O grupo de Lorentz

I. M. Gel'fand, R. A. Minlos
Z. Y. Shapiro
"Rep of the rotation and Lorentz groups and their applications"

Considere a forma quadrática:

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{1}$$

onde x^μ são as coordenadas de $\mathbb{R}^4$ (espaço de Minkowski)

Podemos escrever

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Uma transformação linear

$$x' = g x \tag{3}$$

que deixa a forma s^2 invariante é dita uma <u>transformação geral de Lorentz</u>.

Temos então

$$s^2 = x^T \eta x \to x^T g^T \eta g x$$

Para ter invariância

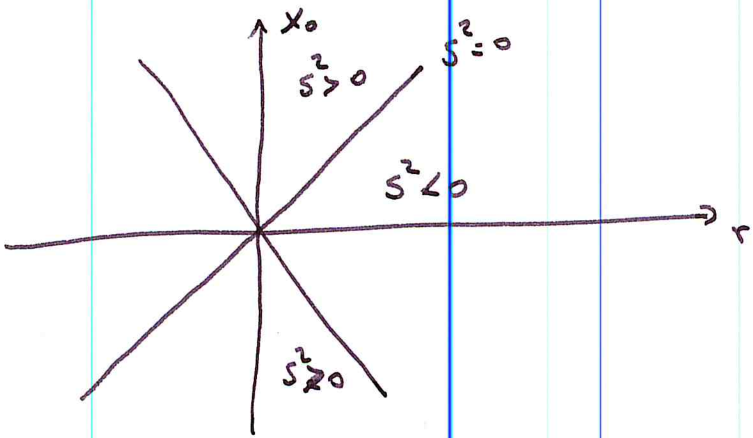
$$g^T \eta g = \eta \tag{4}$$

Como $\det g^T = \det g$ segue que

$$(\det g)^2 = 1 \quad \to \quad \det g = \pm 1 \qquad (5)$$

Logo g é inversível e as transformações formam um grupo, o chamado <u>grupo geral de Lorentz</u>.

A eq. $s^2 = 0$ define um cone em $\mathbb{R}^4$ cujo eixo é x_0.



Note que o grupo geral de Lorentz mapeia:

cone de luz $\to$ cone de luz $\quad s^2 = 0$

interior $\to$ interior $\quad s^2 > 0$

exterior $\to$ exterior $\quad s^2 < 0$

As transf. que ~~preservam~~ mapeiam cada uma das duas partes do cone nelas mesmas são ditas <u>transf. de Lorentz</u>. Ou seja x_0 não troca o sinal.

As transformações de Lorentz (não gerais) formam um grupo (subgrupo das gerais) pois duas transf. que preservam a parte superior do cone são tais que a composição delas também preserva. Este é o <u>grupo de Lorentz completo</u>

As transformações de Lorentz com $\det = 1$ formam um grupo pois

$$\det(g\, g') = \det g \, \det g' = 1 \cdot 1 = 1$$

Este é chamado de <u>grupo de Lorentz próprio</u>.

Nota que o grupo de Lorentz <u>completo</u> é obtido do <u>próprio</u> pela adição da reflexão espacial

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (\equiv \eta) \qquad (6)$$

$$P x = \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Os elementos do grupo completo são

$$g \quad e \quad Pg \qquad \text{Nota } \det P = -1$$

Onde $g \in$ grupo próprio, ou seja $\det g = 1$ e g preserva cada metade do cone

Considere a reflexão temporal

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\equiv -\eta) \qquad (7)$$

O grupo geral de Lorentz pode ser obtido do completo compondo-se com T. Ou seja o geral é formado por

$$g \quad e \quad Tg \qquad g \in \underline{\text{completo}}$$

Logo o geral é da forma

$$g\,,\; Pg\,,\; Tg\,,\; TPg \qquad g \in \underline{\text{próprio}}$$

Considere ~~Atente que~~ as transformações que deixam x_0 invariante:

$$g = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \qquad (8)$$

$$g^T \eta g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & -1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R^T R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad R^T R = 1$$

Logo estas são rotações que formam o grupo O(3).
Temos que

$$(\det R)^2 = 1 \rightarrow \det R = \pm 1 \qquad (9)$$

Logo O(3) é subgrupo do grupo <u>completo</u> de Lorentz e ~~esp.~~ o SO(3) ($\det = 1$) é subgrupo do grupo <u>próprio</u> de Lorentz

Superfícies transitivas

O grupo geral de Lorentz deixa inv. a forma s^2. Logo os pontos da superfície

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \text{const.}$$

são transformados neles mesmos. Ou seja, o grupo geral de Lorentz não atua transitivamente em $\mathbb{R}^4$ mas sim nestas superfícies. Vamos separá-las em 6 tipos

I) $s^2 > 0 \quad x_0 > 0$

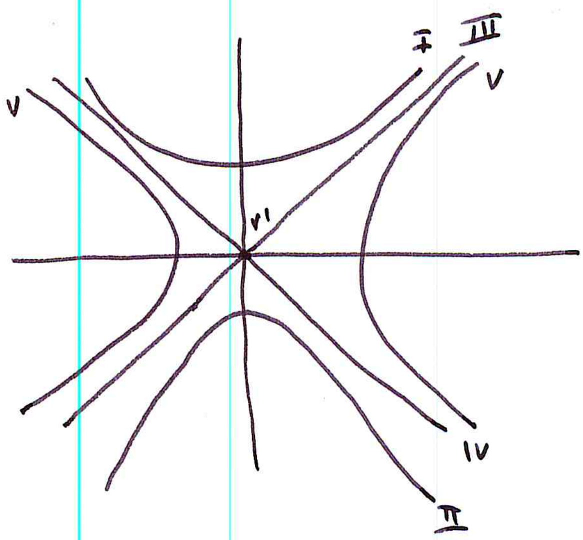
II) $s^2 > 0 \quad x_0 < 0$

III) $s^2 = 0 \quad x_0 > 0$

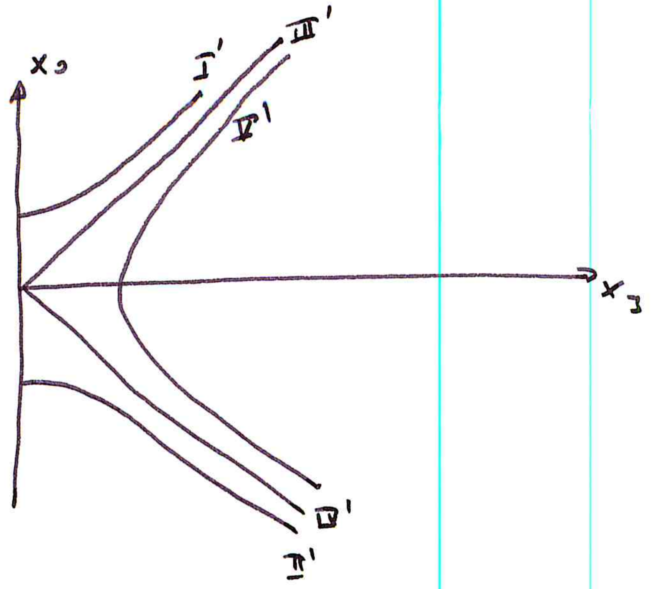
IV) $s^2 = 0 \quad x_0 < 0$

V) $s^2 < 0$

VI) $x_\mu = 0$ (origem)



Dado um ponto de $\mathbb{R}^4$ nós podemos levá-lo ao semi-plano (x_0, x_3), $x_3 > 0$ por uma rotação espacial. Logo podemos considerar



(hiperbólas)

I') $x_0^2 - x_3^2 > 0$ $\quad x_0 > 0$

II') $x_0^2 - x_3^2 > 0$ $\quad x_0 < 0$

III') $x_0 = x_3$ $\quad x_0 > 0$

IV') $x_0 = -x_3$ $\quad x_0 < 0$

V') $x_0^2 - x_3^2 < 0$ $\quad x_3 > 0$

VI') $x_0 = x_3 = 0$

Uma transf Lorentz própria que atua no plano (x_0, x_3) deixa estas curvas invariantes (mapeia elas nelas mesmas)

Qualquer 2 pontos da curva pode ser mapeado um no outro por tal transf Lorentz própria.

~~[illegible] I' - VI' [illegible]~~

Ou seja, o grupo próprio atua transitivamente nas curvas (I' - VI').

Consider uma transformação

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \quad \begin{aligned} x_0' &= a x_0 + b x_3 \\ x_3' &= c x_0 + d x_3 \end{aligned}$$

Temos que ter:

$$\begin{aligned} x_0'^2 - x_3'^2 = x_0^2 - x_3^2 = {} & a^2 x_0^2 + b^2 x_3^2 + 2ab\, x_0 x_3 \\ & - c^2 x_0^2 - d^2 x_3^2 - 2cd\, x_0 x_3 \end{aligned}$$

ou seja

$$a^2 - c^2 = 1 \qquad d^2 - b^2 = 1 \qquad ab = cd$$

Parametrizamos

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_1 \cosh\alpha & c &= \sinh\alpha \\ d &= \varepsilon_2 \cosh\beta & b &= \sinh\beta \end{aligned} \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$$

Daí

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 \cosh\alpha \sinh\beta - \varepsilon_2 \cosh\beta \sinh\alpha = 0 \\ = {} & \cosh(-\varepsilon_2\alpha) \sinh(\varepsilon_1\beta) + \cosh(\varepsilon_1\beta) \sinh(-\varepsilon_2\alpha) \\ = {} & \sinh(\varepsilon_1\beta - \varepsilon_2\alpha) \end{aligned}$$

Ou seja

$$\varepsilon_1\beta = \varepsilon_2\alpha = \bar{\alpha}$$

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_2\alpha & c &= \varepsilon_2 \sinh \varepsilon_2\alpha \\ d &= \varepsilon_2 \cosh \varepsilon_1\beta & b &= \varepsilon_1 \sinh \varepsilon_1\beta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \cosh\bar{\alpha} & \varepsilon_1 \sinh\bar{\alpha} \\ \varepsilon_2 \sinh\bar{\alpha} & \varepsilon_2 \cosh\bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\bar{\alpha} & \sinh\bar{\alpha} \\ \sinh\bar{\alpha} & \cosh\bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

Demostrando

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad g_0 = \begin{pmatrix} \cosh\bar{a} & \sinh\bar{a} \\ \sinh\bar{a} & \cosh\bar{a} \end{pmatrix} \tag{10}$$

We have $\det g_0 = 1$ e temos 4 tipos de g

$$g_0 \,,\quad P g_0 \,,\quad T g_0 \,,\quad PT g_0$$

onde $P = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $\quad T = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $\quad PT = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

Sejam A_1 e A_2 dois pontos de $\mathbb{R}^4$ que estão na mesma superfície do tipo (I-VI).

Podemos rodá-los no num plano (x_0, x_3) $x_3 > 0$

$$B_1 = R_1 A_1 \qquad B_2 = R_2 A_2$$

Segue que B_1 e B_2 estão na mesma curva (I'-VI').

Logo por uma transf. própria g_{03} levamos um no outro ou seja

$$B_2 = g_{03} B_1$$

Logo

$$R_2 A_2 = g_{03} R_1 A_1$$

$$\rightsquigarrow \quad A_2 = g A_1 \qquad g = R_2^{-1} g_{03} R_1$$

Logo o grupo <u>próprio</u> atua transitivamente nas superfícies (I-VI).

Nota que P transforma cada superfície I-VI na mesma. Logo o grupo completo tem as mesmas órbitas que o próprio

Por outro lado T troca as hiperboles p/ $x_0>0$ e $x_0<0$.

Logo as órbitas do grupo geral de Lorentz são:

i) hiperbolóide de duas folhas $s^2>0$

ii) Cone de luz $s^2=0$

iii) hiperbolóide de uma folha $s^2<0$

iv) origem $x=0$

Vimos que o grupo próprio atua transitivamente no hiperbolóide

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=1 \qquad x_0>0 \qquad (11)$$

ou seja qualquer ponto dele pode ser mapeado no ponto

$$O=(1,0,0,0)$$

Para um ponto A de (11) a transf. mais simples é o boost OA no plano (O,A) ou seja o plano que passa por A e pelo eixo x_0.

Mas esta transf. não é única, pois qualquer rotação deixa $O = (1,0,0,0)$ invariante

$$R\,O = O$$

Logo as transf. que levam A em O são da forma

$$g = R\, g_{OA} \qquad \text{(rotação} \times \text{boost)}$$

Logo p/ especificar uma transf. própria é necessário indicar o ponto A no hiperbolóide e uma rotação ou seja

$$g \sim (R, A)$$

Pode-se verificar que transf. diferentes correspondem a pares diferentes.

Temos então:

1) Cada elemento do grupo <u>próprio</u> é dado por 6 parâmetros

3 para o ponto A no hiperbolóide (3 dim)

3 para a rotação

2) O grupo <u>próprio</u> é conexo: quaisquer dois elementos dele podem ser ~~conectados~~ conectados por uma curva contínua.

Isto segue do fato que o hiperbolóide e o grupo das rotações são contínuos.

Qualquer transf. de Lorentz que não é própria ou altera o sinal de x_0 ou então $\det = -1$. Logo ela não pode ser conexa ao grupo próprio:

$\Rightarrow$ grupo próprio $\equiv$ componente conexa do grupo geral.

Transf. da forma $P g$, $g \in$ próprio também formam uma componente conexa. Logo grupo completo tem duas componentes.

Demais componentes

$$T g \qquad g \in \text{próprio}$$

$$TP g \qquad g \in \text{próprio}$$

Logo grupo geral de Lorentz tem 4 componentes conexas

1) G_0 grupo próprio
2) PG_0

$\Big\}$ grupo completo

3) TG_0

4) TPG_0

$$\det G_0 = \det(TPG_0) = 1$$

$$\det(PG_0) = \det(TG_0) = -1$$

Relação entre o grupo de Lorentz e $SL(2,\mathbb{C})$

Considere as matrizes hermitianas 2×2 :

$$X = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - i x_1 \\ x_2 + i x_1 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} \equiv x^\mu \sigma_\mu \qquad (12)$$

ou seja $\quad X^+ = X.$

Existe uma correspondência $1 \leftrightarrow 1$ e linear entre os pontos de $\mathbb{R}^4$ e estas matrizes.

Nota que

$$\det X = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = s^2 \qquad (13)$$

Uma transf linear nas matrizes implica uma transformação linear ~~nos~~ em $\mathbb{R}^4$. Considere:

$$X' = A X A^+ \qquad \text{onde} \qquad \det A = 1 \qquad (14)$$

Nota que

$$X'^+ = A X A^+ = X' \rightarrow X'^+ = X'$$

Além disso:

$$\det X' = \det X \quad \text{pois} \quad \det A = \det A^{+} = 1$$

De (13) vemos então que (14) corresponde a uma transf. de Lorentz.

Denotaremos por g_A a transf. em $\mathbb{R}^4$ induzida por (14).

Considere a transf. identidade:

$$X = A_0 X A_0^{+} \qquad \forall X \qquad (15)$$

Tomando $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ temos:

$$A_0 A_0^{+} = \mathbb{1} \Rightarrow A_0^{+} = A_0^{-1}$$

Daí de (15)

$$X = A_0 X A_0^{-1} \rightarrow X A_0 = A_0 X \qquad \forall X$$

Logo:

$$A_0 = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como:

$$\det A_0 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow A_0 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja $\mathbb{1}$ e $-\mathbb{1}$ fazem a transf. identidade de Lorentz.

Suponha que duas matrizes A_1 e A_2 gerem a mesma transf. em $\mathbb{R}^4$, ou seja:

$$g_{A_1} = g_{A_2} \rightarrow \quad A_1 X A_1^+ = A_2 X A_2^+ \quad \forall X$$

Logo:

$$A_2^{-1} A_1 X (A_2^{-1} A_1)^+ = X$$

e daí

$$A_2^{-1} A_1 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad A_2 = \pm A_1$$

<u>Conclusão:</u>

- Para cada A ($\det A = 1$) associamos uma transf. de Lorentz g_A em $\mathbb{R}^4$.

- A correspondência $A \to g_A$ satisfaz

  i) $g_{A_1} g_{A_2} = g_{A_1 A_2}$

  ii) Duas matrizes A_1 e A_2 correspondem à mesma transf. $g_{A_1} = g_{A_2}$ <u>se e somente se</u> $A_1 = \pm A_2$

Logo temos um subgrupo do grupo de Lorentz <u>geral</u>.

Veremos que corresponde ao grupo <u>próprio</u> de Lorentz

Denotemos por G_A o grupo gerado pelas matrizes A.

— O grupo U das matrizes complexas 2×2 de $\det = 1$ é conexo:

A tem 8 parâmetros reais.

$\det A = 0$ seleciona uma superfície de dim 6.

Como dim da superfície é duas unidades menor que 8 ela não divide $\mathbb{R}^8$.

Desta maneira duas matrizes A_1 e A_2 de $\det \neq 0$ podem ser conectadas por uma curva $A(t)$ contínua que não passa pela superfície $\det = 0$.

Nota que a curva

$$A(t)' = \frac{1}{(\det A(t))^{1/2}} A(t)$$

Conecta matrizes A_1 e A_2 de $\det = 1$, se seja ~~$A(0)$~~ $A_1 = A(0)$ e $A_2 = A(2\pi)$

$$A'(0) = \frac{1}{\sqrt{\det A(0)}} A(0) = A_1 \qquad A'(2\pi) = A_2$$

e a curva está contida em U (A c/ $\det A = 1$)

Se U é conexo G_A também o é.

Logo G_A está contido ~~na~~ na componente conexa do grupo de Lorentz que contém a identidade. Mas ele é igual a esta componente

A A tem 8 parâmetros e $\det = 1$ elimina dois.
Logo U e G_A tem dim $= 6$
Mas o grupo próprio tem dim $= 6$. Logo G_A e o próprio coincidem.

Logo.

As matrizes A e $(-A)$ de $Sl(2, \mathbb{C})$ geram uma única transf. do grupo próprio de Lorentz, (e que todas).

Subgrupo das rotações

Suponha que A é unitária, i.e.

$$A^{+} = A^{-1}$$

Então

$$X' = A X A^{-1}$$

e $\quad \operatorname{Tr} X' = \operatorname{Tr} X \rightarrow \quad x_0' = x_0$

Temos então uma rotação espacial.

As transf. $\tilde{g}_A$ geradas por matrizes unitárias A geram um grupo $\tilde{G}_A$ que formam um ~~tod~~ subgrupo do grupo das rotações. Mas a dimensão de $\tilde{G}_A$ é 3. Pois A tem 8 parâmetros e a condição:

$A^{+} = A^{-1}$ elimina 4 parâmetros e $\det A = 1$ elimina 1.

Logo $\dim \tilde{G}_A = \dim$ grupo das rotações

e $\tilde{G}_A$ é o grupo das rotações espaciais.

Logo A e $(-A)$ (onde $A^{+} = A^{-1}$ $\det A = 1$) estão associadas a uma única rotação

Obtemos assim a relação entre $SU(2)$ e $SO(3)$.

Ou seja $SU(2)$ tem duas vezes mais elementos que $SO(3)$.

Nota que $\mathbb{1}_{2\times 2}$ e $-\mathbb{1}_{2\times 2}$ é o centro de $SU(2)$ que é Z_2

Os cosets $SU(2)/Z_2$ estão em correspondência 1 a 1 com $SO(3)$. Na verdade $SU(2)/Z_2$ é grupo também e temos

$$SO(3) \sim SU(2)/Z_2$$

Z_2 também é o centro de $Sl(2, \mathbb{C})$. Temos então o isomorfismo:

$$Sl(2, \mathbb{C})/Z_2 \equiv \text{grupo próprio de Lorentz}.$$

Elementos de teoria de representação:

Seja V um espaço com norma e suponha que para cada ~~elem~~ elemento $g \in G$ temos uma transf. T_g em V tal que:

i) $T_e = \mathbb{1}$

ii) $T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$

iii) Continuidade: Se $F(v)$ é uma funcional linear limitado em V, então p/ qualquer v fixo $F(T_g v)$ depende continuamente de g.

A correspondência $g \to T_g$ é uma rep. linear de G em V.

Rep. unitária A rep. é unitária se V é um esp. de Hilbert e o produto ~~esca~~ escalar em V é invariante sob T_g:

$$\langle T_g v | T_g v' \rangle = \langle v | v' \rangle$$

Ou seja a rep. é unitária se V é esp. de Hilbert e os operadores são unitários,

$$\langle T_g v | T_g v' \rangle = \langle v | T_g^{+} T_g | v' \rangle$$

Rep. irredutível (rep. infinita)

Uma rep. $g \to T_g$ atuando em V é irredutível se V não possui subespaço invariante fechado sob todas as transf. T_g e se qualquer operador A limitado que comute com todos T_g é múltiplo da identidade.

$\to A = \lambda \mathbb{1}$.

Relação entre representações de $Sl(2,\mathbb{C})$ e do grupo próprio de Lorentz

Nós vimos que a cada A e $(-A)$ de $Sl(2,\mathbb{C})$ corresponde ~~[illegible]~~ um elemento g_A do grupo próprio de Lorentz G.

Logo: uma rep. de G leva a uma rep. de $Sl(2,\mathbb{C})$ pois

$$g \to T_g \quad \to \quad A \to T_A = T_{g_A} \qquad (T_A = T_{-A})$$

Por outro lado, uma rep. de $Sl(2,\mathbb{C})$ leva a uma rep. de G se $T_A = T_{-A}$, ou seja a ~~[illegible]~~ rep $A \to T_A$ fornece $g \to T_g = T_A$ (ou T_{-A})

Se a rep. de $Sl(2,\mathbb{C})$ não satisfaz $T_A = T_{-A}$ então não é possível ter uma rep. de G, pois cada elemento g de G é ~~estará~~ colocado em correspondência com dois operadores T_A e T_{-A}.

Designemos rep de $Sl(2,\mathbb{C})$ onde $T_A \neq T_{-A}$ como rep. "two-valued" do grupo próprio de Lorentz G.
e se $T_A = T_{-A}$ rep. unívoca de G

Pode-se mostrar que é impossível ~~faz~~ fazer uma rep. "two-valued" ficar unívoca, escolhendo-se apenas um operador do par T_A e T_{-A}

Nota que $T_{-A} = T_{-e}\, T_A$ onde $-e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Como $-e$ comuta com todo A, então T_{-e} comuta com todo T_A. Se a rep é irredutível então $T_{-e} = \lambda \mathbb{1}$.

Agora, $(T_{-e})^2 = T_{(-e)^2} = T_e = \mathbb{1}$ e $\lambda^2 = 1 \to \lambda = \pm 1$

~~Então logo T_{-e} p/ $\lambda = 1$~~ T

p/ $\lambda = 1$ $\quad T_{-e} = \mathbb{1}$ e $T_{-A} = T_A \to$ rep unívoca

p/ $\lambda = -1$ $\quad T_{-e} = -\mathbb{1}$ e $T_{-A} = -T_A \to$ rep. "two-valued".
e T_A e T_{-A} diferem apenas no sinal.

Isto generaliza o que tínhamos p/ a

Subgrupos de 1-parâmetro do grupo de Lorentz

Cada transf. de Lorentz é uma sucessão de transf. nos 6 planos (x_μ, x_ν) $\mu, \nu = 0,1,2,3$.

Por exemplo

$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$x_2' = \gamma x_1 + \delta x_2$$
$$x_3' = x_3$$
$$x_0' = x_0$$

Para que $x_1^2 + x_2^2$ seja invariante temos

$$g_{12}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De maneira análoga temos $g_{13}(\varphi)$ e $g_{23}(\varphi)$.

No plano (x_3, x_0) temos

$$g_{03} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

e analogamente p/ g_{01} e g_{02}.

Note que

$$g_{\mu\nu}(\varphi)\, g_{\mu\nu}(\varphi') = g_{\mu\nu}(\varphi + \varphi')$$

Geradores infinitesimais

Os geradores infinitesimais destas transformações são:

$$g_{\mu\nu} = e^{\varphi T_{\mu\nu}} \quad \rightarrow \quad T_{\mu\nu} = g^{-1}_{\mu\nu}\,\partial_\varphi\, g_{\mu\nu}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh\varphi & \cosh\varphi \\ \cosh\varphi & \sinh\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí:

$$T_{12} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad T_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{03} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & & 0 \\ \hline & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Definimos ($T_{ij} = -T_{ji}$):

$$J_i = \frac{-i}{2} \varepsilon_{ijk} T_{jk} \quad , \quad K_i = i T_{0i}$$

i.e.

$$J_1 = -i T_{23} \qquad J_2 = i T_{13} \qquad J_3 = -i T_{12}$$

Pode-se verificar que

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k$$

$$[J_i, K_j] = i \varepsilon_{ijk} K_k \quad \rightarrow [K_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} K_k$$

$$[K_i, K_j] = -i \varepsilon_{ijk} J_k$$

Definimos também

$$J_\pm = J_1 \pm i J_2 \qquad K_\pm = K_1 \pm i K_2$$

Conexão com notações da página 187 de Folland

$$A_{12} \equiv -T_{12} \qquad A_{13} \equiv T_{13} \qquad A_{23} \equiv -T_{23}$$

$$B_1 \equiv T_{01} \qquad B_2 = T_{02} \qquad B_3 = T_{03}$$

Representações irredutíveis do grupo de Lorentz próprio

Note que uma rep. do grupo de Lorentz é também uma representação do subgrupo das rotações espaciais. No entanto, ela é em geral uma representação redutível das rotações. ~~Dessa~~ Como as rotações formam um grupo compacto, suas representações são unitárias. Logo pelo apêndice A temos que a representação é completamente redutível.

Logo escrevemos uma rep. R do grupo próprio de Lorentz como:

$$R \equiv \bigoplus_j R_j$$

onde R_j são representações ~~irred~~ irredutíveis das rotações de spin mais alto j.

Resultado: Se a rep. R de Lorentz é irredutível então uma rep. R_j das rotações de spin j aparece somente uma vez em R.

$\boxed{\text{Ref}}$ (Gelfand assume esse resultado e não prova)

Tomamos a base de R_e como sendo a base usual das representações das rotações ou seja:

$$J_3 |j,m\rangle = m |j,m\rangle$$

$$J_+ |j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\, |j,m+1\rangle$$

$$J_- |j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\, |j,m-1\rangle$$

onde j é inteiro ou semi-inteiro e

$$m = -j, -j+1 \,.\,.\,.\,.\,.\, j-1, j \qquad (2j+1 \text{ estados})$$

A ação dos boosts nestes estados é dada por:

$$K_3 |j,m\rangle = C_j \sqrt{j^2 - m^2}\, |j-1,m\rangle - A_j\, m\, |j,m\rangle$$
$$- C_{j+1} \sqrt{(j+1)^2 - m^2}\, |j+1,m\rangle$$

$$K_+ |j,m\rangle = C_j \sqrt{(j-m)(j-m-1)}\, |j-1,m+1\rangle -$$
$$- A_j \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\, |j,m+1\rangle$$
$$+ C_{j+1} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)}\, |j+1,m+1\rangle$$

$$K_- |j,m\rangle = - C_j \sqrt{(j+m)(j+m-1)}\, |j-1,m-1\rangle$$
$$- A_j \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\, |j,m-1\rangle$$
$$- C_{j+1} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)}\, |j+1,m-1\rangle$$

onde:

$$A_j = \frac{i\, j_0 j_1}{j(j+1)} \qquad C_j = \frac{i}{j}\sqrt{\frac{(j^2-j_0^2)(j^2-j_1^2)}{4j^2-1}}$$

e

$$m = -j, -j+1 \ldots, j-1, j$$

$$j = j_0, j_0+1, j_0+2 \ldots$$

$j_1 \equiv$ número complexo

<u>Nota</u>: i) As reps. irredutíveis são rotuladas pelo par (j_0, j_1)

ii) j_0 é o menor spin da rep. R (irredutível)

iii) j_0 é inteiro ou semi-inteiro

iv) j_1 é arbitrário (complexo)

Os boosts $K_3, K_\pm$ levam R_j em R_{j-1}, R_j e R_{j+1}. Para R_{j-1} e R_{j+1} aparecerem é necessário que C_j e C_{j+1} respectivamente, sejam não nulos.

Note que $C_{j_0} = 0$ e portanto R_{j_0} é levado pelos boosts somente em R_{j_0} e R_{j_0+1}. Logo j_0 é realmente o menor spin.

Temos então que os boosts fazem as transformações:

$$R_{j_0} \longrightarrow R_{j_0} \quad R_{j_0+1}$$

$$R_{j_0+1} \longrightarrow R_{j_0} \quad R_{j_0+1} \quad R_{j_0+2}$$

$$R_{j_0+2} \longrightarrow R_{j_0+1} \quad R_{j_0+2} \quad R_{j_0+3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Logo a representação R decompõe-se como:

$$R = R_{j_0} + R_{j_0+1} + R_{j_0+2} \cdots$$

Note que se existir j_{max} tal que $C_{j_{max}+1} = 0$ então a rep. R é finita, uma vez que a série acima trunca.

Como ~~$j_{max} \geq 0$~~

$$C_{j_{max}+1} = \frac{i}{j_{max}+1} \sqrt{\frac{((j_{max}+1)^2 - j_0^2)((j_{max}+1)^2 - j_1^2)}{4(j_{max}+1)^2 - 1}}$$

~~Ao~~ ~~no~~ ~~????~~ e como $j_{max} \geq j_0$ temos que ter

$$(j_{max}+1)^2 - j_1^2 = 0 \rightarrow j_{max} = |j_1| - 1$$

Logo a rep. R é finita se:

$$j_1 \equiv \text{inteiro ou semi-inteiro}$$

Comentário:

As representações irredutíveis do grupo de Lorentz próprio discutidas acima satisfazem:

p/ j_0 inteiro a rep é "single valued"

p/ j_0 semi-inteiro a rep. é "double-valued".

Representações irredutíveis unitárias do grupo próprio

O fato da rep. ser unitária implica a existência de uma forma bilinear positiva definida e invariante, i.e.

$$\langle f | f \rangle \geq 0$$

$$\langle gf | gf \rangle = \langle f | f \rangle$$

onde g é uma transf. de Lorentz.

$$T_g |f\rangle = |gf\rangle$$

Em uma rep. unitária os elementos do grupo são operadores unitários, ou seja:

$$g^{\dagger} = g^{-1}$$

Os geradores de Lorentz são J_i e K_i e um elemento genérico perto da identidade é:

$$g = e^{i\varphi_i J_i + i\theta_i K_i}$$

$$= 1 + i\varphi_i J_i + i\theta_i K_i + \dots$$

e

$$g^{\dagger} = g^{-1} = 1 - i\varphi_i J_i^{\dagger} - i\theta_i K_i^{\dagger} + \dots$$

$$= 1 - i\varphi_i J_i - i\theta_i K_i^{\dagger} + \dots$$

Logo os geradores são hermitianos:

$$J_i^{\dagger} = J_i \qquad K_i^{\dagger} = K_i$$

Segue então que

$$J_+^{\dagger} = J_- \qquad K_+^{\dagger} = K_-$$

$$J_3^{\dagger} = J_3 \qquad K_3^{\dagger} = K_3$$

Segue então que:

$$\langle j'm'|J_3|jm\rangle = m\,\langle j'm'|jm\rangle$$
$$= m'\,\langle j'm'|jm\rangle$$

e

$$\langle j'm'|jm\rangle = 0 \quad \text{se} \quad m \neq m'$$

Agora:

$$\langle j'm|J_+J_-|jm\rangle = \sqrt{(j(j+1)-m(m-1))(j(j+1)-(m-1)m)}\,\langle j'm|jm\rangle$$

$$= \sqrt{(j'(j'+1)-m(m-1))(j'(j'+1)-(m-1)m)}\,\langle j'm|jm\rangle$$

ou seja,

$$\left(j(j+1)-m(m-1)\right)-\left(j'(j'+1)-m(m-1)\right)\langle j'm|jm\rangle = 0$$

ou

$$\left(j(j+1)-j'(j'+1)\right)\langle j'm|jm\rangle = 0$$

Então

$$\langle j'm|jm\rangle = 0 \quad \text{se} \quad j' \neq j$$

Logo

$$\langle j'm'|jm\rangle = 0 \quad \text{se} \quad m \neq m' \text{ e } j' \neq j$$

Da pág 25 temos:

$$\langle jm | K_3 | jm \rangle = -m A_j \langle jm | jm \rangle$$

$$\langle jm | K_3 | jm \rangle^{+} = \langle jm | K_3 | jm \rangle$$

$$= -m A_j^{*} \langle jm | jm \rangle$$

$$= -m A_j \langle jm | jm \rangle$$

Logo

$$A_j^{*} = A_j$$

Como $A_j = \dfrac{i\, j_0 j_1}{j(j+1)}$ com j_0 = inteiro ou semi-inteiro e j também

Segue que:

1) j_1 é imaginário puro (j_0 qualquer inteiro ou semi-inteiro)

2) $j_0 = 0$

Agora:

$$\langle jm | K_3 | j-1, m \rangle = - C_j \sqrt{j^2 - m^2} \langle jm | jm \rangle$$

$$= C_j^{*} \sqrt{j^2 - m^2} \langle j-1, m | j-1, m \rangle$$

Logo

$C_j^{*} = - C_j$ e C_j é imaginário puro.

Como $C_j = \frac{i}{j}\sqrt{\frac{(j^2-j_0^2)(j^2-j_1^2)}{4j^2-1}}$

Temos que ter

$$\frac{(j^2-j_0^2)(j^2-j_1^2)}{4j^2-1} \geq 0$$

Mas $j > j_0$ e $j > \frac{1}{2}$ e daí $(j^2-j_1^2) \geq 0$

Se j_1 é imaginário isto é sempre satisfeito e j_0 não tem restrição

Se $j_0 = 0$ o próximo valor de j é 1 e daí precisamos

$$1 - j_1^2 \geq 0$$

Logo j_1 é real e $|j_1| \leq 1$

ou j_1 é imaginário e temos o caso anterior

Portanto as reps. irredutíveis do grupo de Lorentz próprio são:

1) j_1 é imaginário e j_0 é inteiro ou semi-inteiro

2) $j_0 = 0$ e j_1 é real e $|j_1| \leq 1$

1) série principal

2) série suplementar

Nota que estas reps são todas infinitas com exceção do caso

$$j_0 = 0 \quad j_1 = 1$$

que tem dimensão 1.

Conexão c/ teorias de campos

Nota que as representações irredutíveis unitárias do grupo de Lorentz próprio tem dimensão infinita e a estrutura

$$R = R_{l_0} + R_{l_0+1} + R_{l_0+2} + \dots \qquad (*)$$

Uma teoria de campo tem que definir uma representação unitária do grupo de Lorentz.

Esta é dada na verdade pelo espaço de Hilbert da teoria.

As componentes irredutíveis são dadas por exemplo pelos estados de uma partícula.

Nota que uma partícula de spin j em repouso define uma representação de dimensão $2j+1$ do grupo de rotações espaciais. Esta corresponde a R_{10}.

Se fizermos boosts nesta partícula geramos momento angular orbital e portanto geramos estados com spin mais alto que j. e que diferem de j por um número inteiro.

Logo os estados de uma partícula definem uma rep. irredutível unitária da forma (*)

Estados de 2 partículas também definem reps. unitárias mas têm que ser resolvidas em termos de irredutíveis.

Nota que a única rep unitária finita, correspondendo a

$$j_0 = 0 \qquad j_1 = 1$$

Corresponde ao vácuo do espaço de Fock, ou seja o estado sem partículas.

Operadores de Casimir

Note que os operadores

$$C_1 = \sum_i \left(J_i^2 - K_i^2\right)$$

$$C_2 = \sum_i J_i K_i = \sum_i K_i J_i$$

comutam com todos os geradores de Lorentz.

Indeed:

$$[C_2, J_j] = [J_i K_i, J_j] =$$

$$= i\,\varepsilon_{ijk} J_i K_k + i\,\underset{kji}{\varepsilon_{ijk}}\, \underset{i}{J_k}\, \underset{k}{K_i}$$

$$= 0$$

$$[C_2, K_j] =$$

$$= -i\,\varepsilon_{ijk} J_i J_k + i\,\varepsilon_{ijk} K_k K_i$$

$$= 0$$

$$[J_i^2, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_i J_k + i\varepsilon_{ijk} J_k J_i$$

$$= 0$$

$$[K_i^2, J_j] = i\varepsilon_{ijk} K_i K_k + i\varepsilon_{ijk} K_k K_i$$

$$= 0$$

$$[J_i^2, K_j] = J_i\, i\varepsilon_{ijk} K_k + i\varepsilon_{ijk} K_k J_i$$

$$= i\varepsilon_{ijk} (J_i K_k + K_k J_i)$$

$$[K_i^2, K_j] = K_i(-i\varepsilon_{ijk} J_k) - i\varepsilon_{ijk} J_k K_i$$

$$= -i\varepsilon_{\underset{k}{i}j\underset{i}{k}} (K_{\underset{k}{i}} J_{\underset{i}{k}} + J_{\underset{i}{k}} K_{\underset{k}{i}})$$

$$= i\varepsilon_{ijk} (J_i K_k + K_k J_i)$$

So:

$$[J_i^2 - K_i^2, K_j] = 0$$

Definimos:

$$N_i = \frac{J_i + i K_i}{2} \qquad N_i^+ = \frac{J_i - i K_i}{2}$$

A álgebra desacopla pois:

$$[J_i + i\varepsilon K_i , J_j + i\eta K_j] =$$

$$= i \varepsilon_{ijk} J_k - \eta \varepsilon_{ijk} K_k - \varepsilon \varepsilon_{ijk} K_k + \varepsilon\eta i \varepsilon_{ijk} J_k$$

Só:

$$[N_i, N_j] = i \varepsilon_{ijk} N_k$$

$$[N_i^+, N_j^+] = i \varepsilon_{ijk} N_k^+$$

$$[N_i, N_j^+] = 0$$

Portanto, a complexificação da álgebra de Lorentz é isomórfica a duas cópias da álgebra $SU(2)$.

Podemos então construir as representações a partir das reps. de $SU(2)$.

Nota que temos 2 operadores de Casimir:

$$\bar{C}_1^{\circ} = \sum_{i=1}^{3} N_i^2 \qquad \bar{C}_2^{\circ} = \sum_{i=1}^{2} N_i^{+2}$$

que comutam com todos os geradores. Estes correspondem aos que já discutimos pois:

$$4 N_i^2 = J_i^2 - K_i^2 + i\,(J_i K_i + K_i J_i)$$
$$= J_i^2 - K_i^2 + 2i\, J_i K_i$$

$$4 N_i^{+2} = J_i^2 - K_i^2 - 2i\, J_i K_i$$

ou seja $J_i^2 - K_i^2$ e $J_i K_i$.

Representações da álgebra de Lorentz a partir das de SU(2)

A complexificação da álgebra de Lorentz como vimos tem a estrutura de $SU(2) \otimes SU(2)$.

Logo se temos representações de $SU(2) \otimes SU(2)$ podemos construir representações da álgebra de Lorentz.

Sejam $|j,m\rangle$ os estados de uma rep. do $SU(2)$ gerado por N_i e $|j',m'\rangle$ aqueles do $SU(2)$ gerado por N_i^+.

Podemos construir representações de Lorentz através dietas tomando-se o produto tensorial

$$T_i \equiv N_i \otimes 1 \qquad \overline{T}_i = 1 \otimes N_i^+$$

e os estados sendo

$$|j,m\rangle \otimes |j',m'\rangle$$

ou seja

$$T_i \, |j,m\rangle \otimes |j',m'\rangle = N_i \, |j,m\rangle \otimes |j',m'\rangle$$

$$\overline{T}_i \, |j,m\rangle \otimes |j',m'\rangle = |j,m\rangle \otimes N_i^+ |j',m'\rangle$$

Note que este procedimento fornece representações da álgebra e não do grupo de Lorentz.

Lembre-se que para obtermos uma rep. do grupo temos que os operadores p/ $1\!\!1_{2\times2}$ e $-1\!\!1_{2\times2}$ têm que ser os mesmos.

Exemplos (Denotamos $R^{jj'}$ a rep. $|j,m\rangle \otimes |j',m'\rangle$)

1) $R^{0\,1/2}$

Neste caso temos dois estados

$$|0,0\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle$$
$$|0,0\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle$$

2) $R^{1/2\,0}$

é semelhante

3) $R^{1/2\,1/2}$: Temos 4 estados

$$|1/2, 1/2\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle \qquad |1/2\ -1/2\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle$$
$$|1/2 . 1/2\rangle \otimes |1/2\ -1/2\rangle \qquad |1/2\ -1/2\rangle \otimes |1/2\ -1/2\rangle$$

O grupo de Poincaré

Nota que se consideramos diferenças de posição

$$\Delta x^\mu = x_1^\mu - y_1^\mu$$

então a forma

$$\Delta x^\mu \Delta x^\mu = \Delta S^2$$

é deixada invariante por translações também.

Temos então as transformações

$$x \to x' = g x + a$$

Compondo obtemos:

$$x'' = g_2 x' + a_2 =$$

$$= g_2 (g_1 x + a_1) + a_2$$

$$= g_2 g_1 x + g_2 a_1 + a_2$$

Ou seja

$$(g_2, a_2)(g_1, a_1) = (g_2 g_1 , g_2 a_1 + a_2)$$

Isto define um produto semi directo entre as transf. de Lorentz e as translações.

Nota que a inversa de (g,a) é $(g^{-1},-g^{-1}a)$ pois

$$
\begin{aligned}
(g^{-1},-g^{-1}a)\,x' &= (g^{-1},-g^{-1}a)(gx+a) \\
&= g^{-1}gx + g^{-1}a - g^{-1}a \\
&= x
\end{aligned}
$$

Considere a conjugação:

$$
\begin{aligned}
&(g,a)(1,b)(g^{-1},-g^{-1}a) = \\
&= (g,\, gb+a)(g^{-1},-g^{-1}a) \\
&= (1,\, -a+gb+a) \\
&= (1,\, gb)
\end{aligned}
$$

Logo a conjugação de translações é translações.
e estas formam um <u>subgrupo invariante</u>
Como ele é abeliano segue que o grupo de Poincaré é <u>não-semisimples</u>.

O grupo de Poincaré, como o de Lorentz, tem 4 setores

$$(g,a) \qquad (Pg,a) \qquad (Tg,a) \qquad (TPg,a)$$

Realização matricial

Nota que podemos realizar o grupo por matrizes 5×5

$$(g,a) \equiv \left(\begin{array}{c|c} g & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

onde g é 4×4 e a é 4×1.

Daí:

$$\left(\begin{array}{c|c} g_2 & a_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} g_1 & a_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} g_2 g_1 & g_2 a_1 + a_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

e portanto é uma rep. matricial.

No caso de $a=0$ temos

$$\left(\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{e esta é Lorentz}$$

e p/ $g=1$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{é translação}$$

A álgebra é então dada pelas seis matrizes da álgebra de Lorentz

$$\left(\begin{array}{c|c} J_i & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} K_i & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

e pelas 4 translações:

$$P_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad P_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$P_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad P_3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

As relações de comutação são:

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k$$

$$[J_i, K_j] = i \varepsilon_{ijk} K_k$$

$$[K_i, K_j] = -i \varepsilon_{ijk} J_k$$

$$[J_i, P_j] = i \varepsilon_{ijk} P_k$$

$$[J_i, P_0] = 0$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_i, K_j] = i \delta_{ij} P_0$$

$$[P_0, K_i] = i P_i$$

Operadores de Casimir

Temos dois operadores de Casimir. O primeiro é

$$P^2 = P_\mu P^\mu = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2$$

Temos:

$$[J_i, P^2] = [J_i, P_0^2 - P_j^2] =$$

$$= - P_j [J_i, P_j] - [J_i, P_j] P_j$$

$$= - i \varepsilon_{ijk} P_j P_k - i \varepsilon_{ijk} P_k P_j$$

$$= 0$$

$$[P^2, K_j] = [P_0^2 - P_i^2, K_j] =$$

$$= i P_0 P_j + i P_j P_0 - P_i \, i \delta_{ij} P_0 - i \delta_{ij} P_0 P_i$$

$$= 0$$

Claro $\quad [P^2, P_\mu] = 0$

O segundo Casimir é:

$$W^2 = W_0^2 - W_j^2 \quad \text{onde}$$

$$W_0 = J_i P_i$$

$$W_i = \varepsilon_{ijk} K_j P_k + J_i P_0$$

Then:

$$[W^0, P_j] = [J_i P_i, P_j] =$$
$$= i\,\varepsilon_{ijk} P_k P_i$$
$$= 0$$

$$[W^0, P_0] = 0$$

$$[\varepsilon_{ijk} K_j P_k + J_i P_0 , P_0] =$$

$$= -i\varepsilon_{ijk} P_j P_k = 0$$

$$[\varepsilon_{ijk} K_j P_k + J_i P_0 , P_\ell]$$

$$= \varepsilon_{ijk} [K_j , P_\ell] P_k + i\varepsilon_{i\ell k} P_k P_0$$

$$= -i\varepsilon_{ijk} \delta_{j\ell} P_0 P_k + i\varepsilon_{i\ell k} P_k P_0$$

$$= 0$$

So, we have

$$[W_\mu , P_\nu] = 0$$

$$[W^0, J_j] = [J_i P_i, J_j] =$$

$$= i\varepsilon_{ijk} J_k P_i + J_i \, i\varepsilon_{jik} P_k$$

$$= i\varepsilon_{ijk} (J_k P_i - J_k P_i)$$

$$= 0$$

$$[W_i, J_l] = \varepsilon_{ijk} [K_j P_k, J_l] + [J_i P_0, J_l]$$

$$= i\underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}} K_m P_k + i\varepsilon_{ijk}\underbrace{\varepsilon_{klm}} K_j P_m + i\varepsilon_{ilm} J_m P_0$$

$$= -i(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}) K_m P_k$$

$$+ i(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) K_j P_m$$

$$+ i\varepsilon_{ilm} J_m P_0$$

$$= \cancel{-i\delta_{il}(K.P)} + iK_i P_l + \cancel{i\delta_{il}(K.P)}$$

$$- iK_l P_i + \underline{i\varepsilon_{ilm} J_m P_0}$$

$$= i\varepsilon_{ilm}(J_m P_0 + \varepsilon_{mpq} K_p P_q)$$

$$\delta_{ip}\delta_{lq} - \delta_{iq}\delta_{lp}$$

So:

$$[W_i, J_l] = i\varepsilon_{ilm} W_m$$

$$[W_0, K_j] = [J_i P_i, K_j] =$$

$$= i\,\varepsilon_{ijk} K_k P_i + i\,\delta_{ij} J_i P_0$$

$$= i\left(\varepsilon_{jki} K_k P_i + J_j P_0\right)$$

$$[W_0, K_j] = i\,W_j$$

$$[W_i, K_j] = \varepsilon_{ikl}\,[K_k P_l, K_j] + [J_i P_0, K_j]$$

$$= -i\,\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{kjm}\,J_m P_l + i\,\varepsilon_{ikl}\,\cancel{K_k}\,\delta_{lj} P_0$$

$$+\, i\,\varepsilon_{ijk}\,\cancel{K_k} P_0 + i\,J_i P_j$$

$$= i\left(\delta_{ij}\,\delta_{lm} - \cancel{\delta_{im}\,\delta_{jl}}\right) J_m P_l + i\,\cancel{J_i} P_j$$

$$= i\,\delta_{ij}\,W_0$$

Summarizing

$$\boxed{\begin{array}{ll} [W_0, J_i] = 0 & [W_0, K_i] = i\,W_i \\ [W_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk} W_k & [W_i, K_j] = i\,\delta_{ij} W_0 \end{array}}$$

So:

$$[W_0^2 - W_i^2, J_j] = - W_i [W_i, J_j] - [W_i, J_j] W_i$$

$$= -i \epsilon_{ijk} W_i W_k - i \epsilon_{ijk} W_k W_i$$

$$= 0$$

$$[W_0^2 - W_i^2, K_j] = i W_0 \cancelto{1}{W_j} + i \cancelto{2}{W_j W_0}$$

$$- i W_i \cancelto{2}{\delta_{ij}} W_0 - i \delta_{ij} \cancelto{1}{W_0} W_i$$

$$= 0$$

Nota que:

$$W_0^2 = J_i P_i J_j P_j = \boxed{\cancel{[illegible]}}$$

$$= P_i J_i P_j J_j = P_i P_j J_i J_j + i P_i \cancelto{0}{\epsilon_{ijk} P_k J_j}$$

Representações induzidas (Apêndice C pág 313 Cornwell Vol I)

Considere um grupo G e um subgrupo S. $(S \subset G)$

~~Seja R uma representação~~

Considere representantes $g_1, g_2, \ldots$ dos cosets da direita $S \backslash G$

Se R uma rep. unitária de S

$$R(s)\,R(s') = R(ss')$$

Construímos uma rep. unitária de G através das matrizes

$$T^{\uparrow}(g)_{kr,ls} = \begin{cases} R(g_k g g_l^{-1})_{rs} & \text{se } g_k g g_l^{-1} \in S \\ 0 & \text{se } g_k g g_l^{-1} \notin S \end{cases}$$

Além disso o caracter é dado por

$$\chi^{\uparrow}(g) = \sum_j \chi^R(g_j g g_j^{-1})$$

onde χ^R é o caracter na rep. R e a soma é somente aqueles j onde $g_j g g_j^{-1} \in S$.

Prova:

Temos que mostrar que

$$T(g)\,T(g') = T(gg')$$

ou seja

$$(T(g)\,T(g'))_{kt,jr} = \sum_{l,u} T(g)_{kt,lu}\, T(g')_{lu,jr}$$

Na soma acima estão incluídos os l tal que

$g_k g g_l^{-1} \in S$ e $g_l g' g_j^{-1} \in S$.

No entanto se $(s \in S)$

$$g_k g g_l^{-1} = s \rightarrow g_k g = s g_l \in \text{coset de } g_l$$

Mas $g_k g$ pertence somente a um coset e logo existe apenas um valor de l tal que $g_k g g_l^{-1} \in S$. Denote este valor por l'.

Então

$$g_k (g g') g_j^{-1} = \underbrace{g_k g g_{l'}^{-1}}_{\in S} g_{l'} g' g_j^{-1}$$

Mas $g_{l'} g' g_j^{-1} \in S$ se e somente se $g_k (g g') g_j^{-1} \in S$

Quando isso ocorre temos:

$$\sum_u R(g_k g g_\ell^{-1})_{tu} R(g_\ell g' g_j^{-1})_{ur} = R(g_k g g' g_j^{-1})_{tr}$$

No caso em que $g_k g g' g_j^{-1} \notin S$ então obtemos zero

Isto prova o fato de ser representação.

Nota que

$$T^T(g^{-1})^*_{kt,jr} = T_{jr,kt}(g^{-1})^*$$

$$= \begin{cases} R(g_j g^{-1} g_k^{-1})^*_{rt} & \text{if } g_j g^{-1} g_k^{-1} \in S \\ 0 & \text{if } \quad '' \notin S \end{cases}$$

$$= \begin{cases} R(g_k g g_j^{-1})_{tr} & '' \\ 0 & '' \end{cases}$$

$$= T_{tr}(g)$$

Uma vez que R é unitária, ou seja

$$R^T(g^{-1})^* = R(g)$$

Quanto ao caráter

$$\chi^{T}(g) = \sum_{j,r} T(g)_{jr,jr}$$
$$= \sum_{j,r} R(g_j g g_j^{-1})_{rr}$$
$$= \sum_{j} \chi^{R}(g_j g g_j^{-1})$$

O método da rep. induzida funciona muito bem no caso em que G é o um produto semi-direto

$$G = A \otimes B$$

onde A é um subgrupo abeliano invariante.

O subgrupo relevante é

$$S = A \otimes \tilde{B}$$

onde $\tilde{B}$ é o "little group", subgrupo de B que ~~[illegible]~~ deixa o caráter de A invariante

$$\chi_A(BAB^{-1}) = \chi_A(A) \quad \text{onde} \quad B \in \tilde{B}, \; A \in A$$

e χ_A é o caráter de uma irrep de A, que é unidimensional

Segue então o teorema:

Teo: i) A rep. induzida de G construída a partir de rep. irredutíveis de $A \otimes \tilde{B}$ é irredutível

ii) O conjunto completo de rep. irredutíveis de G podem ser determinados escolhendo-se um vetor q em cada órbita e daí construindo a rep de G p/ cada rep. inequivalente do "little group" $\tilde{B}$

q é o vetor que rotula as irreps de A e a órbita é ~~contém~~ a órbita de B atuando neste vetor.

~~Unidade dos caracteres:~~

$$\chi^{P}(g) = \sum_{j,r} T(g)_{jr,jr}$$

$$= \sum_{j}\sum_{r} R(g_j\, g\, g_j^{-1})_{rr}$$

$$= \sum_{j} \chi^{R}(g_j\, g\, g_j^{-1})$$

<u>Representações unitárias irredutíveis de $P_+^{\uparrow}$ (grupo de Poincaré próprio)</u> (Seção 17.8 pag 709, Cornwell Vol II)

Estas reps. foram construídas por E. P. Wigner em 1939 usando o método das reps. ~~ind~~ induzidas.

As translações constituem um subgrupo abeliano invariante. Suas reps. irredutíveis são unidimensionais e podem ser escritas:

$$T^{p}_{p}\big((1,a)\big) = e^{\,i\, a_\mu p_\mu}$$

onde p_μ são os autovalores de P_μ nesta representação.

Selecione um vetor $\hat{p} = (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ e defina o "little group" de $\hat{p}$ $\tilde{L}(\hat{p})$ como as transf. $\tilde{\Lambda}$ do grupo próprio de Lorentz tal que:

$$\tilde{\Lambda} \hat{p} = \hat{p}$$

A órbita de $\hat{p}$ é constituída de vetor p tal que

$$p = \Lambda \hat{p} \qquad \Lambda \in \text{grupo próprio. L}$$

Existe uma correspondência 1 a 1 entre vetores p's e os cosets $L/\tilde{L}$:

$$\text{órbita de } \hat{p} \equiv \underbrace{L}_{\text{grupo próprio}} / \underbrace{\tilde{L}}_{\text{little group}}$$

Existem 6 órbitas

			little group	representante $\hat{p}$	
i)	$p^2 > 0$	$p_0 > 0$	$SO(3)$	~~$p=(p_0,0,0,0)$~~ $p = (p_0,0,0,0)$	
ii)	$p^2 > 0$	$p_0 < 0$	$SO(3)$	$p = (p_0, 0, 0, 0)$	$p_0 < 0$
iii)	$p^2 < 0$		$SO(2,1)$	$p = (0, p_1, 0, 0)$	$p_1 \neq 0$
iv)	$p^2 = 0$	$p_0 > 0$	$E(2)$	$p = (p_0, p_0, 0, 0)$	$p_0 > 0$
v)	$p^2 = 0$	$p_0 < 0$	$E(2)$	$p = (p_0, p_0, 0, 0)$	$p_0 < 0$
vi)	$p = 0$		grupo próprio de Lorentz	$p = (0, 0, 0, 0)$	

O caráter do elemento

$$T((1,a)) = e^{i a_\mu p^\mu}$$

é a própria fase, pois a rep. é de dim = 1.

Como

$$(g,0)(1,a)(g,0)^{-1} = (1, ga)$$

Além disso os elementos do grupo de Lorentz satisfazem:

$$g^T \eta g = \eta \rightarrow \eta g = g^{T^{-1}} \eta$$

e daí

$$\hat{p}^T \eta (g a) = \hat{p}^T g^{T^{-1}} \eta a = (g^{-1} \hat{p}) \eta a$$

Logo:

$$\chi\left((g,0)(1,a)(g,0)^{-1}\right) = \chi((1,ga))$$

$$= e^{i \hat{p}^T \eta g a}$$

$$= e^{i (g^{-1}\hat{p})^T \eta a}$$

$$= e^{i (g^{-1}\hat{p})_\mu a^\mu}$$

Para que seja igual a $e^{i p^\mu a_\mu}$ é preciso:

$$g^{-1}\hat{p} = \hat{p}$$

ou seja g tem que pertencer ao "little group"

Se R é uma rep. unitária irred. do little group $\tilde{L}$ então

$$e^{i \hat{p}^\mu a_\mu} R$$

é rep unitária ~~irred~~ irredutível do produto semi-direto $A \otimes \tilde{L}$

Constroe-se então a rep. induzida do grupo próprio de Poincaré $P_+^\uparrow$ a partir destas rep. de $A \otimes \tilde{L}$.

Uma das dificuldades está em encontrar os representantes dos cosets $L/\tilde{L}$.

Mas como este coset é infinito então as reps. de Poincaré serão infinitas.

<u>Caso $p^2>0$</u> (i) e ii))

Neste caso temos um estado com momento

$$\hat{p} = (p_0, 0, 0, 0) \sim |\hat{p}\rangle$$

Daí

$$W_0 |\hat{p}\rangle = J_i P_i |\hat{p}\rangle = 0$$

$$W_i |\hat{p}\rangle = \epsilon_{ijk} K_j P_k |\hat{p}\rangle + J_i P_0 |\hat{p}\rangle$$

$$= p_0 J_i |\hat{p}\rangle$$

e $$P_\mu |\hat{p}\rangle = p_0 |\hat{p}\rangle \delta_{\mu,0}$$

Logo

$$P^2 |\hat{p}\rangle = m^2 |\hat{p}\rangle \qquad m^2 = \hat{p}^2 = p_0^2$$

$$W^2 |\hat{p}\rangle = -W_i^2 |\hat{p}\rangle$$

$$= -p_0^2 J_i^2 |\hat{p}\rangle$$

$$= -m^2 J^2 |\hat{p}\rangle$$

Como $|\hat{p}\rangle$ faz parte de uma rep de spin j temos

$$\cancel{W^2 |\hat{p}\rangle = -m^2 j(j+1)}$$

$$W^2 |\hat{p}\rangle = -m^2 j(j+1) |\hat{p}\rangle$$

Rep. corresponde a uma partícula de massa <u>m</u> e spin j.

Caso $p^2 = 0$

Temos estado

$$|\hat{p}\rangle \qquad \hat{p} = (p_0, p_0, 0, 0)$$

Então

$$P^2 |\hat{p}\rangle = 0$$

$$W_0 |\hat{p}\rangle = J_i P_i |\hat{p}\rangle = p_0 J_1 |\hat{p}\rangle$$

$$W_i |\hat{p}\rangle = \varepsilon_{ijk} K_j p_0 \delta_{k,1} |\hat{p}\rangle + p_0 J_i |\hat{p}\rangle$$

$$= \varepsilon_{ij1} K_j p_0 |\hat{p}\rangle + p_0 J_i |\hat{p}\rangle$$

$$W_1 |\hat{p}\rangle = p_0 J_1 |\hat{p}\rangle$$

$$W_2 |\hat{p}\rangle = p_0 K_3 |\hat{p}\rangle + p_0 J_2 |\hat{p}\rangle = p_0 (J_2 + K_3) |\hat{p}\rangle$$

$$W_3 |\hat{p}\rangle = -p_0 K_2 |\hat{p}\rangle + p_0 J_3 |\hat{p}\rangle = p_0 (J_3 - K_2) |\hat{p}\rangle$$

~~$W_\mu P^\mu =$~~

Segue então que

$$P^\mu W_\mu |\hat{p}\rangle = (p^0 W_0 - p^1 W_1)|\hat{p}\rangle = 0 \rightarrow$$ P é proporcional a W

Corresponde a partículas de massa nula e spin j

No entanto existem dois estados de helicidade j e $-j$ (const. de proporcionalidade entre P e W)

Apêndice A

Suponha que temos uma representação unitária V onde os geradores T da álgebra são hermitianos.

Se temos um subespaço invariante W de V tal que

$$T|w\rangle \in W \qquad p/ \quad |w\rangle \in W$$

Considere agora o complemento ortogonal $W^\perp$ de W em V

$$\langle w^\perp | w\rangle = 0 \qquad |w^\perp\rangle \in W^\perp, \quad |w\rangle \in W$$

e

$$V = W + W^\perp$$

Segue que

$$T|w^\perp\rangle \in W^\perp$$

pois

$$\langle w | T | w^\perp\rangle = \left(\langle w^\perp | T | w\rangle\right)^\dagger = \langle w^\perp | w'\rangle^\dagger = 0$$

Logo $W^\perp$ também é subespaço invariante.

Ou seja se a representação é unitária a rep. redutível é completamente redutível