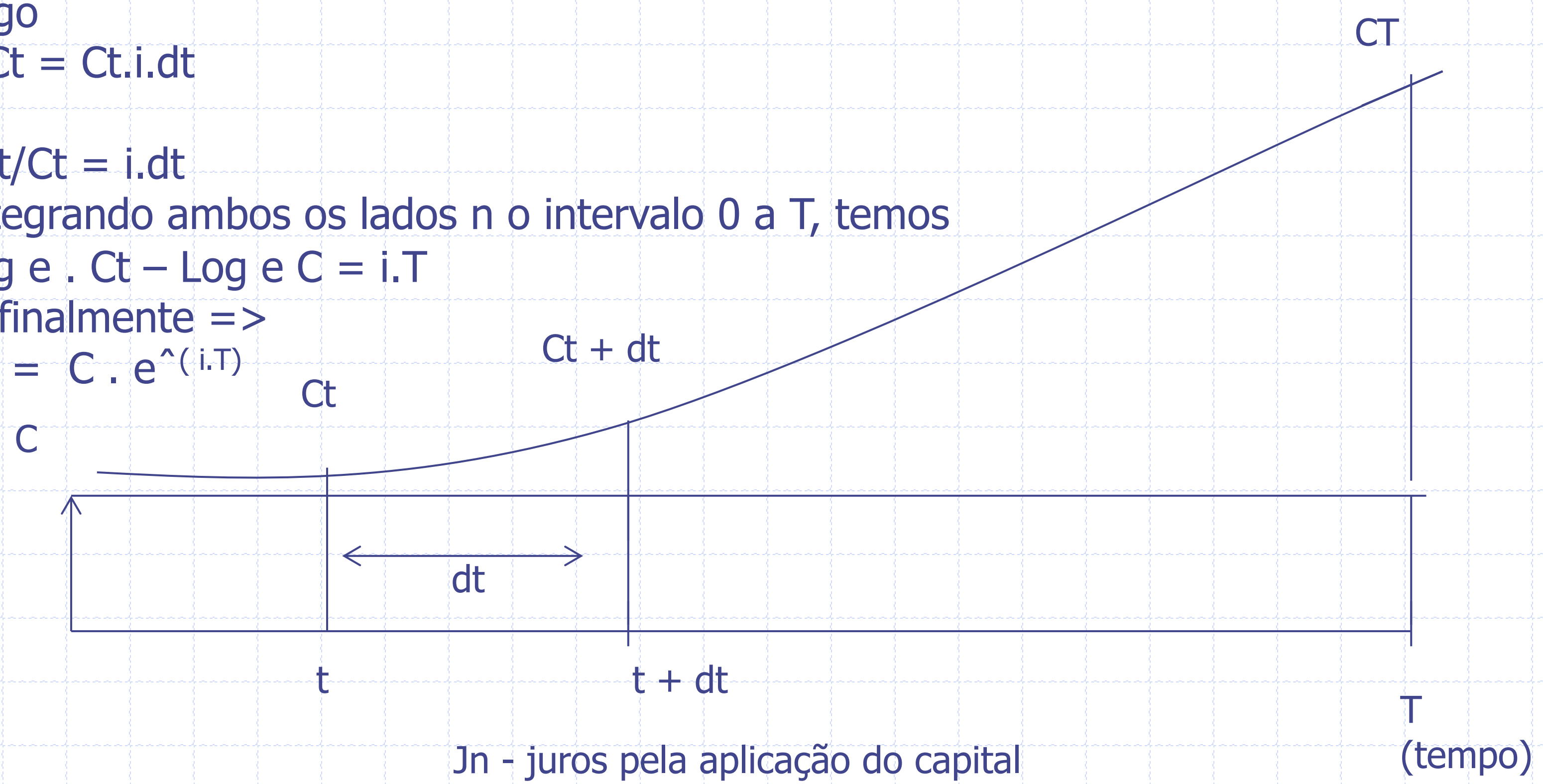
C: capital investido

i: taxa de juros por período $\rightarrow$ infinitesimal (instantânea)

n: número de períodos

FORMAS DE CAPITALIZAÇÃO (contínuo)

t = 0 => C
t = t => genérico => Ct
t = t + dt => Ct + dt => Ct + Ct.i . dt = = Ct + d.Ct
Logo
d Ct = Ct.i.dt
e,
dCt/Ct = i.dt
Integrando ambos os lados n o intervalo 0 a T, temos
Log e . Ct – Log e C = i.T
E, finalmente =>
CT = C . e^(i.T)



Jn - juros pela aplicação do capital
C – capital inicia
i - taxa de juros
n – período de aplicação
Cn – (montante) capital obtido

Capitalização Contínua (Fadigas)

- Seja j' a taxa nominal correspondente a um certo período. Supondo que a capitalização é feita em m sub-períodos, e fazendo m aumentar indefinidamente, teremos no limite a capitalização contínua, cuja taxa efetiva j é:

  j' = Ln (1+j)

$$(1+j) = \lim_{m \to \infty} (1 + \frac{j'}{m})^{m} = e^{j'}$$

  - onde e = 2,7183 é o numero de Euler, e
  - Ln ( ) é o logaritmo Neperiano.

Por exemplo, a taxa nominal de 12% ao ano, capitalizada continuamente eqüivale a:

(1+j) = $e^{0,12}$ = 1,1275 ou j = 12,75% ao ano.

- Evidentemente, M = P $(1+j)^{n}$ = P$e^{j' n}$.

- lim (1 + x)^(1/x) = e
- x->0

- Ver documento CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA (BRUNI & FAMÁ)

Taxas de Juros (Finanças)

Taxa de Retorno sobre o Ativo Total

Ou Return On Assets **(ROA)**

Mede a eficiência da administração na geração de lucros com seus ativos totais.

Também chamada de **ROI** (Return On Investment).

ROA = lucro líqüido após imposto de renda / ativo total (%)

É um índice de lucratividade da empresa.

Taxas de Juros (Finanças)

Taxa de Retorno sobre o Patrimônio Líqüido

Ou Return On Equity **(ROE)**

Mede o retorno obtido sobre o investimento (ações preferenciais e ordinárias) dos proprietários da empresa.

ROE = lucro líqüido após imposto de renda / patrimônio líqüido (%)

É outro índice de lucratividade da empresa.

Taxas de Juros

Período de Capitalização

É o período de tempo em que é realizada uma aplicação.

É empregada, sobretudo, para estabelecer distinções entre os vários períodos.

Exemplo: para uma taxa efetiva de 12% a.a. (ao ano),

- 5,83% a.s. (ao semestre)
- 2,87% a.t. (ao trimestre)
- 0,95% a.m. (ao mês).

Considerações sobre Taxas de Juros (Neves)

- ***Taxa Nominal e Taxa Efetiva:***

  Para que uma taxa se juros seja considerada efetiva, é necessário que o período referido na taxa coincida com o período de capitalização. Caso contrário será dita nominal.

- Exemplos de taxas nominais

  40% a.a. com capitalização mensal;

  12% a.s. com capitalizaçào trimestral.

$$(nominal) \quad \frac{60\% \text{ a.a.}}{12} = 5\% \text{ a.m.} \qquad (1{,}05)^{12} = 80\% \text{ a.a. } (efetiva)$$

Dado 5,6% de taxa over $\Rightarrow$ Qual a taxa efetiva?

$$F = P_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = P_0 \cdot (1+i)$$

$$(1+i) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \qquad i = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Taxas nominal e efetiva

- Por exemplo, a taxa efetiva de 12% ao ano, capitalizada semestralmente, trimestralmente ou mensalmente, corresponde respectivamente às taxas efetivas:
- $(1+j) = (1+0,12)^{1/2} = 1,0583$ $j = 5,83\%$ ao semestre
- $(1+j) = (1+0,12)^{1/4} = 1,0287$ $j = 2,87\%$ ao trimestre
- $(1+j) = (1+0,12)^{1/12} = 1,0095$ $j = 0,95\%$ ao mês,
- em lugar das taxas nominais de 6% , 3% , e 1% respectivamente.

- Por outro lado, a taxa efetiva de 6% por semestre corresponde à nominal de 12% ao ano, ou a uma taxa efetiva de $1,06^2 -1 = 0,1236$ ou 12,36% ao ano.

Período de Capitalização

Taxa Nominal e Taxa Efetiva

- Na prática é comum capitalizar os juros varias vezes ao longo de um período, ou mesmo capitalizar os juros uma vez ao longo de vários períodos.
- Por exemplo, a taxa efetiva de 12% ao ano, capitalizada semestralmente, trimestralmente ou mensalmente, corresponde respectivamente às taxas efetivas:
  - Anualmente n = 1
    $(1+j) = (1+j)^1$ j = 12% ao ano
  - Semestralmente n= 1/2
    $(1+j) = (1+0{,}12)^{1/2} = 1{,}0583$ j = 5,83% ao semestre
  - Trimestralmente n = 1/4
    $(1+j) = (1+0{,}12)^{1/4} = 1{,}0287$ j = 2,87% ao trimestre
  - Mensalmente n =
    $(1+j) = (1+0{,}12)^{1/12} = 1{,}0095$ j = 0,95% ao mês,

em lugar das taxas nominais de 6%, 3%, e 1% respectivamente.

Período de Capitalização

Taxa Nominal é aquela declarada no período.

Taxa Efetiva é aquela que acontece em função do número de capitalizações no mesmo período.

- Por exemplo, a taxa nominal de 12% ao ano, capitalizada semestralmente, trimestralmente ou mensalmente, corresponde a diferentes taxas efetivas :
  - Semestralmente n= 2, j = 0,12/2 = 0,06 ao semestre (nominal)
    $(1+j)^n = (1+0{,}06)^2 = 1{,}1236$ j = 12,36% ao ano (efetiva)
  - Trimestralmente n = 4, j = 0,12/4 = 0,03 ao mês (nominal)
    $(1+j)^n = (1+0{,}03)^4 = 1{,}1255$ j = 12,55% ao trimestre (efetiva)
  - Mensalmente n = 12, j = 0,12/12 = 0,01 ao mês (nominal)
    $(1+j)^n = (1+0{,}01)^{12} = 1{,}1268$ j = 12,68% ao ano (efetiva)

Considerações sobre Taxas de Juros

- Exemplos de taxas nominais
  40% a.a. com capitalização mensal;
  12% a.s. com capitalização trimestral.

RELAÇÕES ENTRE Tn e Te

$$(nominal) \quad \frac{60\% \text{ a.a.}}{12} = 5\% \text{ a.m.} \qquad (1{,}05)^{12} = 80\% \text{ a.a. } (efetiva)$$

$$F = P_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = P_0 \cdot (1 + i)$$

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \qquad i = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Taxas de Juros

Taxas Correntes

São aquelas adotadas por um sistema ou órgão oficial de financiamento, tais como a SELIC.

A Taxa SELIC é estabelecida pelo COPOM (Comitê de Política Monetária do Banco Central do Brasil), de acordo com a conjuntura econômica do país. É a taxa básica de juros, ou seja, quanto o Governo brasileira paga pelo empréstimo de dinheiro.

Voltaremos com a taxa básica de juros

Taxa Corrente e Taxa Real

- Podemos usar para representar a inflação um modelo matemático análogo ao modelo dos juros, com uma taxa fk de inflação no período k , isto é, um bem que vale P0 no instante 0 terá o seu valor no instante t expresso por

$$P0\ (1+f1)\ (1+f2)\ (1+f\ t) = P0\ (1+f)^{t}$$

onde f é a taxa de inflação média nos t períodos

- Seja $M_{t,0}$ um valor devido no instante t e expresso em moeda do instante 0 .
- $M_{t,t}$ é o valor corrente, e $M_{t,0}$ é o valor deflacionado ou corrigido monetariamente.

$$M_{t,0} = \frac{M_{t,t}}{(1+f)^{t}}$$

Taxa Corrente e Taxa Real

- Seja j a taxa de juros correntes (também chamada taxa aparente ou taxa nominal), f a taxa de inflação e r a taxa de rendimento real, todas referidas ao mesmo período.
- Um capital $M_{0,0}$, aplicado t períodos a uma taxa j resulta num montante

$$M_{t,t} = M_{0,0}(1+j)^t \qquad M_{t,t} = M_{t,0}(1+f)^t$$

$$M_{t,0} = M_{0,0}\frac{(1+j)^t}{(1+f)^t} = M_{0,0}(1+r)^t$$

$$(1+r) = \frac{(1+j)}{(1+f)} \qquad r = \frac{(j-f)}{(1+f)}$$

- A taxa de rendimento real pode ser negativa quando j<f .
- Se f é pequeno e j muito maior que f , então $r \cong j - f$.

Taxas de Juros

Taxas Reais

Seja j a taxa de juros correntes (também chamada de taxa aparente nominal); f a taxa de inflação e r a taxa de rendimento real, todas referidas ao mesmo período de tempo.

$$(1+r) = (1+j) / (1+f)$$

Vide FADIGAS 2001:13-14 Capítulo 1.doc.

Taxas Correntes

- São aquelas adotadas por um sistema ou órgão oficial de financiamento, tais como a SELIC.
- A Taxa SELIC é estabelecida pelo COPOM (Comitê de Política Monetária do Banco Central do Brasil), de acordo com a conjuntura econômica do país. É a taxa básica de juros, ou seja, quanto o Governo brasileira paga pelo empréstimo de dinheiro.

Taxas de Juros

Taxas Reais

Seja j a taxa de juros correntes (também chamada de taxa aparente nominal); f a taxa de inflação e r a taxa de rendimento real, todas referidas ao mesmo período de tempo.

$$(1+r) = (1+j) / (1+f)$$

Taxa Corrente e Taxa Real

- Seja j a taxa de juros correntes (também chamada taxa aparente ou taxa nominal), f a taxa de inflação e r a taxa de rendimento real, todas referidas ao mesmo período.
- Um capital $M_{0,0}$, aplicado t períodos a uma taxa j resulta num montante

$$M_{t,t} = M_{0,0}(1+j)^t$$

$$M_{t,t} = M_{t,0}(1+f)^t$$

$$M_{t,0} = M_{0,0}\frac{(1+j)^t}{(1+f)^t} = M_{0,0}(1+r)^t$$

$$(1+r) = \frac{(1+j)}{(1+f)}$$

$$r = \frac{(j-f)}{(1+f)}$$

- A taxa de rendimento real pode ser negativa quando j<f .
- Se f é pequeno e j muito maior que f , então $r \cong j - f$.

Taxa Mínima de Atratividade

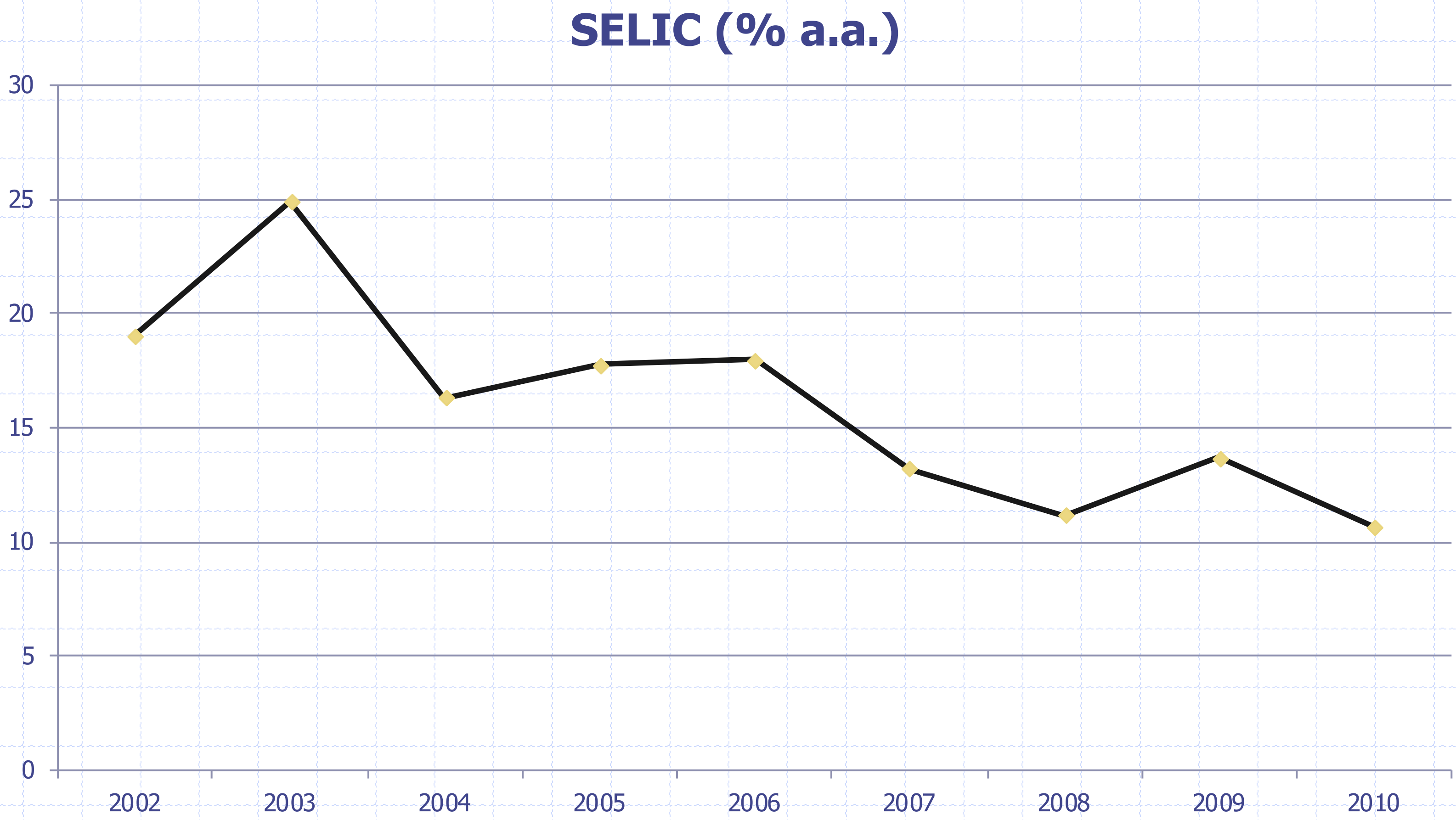
- É a taxa suposta constante durante todo o horizonte do projeto. Não é necessariamente uma taxa que seja realizável no mercado, mas é a taxa que se vai usar no modelo adotado para atualizar os valores

Taxa Mínima de Atratividade (TMA)

- É a taxa que se fixa para atualizar fluxos de caixa, p.ex., sendo escolhida pelo investidor levando-se em consideração:
- a taxa de juros de uma aplicação financeira;
- o rendimento da empresa em sua operação;
- o maior fator de risco ao empreendimento;
- se o investidor não dispõe de todo o capital para investir.

- Vt = Vk (1 + a)j-k
- Vt: valor em data futura
- Vk: valor atual
- j: taxa corrente de juros (inclui inflação)
- A: taxa mínima de atratividade

Taxas de Juros



T A X A   S E L I C

Sistema Especial de Liquidação e Custódia

A taxa SELIC é divulgada pelo Comitê de Política Monetária (COPOM). Ela tem vital importância na economia, pois as taxas de juros cobradas pelo mercado são balizadas pela mesma.

A taxa *overnight* do Sistema Especial de Liquidação e Custódia (SELIC), expressa na forma anual, é a taxa média ponderada pelo volume das operações de financiamento por um dia, lastreadas em títulos públicos federais e realizadas no SELIC, na forma de operações compromissadas. É a taxa básica utilizada como referência pela política monetária.

A metodologia usada no cálculo da taxa overnight Over/SELIC pode ser encontrada nas normas publicadas pelo Banco Central, disponíveis na Internet no endereço: http://www.bcb.gov.br.

As séries são divulgadas em base mensal (a taxa overnight acumulada e a taxa mensal) para os dados do ano atual e anterior, e em base anual para os três anos anteriores. As seguintes taxas são também divulgadas: CDI (certificados de depósito interbancário), TR (taxa referencial) e TBF (taxa básica financeira).

Os dados abrangem os títulos do governo federal de curto, médio, e longo prazo emitidos pelo Tesouro ou pelo Banco Central, negociados e registrados no SELIC.

http://www.portalbrasil.net/indices_selic.htm

1.5. - Inflação

A inflação é a perda de valor aquisitivo da moeda ao longo do tempo, isto é, um conjunto de bens que custava 100 no instante 1, passa a custar 105 no instante 2. O índice de preços no instante 2 será 1,05 em relação ao instante 1, tomado como base. E teremos uma inflação de 5% no período. Se o índice de inflação for negativo dizemos que houve deflação.

Não cabe aqui discutir as diferentes teorias para explicar a inflação, nem as técnicas para medi-la, mas apenas estudar sua influência na taxa de juros.

1.5.1 - Juros Correntes e Juros Reais.

Podemos usar para representar a inflação um modelo matemático análogo ao modelo dos juros, com uma taxa f_k de inflação no período k, isto é, um bem que vale P_0 no instante 0 terá o seu valor no instante t expresso por

$$P_0(1+f_1)(1+f_2)....(1+f_t) = P_0(1+f)^t,$$

onde f é a taxa de inflação média nos t períodos.

Uma vez que o valor da moeda varia no tempo, devemos explicitar a base de referencia ao fazer os nosso cálculos. Seja $M_{t,0}$ um valor devido no instante t e expresso em moeda do instante 0. $M_{t,t}$ é o valor corrente, e $M_{t,0}$ é o valor deflacionado ou corrigido monetariamente.

$$M_{t,0} = \frac{M_{t,t}}{(1+f)^t} \qquad (1.5.1)$$

Seja j a taxa de juros correntes (também chamada taxa aparente ou taxa nominal), f a taxa de inflação e r a taxa de rendimento real, todas referidas ao mesmo período. Um capital $M_{0,0}$, aplicado t períodos a uma taxa j resulta num montante

$$M_{t,t} = M_{0,0}(1+j)^t \qquad (1.5.2)$$

$$M_{t,t} = M_{t,0}(1+f)^t \qquad (1.5.3)$$

$$M_{t,0} = M_{0,0}\frac{(1+j)^t}{(1+f)^t} = M_{0,0}(1+r)^t$$

$$(1+r) = \frac{(1+j)}{(1+f)}$$

$$r = \frac{(j-f)}{(1+f)} \qquad (1.5.4)$$

A taxa de rendimento real pode ser negativa, o que ocorre quando $j<f$.

Se f é pequeno e j muito maior que f, então $r \cong j - f$.

Sistema Especial de Liquidação e Custódia

A taxa SELIC é divulgada pelo Comitê de Política Monetária (COPOM). Ela tem vital importância na economia, pois as taxas de juros cobradas pelo mercado são balizadas pela mesma.

A taxa *overnight* do Sistema Especial de Liquidação e Custódia (SELIC), expressa na forma anual, é a taxa média ponderada pelo volume das operações de financiamento por um dia, lastreadas em títulos públicos federais e realizadas no SELIC, na forma de operações compromissadas. É a taxa básica utilizada como referência pela política monetária.

A metodologia usada no cálculo da taxa overnight Over/SELIC pode ser encontrada nas normas publicadas pelo Banco Central, disponíveis na Internet no endereço: http://www.bcb.gov.br.

As séries são divulgadas em base mensal (a taxa overnight acumulada e a taxa mensal) para os dados do ano atual e anterior, e em base anual para os três anos anteriores. As seguintes taxas são também divulgadas: CDI (certificados de depósito interbancário), TR (taxa referencial) e TBF (taxa básica financeira).

Os dados abrangem os títulos do governo federal de curto, médio, e longo prazo emitidos pelo Tesouro ou pelo Banco Central, negociados e registrados no SELIC.

A taxa SELIC é dada pela média diária ponderada pelo volume das operações, de acordo com a seguinte fórmula:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} VE_i . DI_i}{\sum_{i=1}^{n} VE_i}$$

onde:

μ = taxa média apurada;

DIi = Taxa da i-ésima operação;

VEi = Valor de emissão da i-ésima operação; n = número de operações na amostra.

Relações de equivalência

- ***P -> F (P/F,i,n) -***
- ***F -> P (F/P,i,n) -***

$$F = P(1+i)^{n} \therefore P = F(1+i)^{-n}$$

Relações de equivalência

- ***P_0 e F_n*** ***(P/F,i,n)***

$$F_n = P_o(1+i)^n \therefore P_0 = F_n(1+i)^{-n}$$

- ***F_n e A*** ***(A/F,i,n)***

A - série uniforme (P.ex.: depósitos programados para uma futura retirada)

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \ldots + A(1+i) + A$$

$$F = A\left[1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right] \text{(PG com n termos e razao (1+i) e primeiro termo 1)}$$

$$Sn = a1.\frac{(r^n - 1)}{r-1} \text{ (lembrete)}$$

$$F = A\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad A = \frac{F.i}{(1+i)^n - 1}$$

- ***P_0 e A*** ***(P_o,i,n)***

$$P_0 = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+i)^n} \Rightarrow P_0 = A\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

- Paulo pagou \$50 à vista por moto de \$400. O resto foi financiado em n = 10 e i = 5% a.m.? Qual a prestação?

Relações de equivalência

- ***P -> A (A/P,i,n) -FVA***
- ***A-> P (P/A,i,n) - FRC***

$$Sn = a1.\frac{(r^n - 1)}{r - 1} \text{ (lembrete)}$$

$$P_0 = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+i)^n} \Rightarrow P_0 = A\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

Dem:

(P/A) = (P/F)x(F/A).

$$F = P(1+i)^n \qquad A = \frac{F.i}{(1+i)^n - 1}$$

- Paulo pagou \$50 à vista por moto de \$400. O resto foi financiado em n = 10 e i = 5% a.m.? Qual a prestação?

Relações de equivalência

- ***A -> F (F/A,i,n)|- FFC***
- ***F -> A (A/F,i,n) - FAC***

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \ldots + A(1+i) + A$$

$$F = A\left[1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right]$$

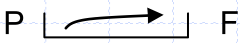
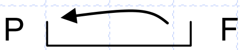
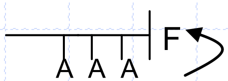
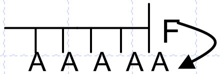
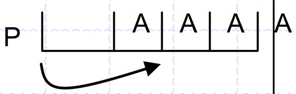
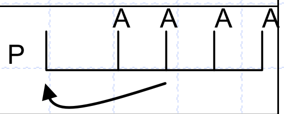
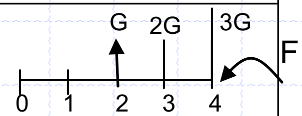
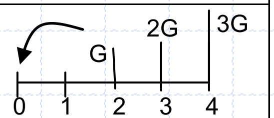
$$(\text{PG com n termos e razao r} = (1+\text{i}) \text{ e primeiro termo a1}$$

$$Sn = a1.\frac{(r^{n}-1)}{r-1} \text{ (lembrete)}$$

$$F = A\frac{(1+i)^{n}-1}{i} \qquad A = \frac{F.i}{(1+i)^{n}-1}$$

9 – Suponha que você esteja com 30 anos e deseje fazer uma poupança para complementar sua aposentadoria que se dará aos 65 anos. Considerando um rendimento real de 5% ao ano qual deve ser o valor poupado anualmente para acumular um total de R$ 1.000.000,00?

1a. Oficina – Derivar as fórmulas

Transformação	Fórmula	Indicação	Gráfica
$P \rightarrow F$	$F=P\,(1+i)^n$	F=P (F/P;i;n)	
$F \rightarrow P$	$P=F\,\dfrac{1}{(1+i)^n}$	P=F (P/F;i;n)	
$A \rightarrow F$	$F=A\,\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$	F=A(F/A;i;n)	
$F \rightarrow A$	$A=F\,\dfrac{i}{(1+i)^n-1}$	A=F(A/F;i;n)	
$P \rightarrow A$	$A=P\,\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	A=P(A/P;i;n)	
$A \rightarrow P$	$P=A\,\dfrac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$	P=A(P/A;i;n)	
$G \rightarrow F$	$F=G\,\dfrac{(1+i)^n-1-ni}{i^2}$	F=G(F/G;i;n)	
$G \rightarrow P$	$P=G\,\dfrac{(1+i)^n-1-ni}{i^2(1+i)^n}$	P=G(P/G:I;n)	

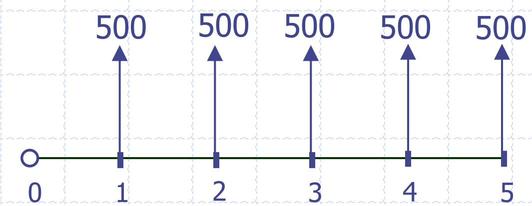
Simbologia

- (P/F) – VALOR FUTURO (MONTANTE?)
- (F/P) – VALOR PRESENTE (VALOR PRESENTE?)
- (F/A) – fator de acumulação de capital de uma série uniforme (fator de valor futuro) - FAC
- (A/F) – fator de formação de capital de uma série uniforme - FFC
- (P/A) – fator de valor atual de uma série uniforme (Tabela *Price*) FVA
- (A/P) – fator de recuperação de uma série uniforme (Tabela *Price*) - FRC

Séries uniformes:

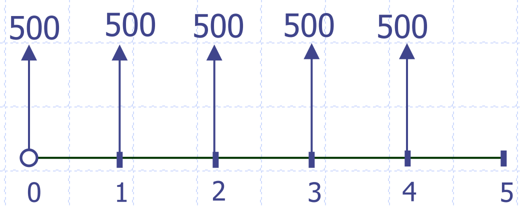
Cálculo de uma série uniforme postecipada

Podemos entender uma série uniforme de pagamentos como uma série de pagamentos que possui as seguintes características: (i) os valores dos pagamentos são todos iguais; e (ii) consecutivos, como ilustrado abaixo:



(a)

$$P = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$



(b)

$$P = A \times (1+i)[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}]$$

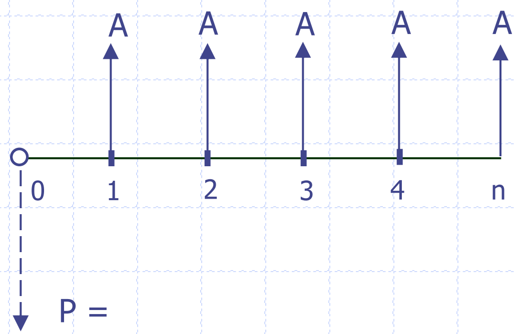
Série postecipada e antecipada

Numa série postecipada (a) o primeiro pagamento ocorre a partir do primeiro período, enquanto uma série antecipada (b) é caracterizada pelo fato do primeiro pagamento ocorrer no início do período.

Séries uniformes:

Cálculo do valor presente P de uma série uniforme postecipada

Consideremos uma série uniforme postecipada do tipo:



$$P = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

O valor presente P, pode ser calculado através da fórmula:

Onde:

P = valor presente das prestações da série postecipada; A = valor das prestações; n = número das prestações.

O fator $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$ é denominado fator de valor atual, FVA, sendo encontrado, como anexo, em tabelas em livros de matemática financeira.

Exercício

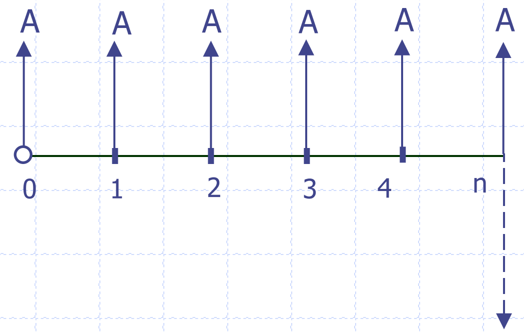
Calcular o valor atual de uma série de 12 prestações mensais, iguais e consecutivas de $150, capitalizadas a uma taxa mensal de $ 5% ao mes.

$$P = A \times FVA_{(5\%,12)} = 150 \times 8{,}86325 = \$\ 1.329{,}48$$

Séries uniformes:

Cálculo do montante F de uma série uniforme antecipada

Consideremos uma série uniforme antecipada do tipo:



O montante F pode ser calculado através da fórmula:

$$F = A \times (1+i) \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

onde:

F = montante acumulado no final do período;

A = valor das prestações;

i = taxa de juros.

Séries uniformes:

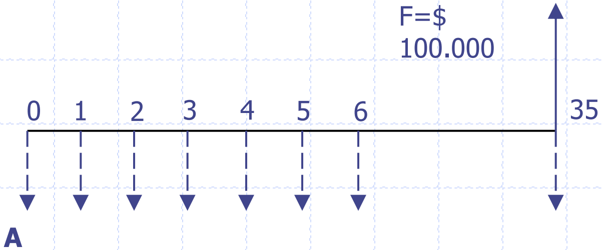
Note, que a expressão entre colchetes nada mais é que o fator de acumulação de capital, FAC, para séries uniformes antecipadas,

E, portanto, a equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$F = A \times (1+i) \times FAC_{(i\%,n)}$$

Exemplo:

Quanto terei de aplicar mensamente, a partir de hoje, para acumular no final de 36 meses, um montante de $ 100.000,00, sabendo-se que a taxa de juros efetiva contratada é de 34,5% ao ano, que as prestações são iguais e consecutivas e a primeira prestação é depositada no período 0.



Vamos, inicialmente, transformar a taxa anual em taxa mensal:

$$i_m = \sqrt[12]{(1+0{,}345)} - 1 = 1{,}024999 - 1 => i = 2{,}5\% a.m.$$

Séries uniformes:

Sabemos que $S_t = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$, substituindo S_1, S_2 , S_3..., por seus respectivos valores temos:

S_t = 100 x $(1{,}04)^4$ + 100 x $(1{,}04)^3$ + 100 x $(1{,}04)^2$ + 100 x $(1{,}04)^1$ + 100 x $(1{,}04)^0$.
Como o fator 100 é comum a todos os termos, podemos agrupar a expressão acima:

S_t = 100 { $(1{,}04)^0 + (1{,}04)^1 + (1{,}04)^2 + (1{,}04)^3 + (1{,}04)^4$ } (equação 10)

Como a série entre chaves, acima, representa a soma de uma **progressão geométrica** de razão 1,04, podemos aplicar a seguinte fórmula,

que nos fornece a soma dos termos de uma PG, com $a_1 = (1{,}04)^0 = 1$, q = 1,04 e n = 5.

$$\frac{a_1 \times q^n - a_1}{q - 1}$$

Transformando a equação 10 com a inclusão da fórmula da soma de uma PG, como mostrado acima, obtemos:

$$100 \times \frac{1 \times (1{,}04)^5 - 1}{1{,}04 - 1}$$

Séries uniformes:

Substituindo os termos genéricos na equação 11, obtemos:

$$S = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ (equação 12)

onde:
S = montante acumulado da série uniforme postecipada; A = valor das prestações;
i = taxa de Juros e n = número de períodos ou prestações.

A expressão $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ é chamada, também, de maneira análoga, as séries simples, **de fator de acumulação de capital**, FAC . Assim, a série uniforme

postecipada, poderia, também, ser calculada da seguinte forma:

S = 100 x $FAC_{(4\%,5)}$ = 100 x 5,41632 = $ 541,63

5.2 **Cálculo do valor das prestações A, conhecido o montante acumulado S**
Podemos transformar a equação 12, colocando A em função de S:

$$A = S \times \frac{i}{(1+i)^n}$$ (equação 13)

A expressão $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ é denominada de fator de formação de capital (FFC), encontrando-se tabelada, na maioria dos livros de matemática financeira.

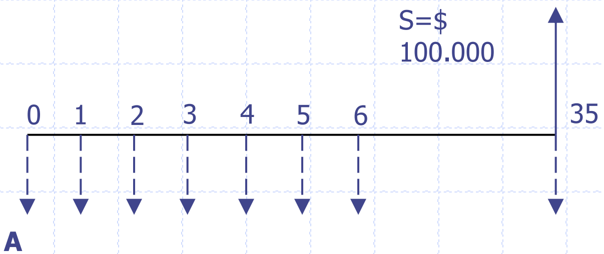
Séries uniformes:

Note, que a expressão entre parenteses, indicada na equação anterior, nada mais é que o fator de acumulação de capital, FAC, para séries uniformes postecipadas,
E, portanto, a equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$S = A \times (1+i) \times FAC_{(i\%,n)}$$

Exemplo:

Quanto terei de aplicar mensamente, a partir de hoje, para acumular no final de 36 meses, um montante de \$ 100.000,00, sabendo-se que a taxa de juros contratada é de 34,489% ao ano, que as prestações são iguais e consecutivas e a primeira prestação é depositada no período 0.



Vamos, inicialmente, transformar a taxa anual em taxa mensal:

$$i_m = \sqrt[12]{(1+0{,}34489)} - 1 = 1{,}024999 - 1 => i = 2{,}5\% a.m.$$

Séries uniformes:

Transformando a equação 16, e colocando A (prestação) em função de S (valor futuro acumulado das prestações) obtemos:

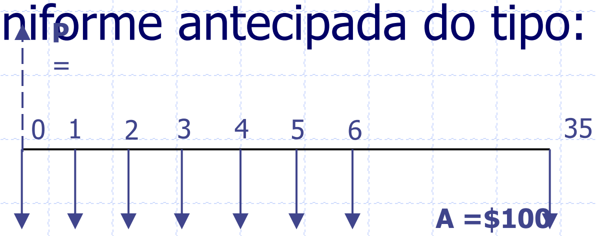
$$A = S \times \frac{1}{(1+i)} \times \frac{i}{(1+i)^{n-1}} = S \times \frac{1}{(1+i)} \times FFC_{(i\%,n)}$$

Aplicando a fórmula acima, com S = \$ 100.000,00, i = 2,5% a.m. e n = 36, obtemos:

A = 100.000 x 1/(1+0,025) x $FFC_{(2,5\%,36)}$= 100.000 x 0,97560 x 0,01745 = \$ 1.702,42

5.4 **Cálculo do valor presente P de uma série uniforme antecipada**

Consideremos uma série uniforme antecipada do tipo:



O valor presente P pode ser calculado através da expressão:

$$\boxed{P = A \times (1+i) \times FVA_{(i\%,n)}}$$

Séries uniformes:

Exemplo:

Determinar o valor presente do financiamento de um bem financiado em 36 prestações iguais de $ 100,00, sabendo-se que a taxa de juros cobrada é de 3,0% a.m. e que a primeira prestação é paga no ato da assinatura do contrato.

$$P = A \times (1+i) \times FVA_{(3,0,\%,36)} = 100 \times (1,03) \times 21,83225 = \$\ 2248,72$$

Cálculo da prestação A, dado o valor presente P de uma série uniforme antecipada

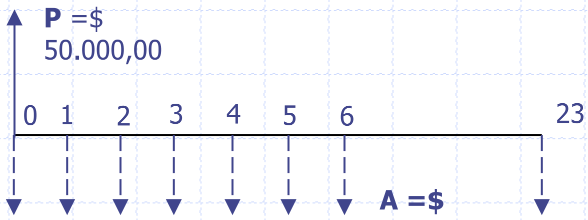
Nestas condições, o valor A da prestação pode ser calculado a partir da transformação da equação 17:

$$A = P\frac{1}{(1+i)} \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}\right] = P \times \frac{1}{(1+i)} \times FRC_{(i\%,n)}$$

Séries uniformes:

Exemplo:

Um terreno é colocado a venda por $ 50.000,00 a vista ou em 24 prestações mensais sendo a primeira prestação paga na data do contrato. Determinar o valor de cada parcela, sabendo-se que o proprietário está cobrando uma taxa de 3,5 % a.a. pelo financiamento.



Aplicando a equação, obtemos:

$$A = P \times \frac{1}{(1+i)} \times FRC_{(i\%,n)} = 50.000 \times \frac{1}{(1+0{,}035)} \times 0{,}06227 = \$3.008{,}21$$

Relações de equivalência

- ***P -> A (A/P,i,n) -FVA***
- ***A-> P (P/A,i,n) - FRC***

$$Sn = a1.\frac{(r^n - 1)}{r - 1} \text{ (lembrete)}$$

$$P_0 = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+i)^n} \Rightarrow P_0 = A\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

Dem:

(P/A) = (P/F)x(F/A).

$$F = P(1+i)^n \qquad A = \frac{F.i}{(1+i)^n - 1}$$

- Paulo pagou $50 à vista por moto de $400. O resto foi financiado em *n* = 10 e *i* = 5% a.m.? Qual a prestação? (PRICE E SAC)

Taxas de Juros

Sistemas de Amortização

Amortização: modo de saldar-se uma dívida.

Principais sistemas de amortização (MATHIAS 1978):

- SAC (Sistema de Amortização Constante): parcelas iguais, juros crescentes e amortização decrescente;
- Sistema Price (ou Francês): prestações iguais, umas pagam o principal, outras os juros →até a última prestação.
- Sistema Americano: paga-se uma única parcela após um certo período e juros durante a carência.

Sistema de amortização constante - SAC

Neste sistema a amortização da divida é constante e igual a P/n , isto é

$$A_{mk} = P/n \,.$$

$A_1 = P/n + jP = (1+nj)P/n$ $SD_1 = (n-1)P/n$

$A_2 = P/n + j(n-1)P/n = [1+j(n-1)]P/n$ $SD_2 = (n-2)P/n$

- Como a divida diminui de P/n por período, as parcelas A_{jk} dos juros diminuem jP/n por período e portanto as prestações formam uma progressão aritmética decrescente de razão $-jP/n$.

  $A_k = A_1 - (k-1)jP/n = [1+j(n-k+1)]P/n$

  $SD_k = (n-k)P/n$

  $A_n = (1+j)P/n$

O total amortizado até o fim do período k , depois de paga a kª prestação, será:

$$Amort_k = kP/n$$

Os juros pagos até este instante serão: $Juros_k = jP(k+1)/2$

$$\text{Total de juros pagos} = jP(n+1)/2$$

$$\text{Total pago} = P[1+j(n+1)/2]$$

Quando as prestações do SAC e da Tabela Price serão iguais ? Devemos ter:

- $A_k = A_1 - (k-1)jP/n = A$ $k = 1+(A_1 - A)n / jP.$

Tabela Price

1) Se VR = 0

(A/F)

$$A = P.\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i.P = P.\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Fator de recuperação do K

(A/P)

Remuneração do K

Amortização (depreciação?)

Fazer um fluxo com os três componentes

Tabela Price

1) Se VR ≠ 0

(A/F)

$$A = \{[P - \frac{VR}{(1+i)^n}].\frac{i}{(1+i)^n - 1}\} + [P - \frac{VR}{(1+i)^n}].i$$

Remuneração do K

Amortização
(depreciação?)

price

$$A = \{[P - \frac{VR}{(1+i)^n}].\frac{i}{(1+i)^n - 1}\} + [P - \frac{VR}{(1+i)^n}].i$$ $= [\ (P - VR) * (i * \ (1 + I)^\wedge n]$ /[(1+i) ^n]-1] + i*VR

Fazer um fluxo com os três componentes

Tabela Price

1) Se VR≠0

$$= P.\frac{i.P}{(1+i)^n - 1} - \frac{i.VR}{(1+i)^n.[(1+i)^n - 1]} + i.P - \frac{i.VR}{(1+i)^n} =$$

$$= i.P.[\frac{1}{(1+i)^n - 1} + 1] - i.VR.[\frac{1}{(1+i)^{2n} - (1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n - 1}] =$$

$$= i.P.[\frac{1 + (1+i)^n - 1}{(1+i)^n - 1}] - i.VR.[\frac{1 + (1+i)^n - 1}{(1+i)^{2n} - (1+i)^n}] =$$

$$= i.P.[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}] - i.VR.[\frac{1}{(1+i)^n - 1}] = se.somar.e.subtrair.por.VR$$

$$= i.P.[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}] - [\frac{i.VR}{(1+i)^n - 1}] - i.VR + i.VR = P.FRC - \frac{i.VR}{(1+i)^n - 1} - i.VR + i.VR =$$

$$= P.FRC - \frac{i.VR - i.VR.(1+i)^n + i.VR}{(1+i)^n - 1} + i.VR = [P - VR].FRC + i.VR$$

Exemplo price

- Em dezembro de 1998 um automóvel G-1000 era anunciado por R$13.191,00. Supondo uma entrada de 50% e juros de 3,67% ao mês, num plano de 36 meses,
- a) qual seria a prestação pela Tabela Price,?
- b) qual o total de juros pagos ?
- c) se o cliente resolver liquidar a dívida no fim de 12 meses, quanto deverá pagar ?

Tabela Price/saldo devedor

$$P_k = P - (A - P_0.i).\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Fator de formação do K (F/A)

Dívida inicial

Juros sobre Do

Saldo Devedor em k

Prestação

Fazer um fluxo com todos os componentes

Considerações sobre Taxas de Juros
Relações de Equivalência

- ***Séries Perpétuas***: são. por exemplo, aposentadorias.

$$P_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{A\cdot(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = A\frac{1}{i} \therefore A = i\cdot P$$

- ***Séries Gradientes:***

$$P_o = G\cdot\left\{\left[\frac{(1+i)^n 1}{i^2} - \frac{n}{i}\right]\cdot\frac{1}{(1+i)^n}\right\} \qquad P = G\left(P/_G;i;n\right)$$

$$A = G\cdot\left(\frac{1}{i} - \frac{n}{i}\cdot\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right) \qquad A = G\left(A/_G;i;n\right)$$

- ***Séries Antecipadas***

$$P_0 = A'\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1}\cdot i} \qquad P_0 = A'\left(P/_A;i;n\right)\left(P/_F;i;n\right)$$

$$A' = P_0\cdot\frac{(1+i)^{n-1}\cdot i}{(1+i)^n - 1} \qquad A' = P\left(A/_P;i;n\right)\left(P/_F;i;n\right)$$

A pluralidade de óticas na análise de investimentos
(Prof Reinaldo Pacheco da Costa)

Suponha um projeto de Indústria de Tratores, Investimentos de $ 40.000 M; receita de $ 9.000 M/ano; custos operacionais de $ 3.000 M / ano (60% matérias primas com diferimento de ICMS). O Estado impõe ICMS de 18 % sobre o valor agregado de produção.

A depreciação é permitida com finalidade de abater o Imposto de Renda devido, com método linear e prazo legal de 10 anos. (25% ALIQUOTA DE IRPJ).

O horizonte do projeto considerado pelos investidores é de 15 anos.

Um Estado da federação está interessado na implantação deste projeto. Note-se que o interesse do Estado não corresponde necessariamente ao da economia como um todo, e o seu comportamento, nestes casos, não difere da ótica privada. Para atrair a empresa, o Estado oferece inventivos fiscais e facilidades para as obras civis no valor de $ 800 mil na implantação. Também durante os primeiros 5 anos, há isenção do ICMS.

O Banco Regional oferece um empréstimo de $ 20.000 M a uma taxa subsidiada de 6 % a.a (a de mercado é de 12 % a.a.), por um prazo de 10 anos (Sistema PRICE). O Banco Regional estima uma receita adicional (serviços, tarifas etc.) devido ao pólo de desenvolvimento gerado pela fábrica de tratores de $ 1.000 M /ano.

Analisar o projeto sob os pontos de vista:

1. Empresarial sem as facilidades oferecidas pelo Estado e pelo Banco Regional;
2. Empresarial com as facilidades oferecidas;
3. Estado

4. BaB}