# Circuitos acoplados magneticamente

Indutância mútua

Considerações sobre energia

O transformador linear e ideal

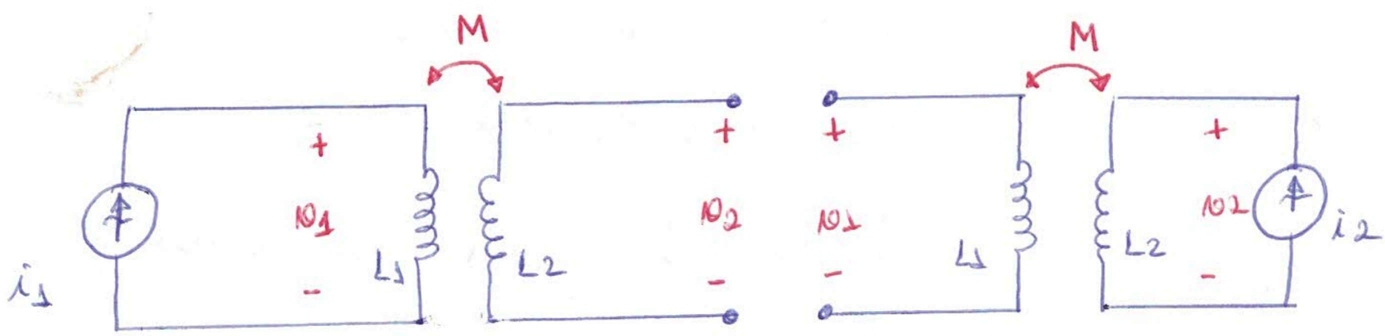
## Indutância mútua

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$ $L \rightarrow$ auto-indução

1) A produção de um fluxo magnético por uma corrente, sendo este fluxo proporcional à corrente em indutores lineares.

2) A produção de uma tensão pelo campo magnético variável com o tempo, sendo essa tensão proporcional à taxa de variação do campo ou fluxo magnético

## Coeficiente de indutância mútua




$$v_2(t) = M_{21}\frac{di_1(t)}{dt}$$

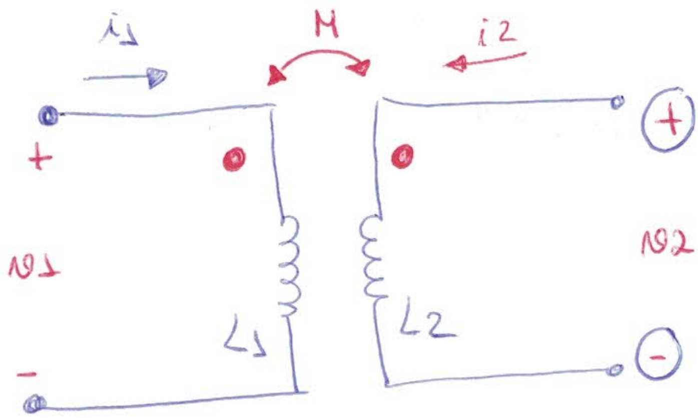
$$v_1(t) = M_{12}\frac{di_2(t)}{dt}$$

$M = M_{12} = M_{21}$ → relações de energia!

$M$ → indutância mútua ($H$ → Henry)

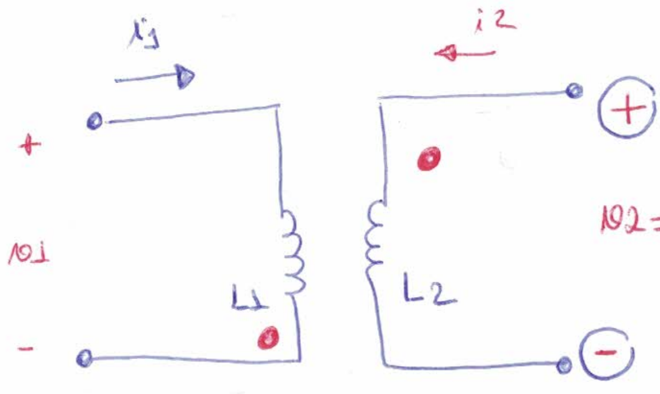
## A convenção do ponto

"Uma corrente entrando no terminal pontuado (a) [(c)] (não pontuado - (b)) [(d)] de uma bobina produz uma tensão de circuito aberto com referência positiva no terminal pontuado (a) [(c)] (não pontuado - (b)) [(d)] da segunda bobina"



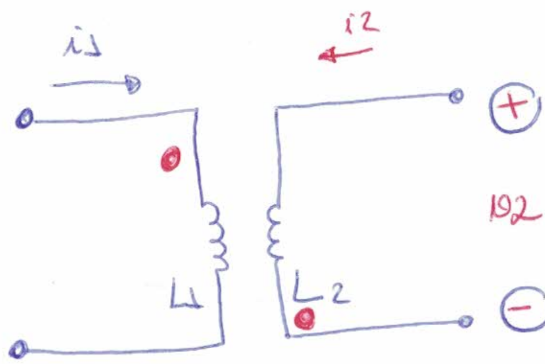

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

(a)



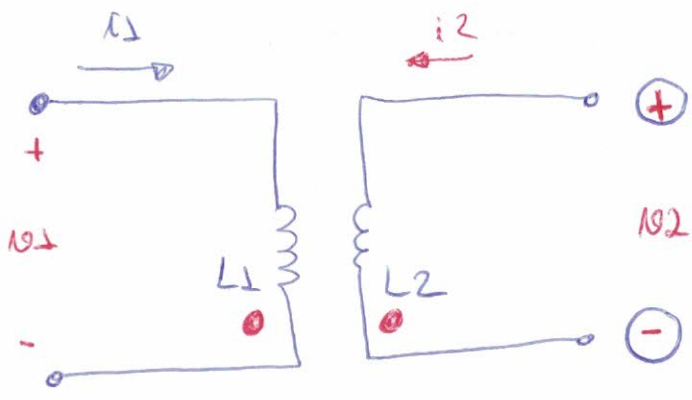

$$v_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$

(b)




$$v_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$

(c)




$$v_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

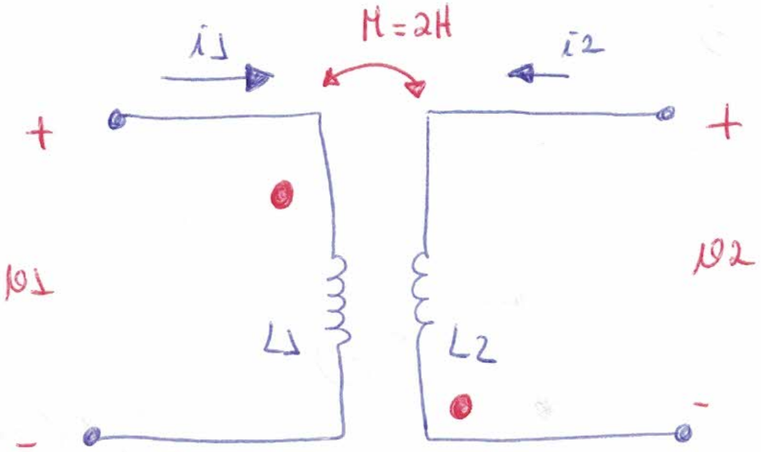
(d)

Exemplo:

No circuito mostrado determine:

(a) $v_1$ se $i_2 = 5 \operatorname{sen} 45t$ (A) e $i_1 = 0$

(b) $v_2$ se $i_1 = -8e^{-t}$ e $i_2 = 0$




(a) $v_1 = M \dfrac{di_2}{dt}$ $\therefore$ $v_1 = -M \dfrac{di_2}{dt}$

$v_1 = -2(45)(5 \cos 45t)$

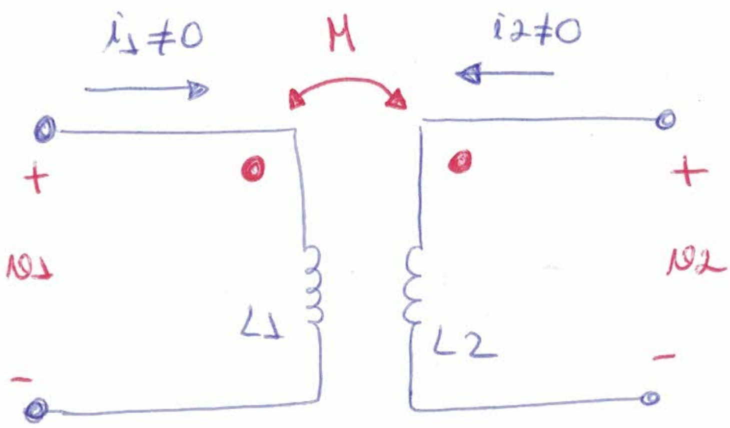
$$\boxed{v_1 = -450 \cos 45 \text{ (V)}}$$

(b) $v_2 = M \dfrac{di_1}{dt}$ $\quad$ $v_2 = -M \dfrac{di_1}{dt}$

$v_2 = -(2)(-1)(-8e^{-t})$

$$\boxed{v_2 = -16e^{-t} \text{ (V)}}$$

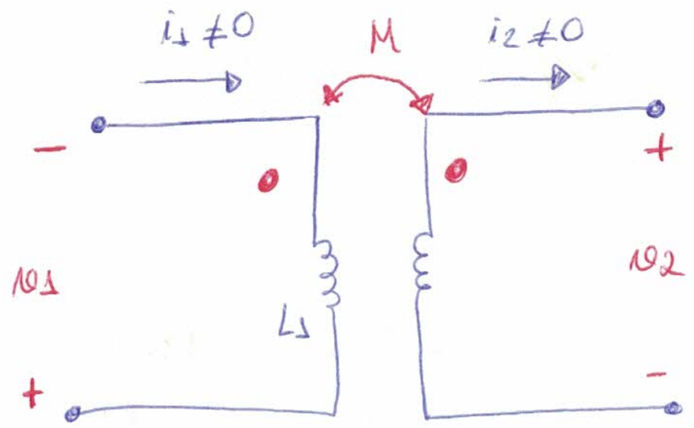
## Tensão induzida considerando a combinação de efeitos mútuos e próprios




* O sinal da tensão de auto-indução é conhecido a partir da convenção de sinal/elemento passivo!!!

$$v_1(t) = \underbrace{+ L_1 \frac{di_1(t)}{dt}}_{\text{auto-indução ou própria}} + \underbrace{M \frac{di_2(t)}{dt}}_{\text{mútua}}$$

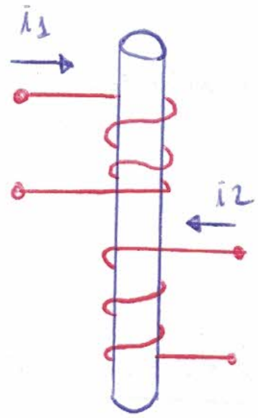
$$v_2(t) = \underbrace{+ L_2 \frac{di_2(t)}{dt}}_{\text{auto-indução ou própria}} + \underbrace{M \frac{di_1(t)}{dt}}_{\text{mútua}}$$




$$v_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

## Base da convenção do ponto

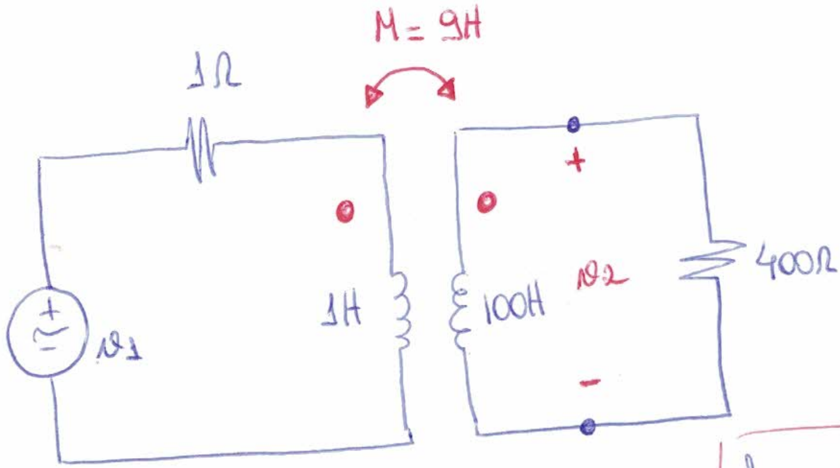
* Regra da mão direita!!!




A partir da consideração da direção do fluxo magnético produzido por cada bobina, mostra-se que os pontos podem ser colocados ou no terminal superior de cada bobina ou no terminal inferior

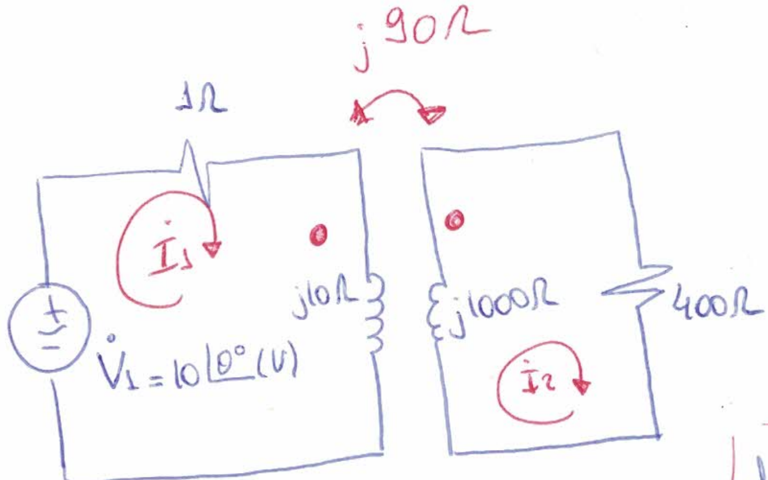
$i_1$ e $i_2$ são positivas crescentes → FLUXOS ADITIVOS!!!

Exemplo: No circuito dado, descubra a relação entre a tensão de saída no resistor de 400Ω e a tensão da fonte, expressa em notação fasorial.




dom. do tempo

$v_1(t) = 10 \cos 10t$ (V)




dom. da frequência

$\omega = 10$ rad/s

$\boxed{\dfrac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = ?}$

$\boxed{\dot{V}_2 = 400 \cdot \dot{I}_2}$

$\dot{V}_1 = 10\angle 0°$ (V)

LKT à M1

$$(1+j10)\dot{I}_1 - j90\dot{I}_2 = 10\angle 0°$$

LKT à M2

$$(400+j1000)\dot{I}_2 - j90\dot{I}_1 = 0$$

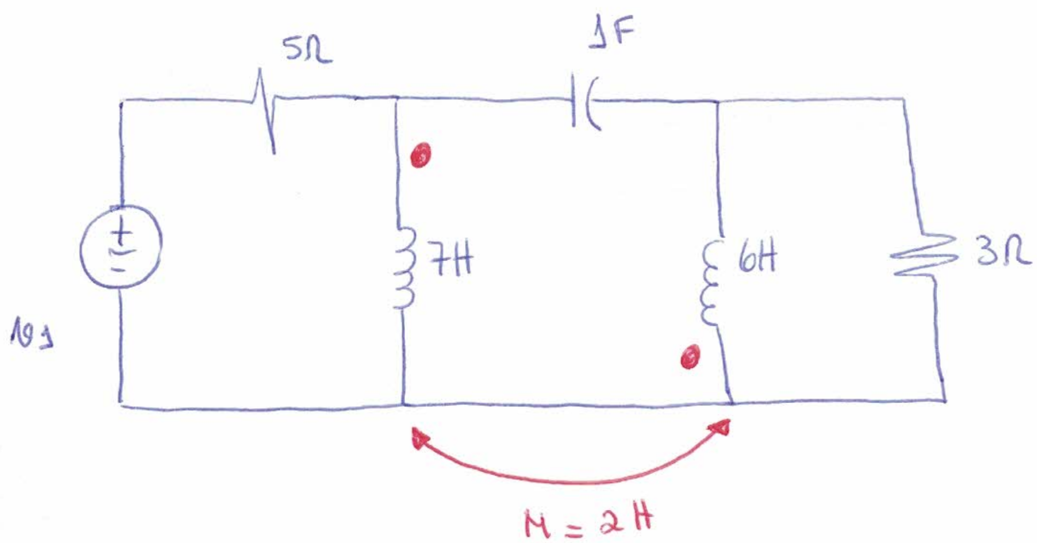
⋮

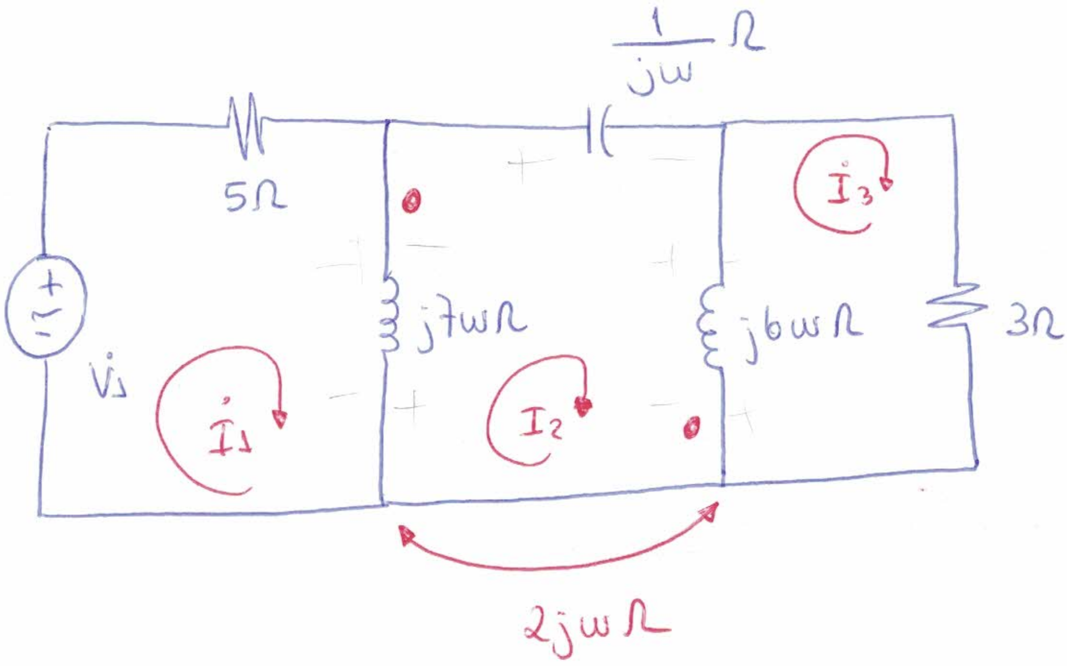
$$\dot{I}_2 = 0{,}172\angle -16{,}7° \ (A)$$

$$\dot{V}_2 = 400 \cdot (0{,}172\angle -16{,}7°)$$

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{400 \cdot (0{,}172\angle -16{,}7°)}{10\angle 0°} \qquad \boxed{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = 6{,}88\angle -16{,}7°}$$

Exemplo: Escreva um conjunto completo de equações fasoriais para o circuito apresentado.






$$5\dot{I}_1 + 7jw(\dot{I}_1-\dot{I}_2) + 2jw(\dot{I}_3-\dot{I}_2) = \dot{V}_1$$

$\dot{I}_3-\dot{I}_2 \longrightarrow$ corrente resultante entrando no terminal com ponto!!!

$\dot{I}_1 \longrightarrow$ corrente de malha entrando no terminal com ponto!!!

ou

$$\boxed{(5+7jw)\dot{I}_1 - 9jw\dot{I}_2 + 2jw\dot{I}_3 = \dot{V}_1} \qquad (1)$$

$$7jw(\dot{I}_2-\dot{I}_1) + \frac{1}{jw}\dot{I}_2 + 6jw(\dot{I}_2-\dot{I}_3) + 2jw(\dot{I}_2-\dot{I}_3)$$

$$+\,2jw(\dot{I}_2-\dot{I}_1) = 0$$

ou

$$\boxed{-9jw\dot{I}_1 + \left(17jw + \frac{1}{jw}\right)\dot{I}_2 - 8jw\dot{I}_3 = 0} \quad (2)$$

$$6jw(\dot{I}_3 - \dot{I}_2) + 2jw(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + 3\dot{I}_3 = 0$$

ou

$$\boxed{2jw\dot{I}_1 - 8jw\dot{I}_2 + (3 + 6jw)\dot{I}_3 = 0} \quad (3)$$

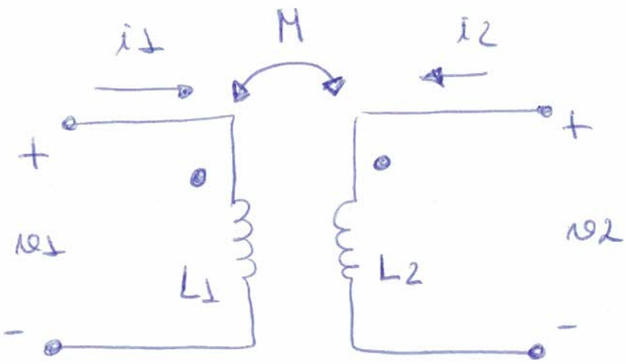
As três equações podem ser resolvidas por qualquer um dos métodos convencionais!

## Considerações sobre energia

1) $\boxed{M = M_{12} = M_{21}}$

1º) Justificarmos a nossa hipótese de que $M_{12} = M_{21} = M$

2º) Determinar o máximo valor possível para a indutância mútua entre dois condutores.




a) $v_1 = v_2 = 0$ e $i_1 = i_2 = 0 \therefore W_0 = 0 \to$ energia inicial NULA

b) $i_1 : 0 \longrightarrow I_1$ (valor constante) no tempo $t = t_1$

$$P_1 = v_1 \cdot i_1 = \underbrace{L_1 \frac{di_1}{dt}}_{v_1} \cdot i_1 \quad e \quad \boxed{P_2 = v_2 \cdot i_2 = 0}$$

$$W_1 = \int_0^{t_1} v_1 i_1 \, dt = \int_0^{I_1} L_1 \, di_1 \cdot i_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

$$\boxed{W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \quad (J)}$$

c) $i_1 = I_1 \to$ constante

$i_2 = 0$ p/ $t = t_1 \longrightarrow I_2$ p/ $t = t_2$

$$W_2 = \int_{t_1}^{t_2} v_2\, i_2\, dt = \int_0^{I_2} L_2\, i_2\, di_2 \qquad \boxed{w_2 = \frac{1}{2} L_2\, I_2^2 \ (J)}$$

* O que acontece com $v_1$ no intervalo entre $t_1$ e $t_2$?

$$W_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_1\, i_1\, dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{12} \frac{di_2}{dt}\, i_1\, dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2$$

$$\boxed{W_1 = M_{12} I_1 . I_2}$$

* Contudo, embora o valor de $i_1$ permaneça constante, o circuito da esquerda também fornece energia à rede durante esse intervalo de tempo.

$$W_{TOTAL} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

$$\boxed{t = 0 \text{ até } t = t_2}$$

* Poderíamos estabelecer as mesmas correntes finais nessa rede ao fazer que elas atingissem esses valores na ordem inversa.

A energia total nessa ordem inversa seria:

$$W_{TOTAL} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

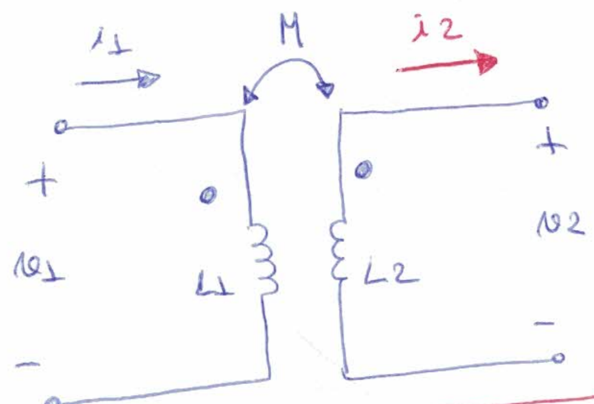
* As condições iniciais e finais da rede são as mesmas, portanto os dois valores de energia armazenada devem ser idênticos. Logo:

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

e

$$\boxed{W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 . I_2}$$

CUIDADO:




$$\boxed{W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2}$$

## CONCLUSÃO

* $i_1$ e $i_2$ entrando no ponto
  $i_1$ e $i_2$ saindo do ponto } $+ M I_1 I_2$

* $i_1$ entrando e $i_2$ saindo
  $i_1$ saindo e $i_2$ entrando } $- M I_1 I_2$

resultante da convenção do ponto

$$\boxed{W(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2 \pm M i_1(t) \cdot i_2(t)}$$

## Estabelecendo um limite superior para M

$W(t)$ → representa a energia armazenada em uma rede passiva. Seu valor nunca pode ser negativo para quaisquer valores de $i_1$, $i_2$, $L_1$, $L_2$ ou M!

O único caso em que a energia poderia ser negativa é:

$$W = \frac{1}{2} L_1 (i_1)^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2 - M i_1(t) i_2(t)$$

* método de completar quadrados utilizado para resolver equações do 2º grau! $(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$

Que podemos escrever completando os quadrados:

$$W = \frac{1}{2}\underbrace{\underbrace{\left(\sqrt{L_1}\, i_1 - \sqrt{L_2}\, i_2\right)^2}_{\text{pode se anular! e nunca será negativo!}} + \sqrt{L_1 L_2}\, i_1 i_2 - M i_1 i_2}_{\text{não pode ser negativo!}} \geq 0$$

$$\sqrt{L_1 L_2}\, i_1 i_2 - M i_1 i_2 \geq 0$$

$$\sqrt{L_1 L_2}\, i_1 . i_2 \geq M i_1 . i_2$$

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M \quad \text{ou} \quad \boxed{M \leq \sqrt{L_1 L_2}}$$

O coeficiente de acoplamento

É o grau com o qual M se aproxima de seu valor máximo!

$$\boxed{k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}}$$

Como $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

$$\boxed{0 \leq k \leq 1}$$

* O valor de k ( e, portanto de M) depende das dimensões e do número de espiras de cada bobina, de suas posições relativas e das propriedades magnéticas do núcleo sobre o qual estão enroladas.

* fracamente acopladas: $k < 0{,}5$ (transformadores com núcleo de ar)

* fortemente acopladas: $k > 0{,}5$ (transformadores com núcleo de ferro).

Exemplo: Calcule a função de rede: $H(j\omega) = \dfrac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$

$$H(j\omega) = \text{função de rede} = \frac{\text{resposta}}{\text{excitação}}$$

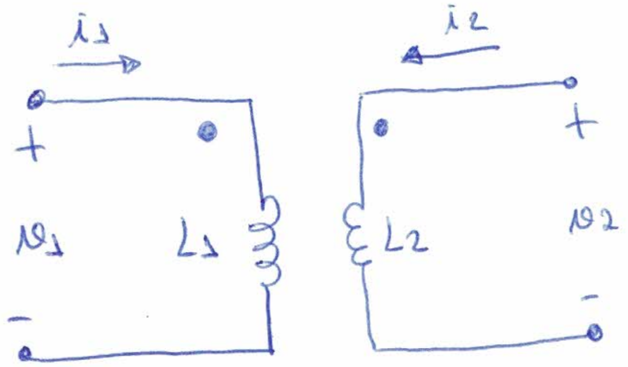
Exemplo: No circuito apresentado, sejam $L_1 = 0,4(H)$, $L_2 = 2,5(H)$, $k = 0,6$ e $i_1 = 4 i_2 = 20 \cos(500t - 20°)$ mA.

Avalie as seguintes grandezas em $t = 0$.

a) $i_2$;

b) $v_1$; e

c) a energia total armazenada no sistema.




a) $i_2(t) = 5 \cos(500t - 20°)$ mA

$i_2(0) = 5 \cos(-20°) = 4,698$ mA

b) $v_1(t) = ?$ $\quad v_1(t) = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt}$

$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,6\sqrt{0,4 . 2,5}$ $\quad \boxed{M = 0,6(H)}$

$v_1(t) = 0,4\left[-10 \text{ sen}(-20°)\right] + 0,6\left[-2,5 \text{ sen}(-20°)\right]$

$\boxed{v_1(t) = 1,881 \text{ (V)}}$ p/ $t = 0$

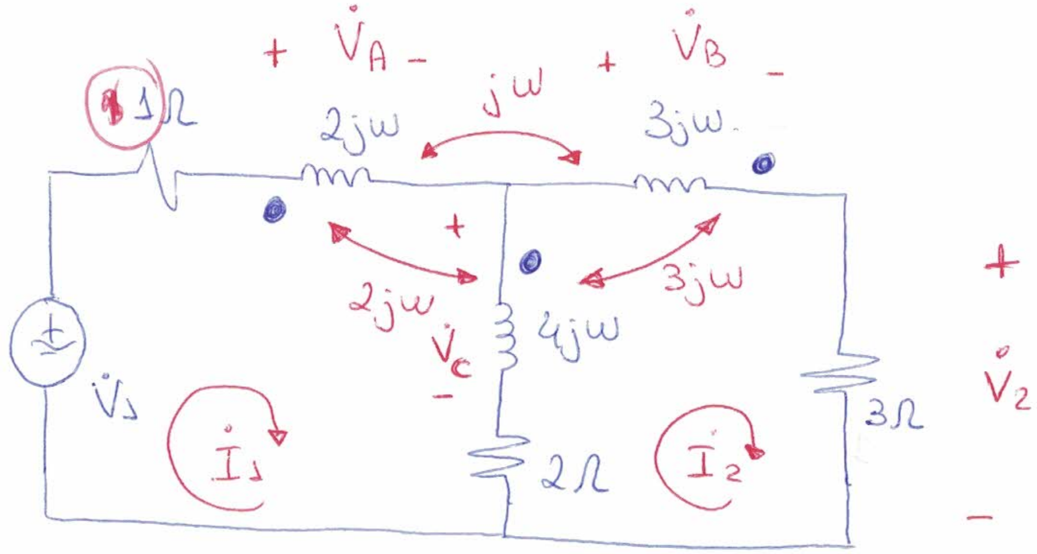
c) $w(t) = \frac{1}{2} L_1 \left[i_1(t)\right]^2 + \frac{1}{2} L_2 \left[i_2(t)\right]^2 \pm M \left[i_1(t)\right]\left[i_2(t)\right]$

p/ $t = 0$

$i_1(0) = 4\, i_2(0) = 18{,}79\ mA$

$i_2(0) = 4{,}698\ mA$

$$\boxed{w(0) = 151{,}2\ \mu J}$$




* LKT à M1

$$3\dot{I}_1 + \dot{V}_A + \dot{V}_C - 2\dot{I}_2 = \dot{V}_1 \qquad (1)$$

* LKT à M2

$$-2\dot{I}_1 - \dot{V}_C + \dot{V}_B + 5\dot{I}_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\dot{V}_A = 2j\omega\dot{I}_1 + 2j\omega(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) - j\omega\dot{I}_2$$

$$\boxed{\dot{V}_A = 4j\omega\dot{I}_1 - 3j\omega\dot{I}_2} \qquad (3)$$

$$\dot{V}_B = 3j\omega\dot{I}_2 + 3j\omega(\dot{I}_2 - \dot{I}_1) - j\omega\dot{I}_1$$

$$\boxed{\dot{V}_B = -4j\omega\dot{I}_1 + 6j\omega\dot{I}_2} \qquad (4)$$

$$\dot{V}_C = 4j\omega(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + 2j\omega\dot{I}_1 - 3j\omega\dot{I}_2$$

$$\boxed{\dot{V}_C = 6j\omega\dot{I}_1 - 7j\omega\dot{I}_2} \qquad (5)$$

Voltando à eq. 1 e 2:

$$(10j\omega+3)\dot{I}_1-(10j\omega+2)\dot{I}_2=\dot{V}_1$$

$$-(10j\omega+2)\dot{I}_1+(13j\omega+5)\dot{I}_2=0$$

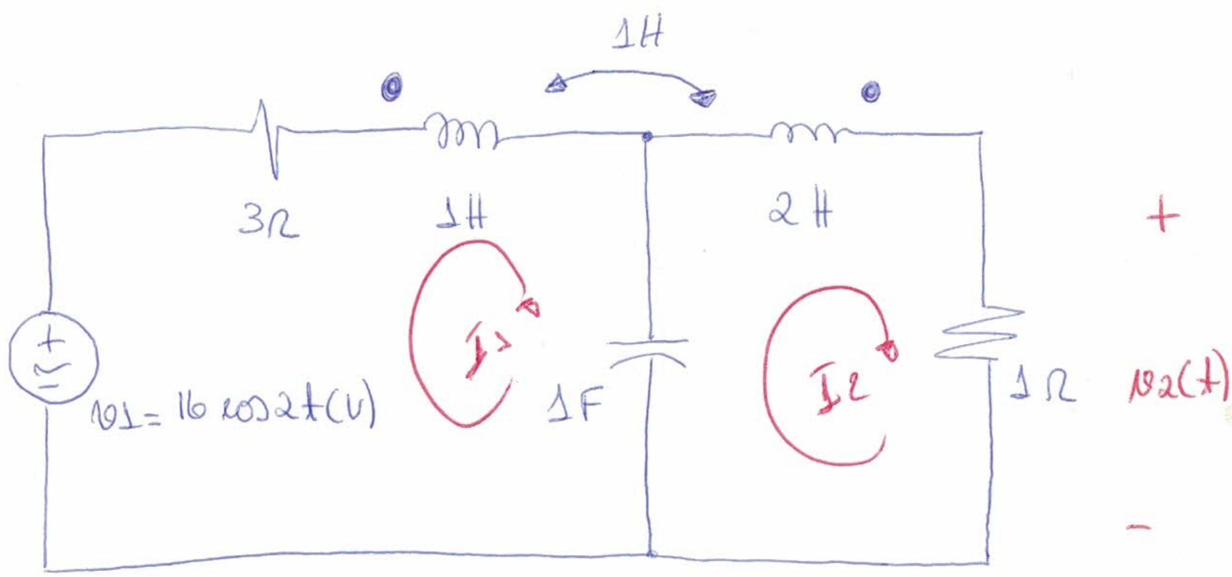
$\vdots$

$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}=\frac{3.\dot{I}_2}{\dot{V}_1}=\frac{3(10j\omega+2)}{30(j\omega)^2+49j\omega+11}$$

$$\boxed{H(j\omega)=\frac{3(10j\omega+2)}{30(j\omega)^2+49j\omega+11}}$$

Exemplo: Calcule a resposta em regime permanente.

$v_2(t)=?$



$$-\dot{V}_1 + 3\dot{I}_1 + j\omega\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega}(\dot{I}_1-\dot{I}_2) - j\omega\dot{I}_2 = 0$$

$$\boxed{\left(3 + j\omega + \frac{1}{j\omega}\right)\dot{I}_1 - \left(j\omega + \frac{1}{j\omega}\right)\dot{I}_2 = \dot{V}_1} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{j\omega}(\dot{I}_2-\dot{I}_1) + (1+2j\omega)\dot{I}_2 - j\omega\dot{I}_1 = 0$$

$$\boxed{-\left(j\omega + \frac{1}{j\omega}\right)\dot{I}_1 + \left(2j\omega + 1 + \frac{1}{j\omega}\right)\dot{I}_2 = 0} \qquad (2)$$

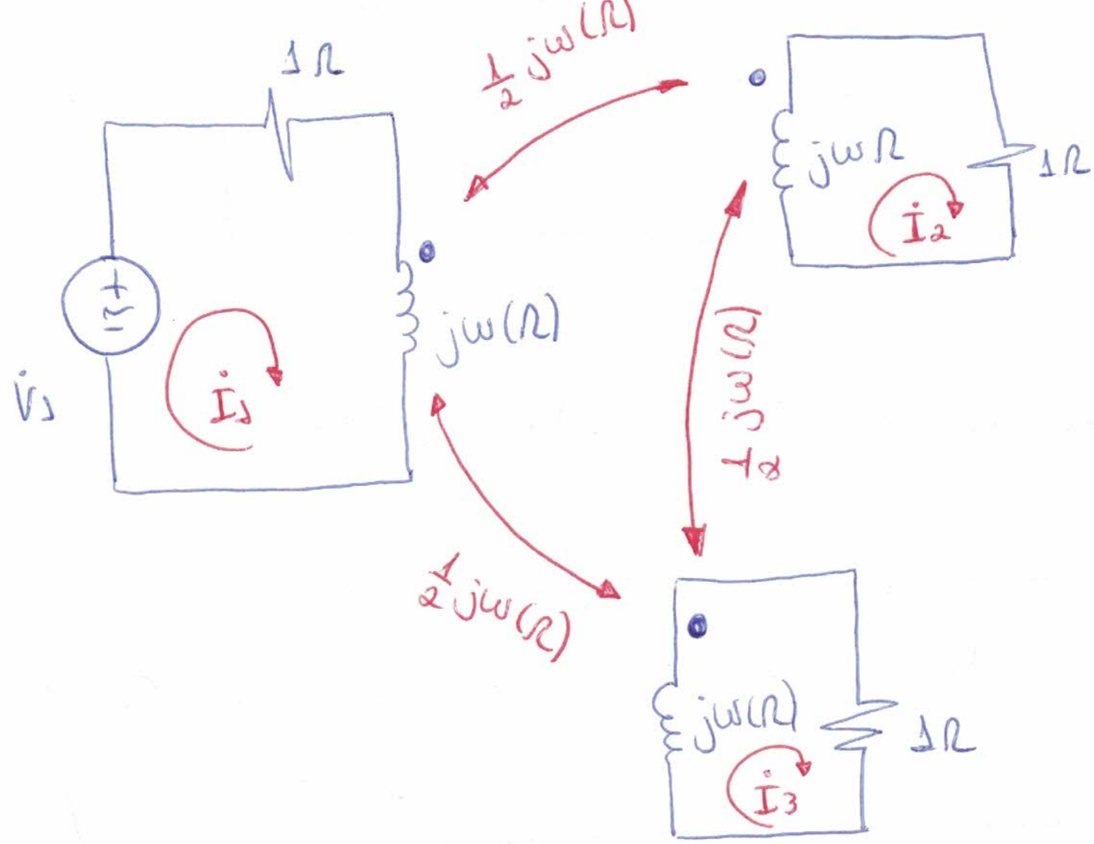
$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1} = \frac{(j\omega)^2+1}{(j\omega)^3+7(j\omega)^2+4j\omega+4}$$

$\omega = 2\,rad/s$ e $\dot{V}_1 = 16\angle 0^\circ$ (V)

$\dot{V}_2 = \dot{I}_2 = H(j\omega)\cdot\dot{V}_1$

$\dot{V}_2 = 2\angle 0^\circ$ (V) $\therefore$ $\boxed{v_2(t) = 2\cos 2t \text{ (V)}}$

Exemplo: Calcule a relação $H(j\omega) = \dfrac{\dot{V}_2(j\omega)}{\dot{V}_1(j\omega)}$




$$(1+j\omega)\dot{I}_1 - \frac{1}{2}j\omega\dot{I}_2 - \frac{1}{2}j\omega\dot{I}_3 = \dot{V}_1 \quad (1)$$

$$(1+j\omega)\dot{I}_2 - \frac{1}{2}j\omega\dot{I}_1 + \frac{1}{2}j\omega\dot{I}_3 = 0 \quad (2)$$

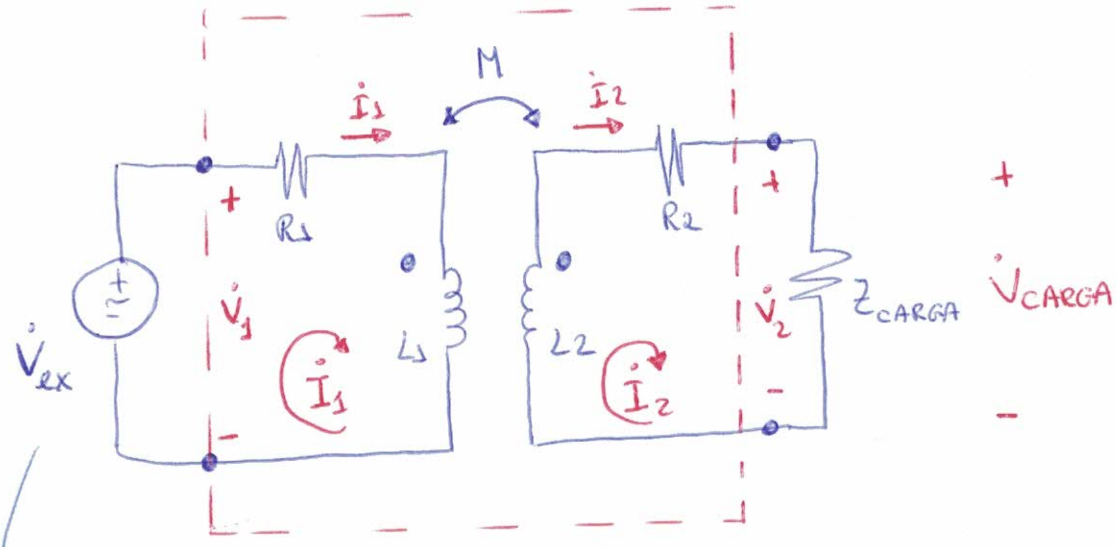
$$(1+j\omega)\dot{I}_3 - \frac{1}{2}j\omega\dot{I}_1 + \frac{1}{2}j\omega\dot{I}_2 = 0 \quad (3)$$

⋮

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\dot{I}_3}{\dot{V}_1} = \frac{j\omega}{3j\omega + 2}}$$

# O transformador linear

* excelente modelo p/ o transformador real (circuitos elétricos)



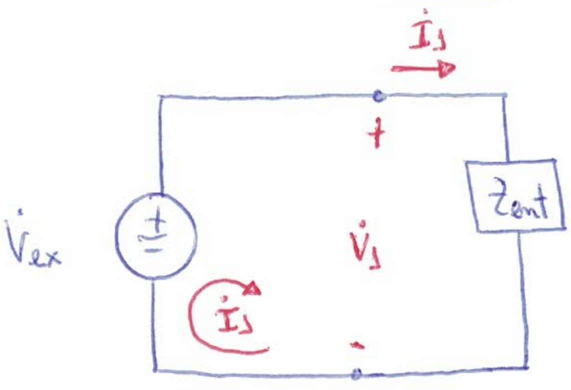

Transformador linear

$L_1 \rightarrow$ indutância do primário ($p^{\text{ário}}$)

$L_2 \rightarrow$ indutância do secundário ($s^{\text{ário}}$)

$R_1$ e $R_2 \rightarrow$ resistência do fio com o qual as bobinas do $p^{\text{ário}}$ e $s^{\text{ário}}$ são enrolados, e quaisquer outras perdas.

## Impedância de Entrada




$$\boxed{Z_{ent} = \frac{\dot{V}_{ex}}{\dot{I}_1} = ?}$$

* LKT à $M_1$

$$\boxed{\dot{V}_{ex} = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2}$$

* LKT à $M_2$

$$\boxed{-j\omega M \dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_{CARGA})\dot{I}_2}$$

$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$ e $Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_{CARGA}$

$$\dot{V}_{ex} = Z_{11}.\dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \quad (1)$$

$$0 = -j\omega M \dot{I}_1 + Z_{22}.\dot{I}_2 \quad (2)$$

* Resolvendo a 2ª eq. para $\dot{I}_2$ e substituindo o resultado na 1ª eq., temos:

$$Z_{ent} = \frac{\dot{V}_{ex}}{\dot{I}_1} = Z_{11} - \frac{(j\omega)^2 M^2}{Z_{22}}$$

$$\boxed{Z_{ent} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}}$$

## Impedância refletida:

Como:

$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$ → depende somente da resistência e indutância do p$^{ário}$!

$$\boxed{Z_{REF} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}}$$

→ É a impedância refletida do s$^{ário}$, incluindo a carga, para o p$^{ário}$ do transformador.

Obs1: $Z_{REF}$ independe da localização dos pontos nos enrolamentos.

Obs2: $Z_{ent}$ é simplesmente $Z_{11}$ se o acoplamento for reduzido a zero $(M=0)$.

Obs3: Da eq. (2) temos: $Z_{22} \dot{I}_2 = j\omega M \dot{I}_1$

$$\boxed{\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega M}{Z_{22}}} \qquad (3)$$

↑ Relação de corrente do 2$^{ário}$ para o 1$^{ário}$

Obs 4.

$$Z_{ent} = \frac{\dot{V}_{ex}}{\dot{I}_1} = Z_1 = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \qquad \boxed{Z_1 = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}} \qquad (4)$$

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_{CARGA} \cdot \dot{I}_2}{\dot{V}_1} = Z_{CARGA}\left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \cdot \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right)$$

$$\boxed{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = Z_{CARGA} \cdot \frac{j\omega M}{Z_{22}} \cdot \frac{1}{Z_1}} \qquad (5)$$

Obs 5: Substituindo $M$ por $-M$ nas eqs (3) e (5) as eqções mudam. A equação da imp. refletida $Z_{REF}$ não muda!

Obs 6: Das eqções (3) e (5) vemos que se o ponto de polaridade de um dos enrolamentos ocorre no terminal oposto, então as relações de corrente $(\dot{I}_2/\dot{I}_1)$ e tensão $(\dot{V}_2/\dot{V}_1)$ necessitam de uma mudança de sinal.

* Ir para a página 58: Redes equivalentes "Π" e "T"

# O transformador ideal

* Transformador fortemente acoplado no qual o coeficiente de acoplamento é essencialmente unitário e onde as reatâncias indutivas do 1ário e do 2ário são extremamente grandes em comparação com as impedâncias terminais.

Exemplo: transformadores com núcleo de ferro bem projetados.

* A relação do nº de espiras de um transf. ideal

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = n^2 \qquad (6)$$

$$L_2 = n^2 L_1$$

ou

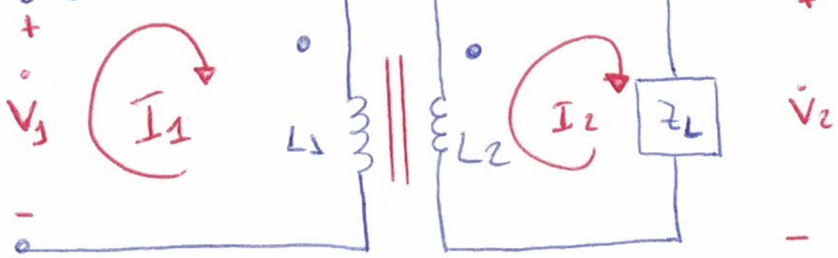
$$\boxed{n = \frac{N_2}{N_1}}$$

* A indutância própria de uma bobina é proporcional ao quadrado do nº de voltas de fio que formam a bobina. Essa relação é válida apenas se todo o fluxo estabeleci-

do pelo corrente fluindo na bobina enlaçar todas as espiras (conceitos de campo magnético).

* Se uma corrente i fluir através de uma bobina formada por N espiras, então o fluxo magnético de uma bobina formada por apenas uma espira será produzido N vezes. Se pensarmos nas N espiras como sendo coincidentes, então todas elas serão certamente enlaçadas pelo fluxo total. Como a corrente e o fluxo variam com o tempo, uma tensão N vezes maior do que aquela que seria causada por uma bobina de apenas uma espira é então induzida em cada uma das espiras. Logo, a tensão induzida em uma bobina com N espiras deve ser $N^2$ vezes maior do que a tensão induzida em uma bobina com apenas uma espira.

Exemplo: transformador ideal com carga no 2ário



* linhas verticais → núcleo de ferro

* $1:n$ → relação entre o nº de espiras dada por $N_1$ e $N_2$

$n = \frac{N_2}{N_1}$

$$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \qquad (7)$$

$$0 = -j\omega M \dot{I}_1 + (Z_L + j\omega L_2)\dot{I}_2 \qquad (8)$$

* Resolvendo a eq. (8) para $\dot{I}_2$ e substituindo na eq. (7):

$$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2}\dot{I}_1$$

$$Z_{ent} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2}$$

* Como $k = 1$, $M^2 = L_1 L_2$, então: $M = \sqrt{L_1 . L_2}$

$$\boxed{Z_{ent} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{Z_L + j\omega L_2}} \qquad (9)$$

* No caso ideal, tanto $L_1$ quanto $L_2$ devem tender ao infinito. Sua relação, contudo, deve permanecer finita, o que é especificado pela relação entre o nº de espiras.

$$L_2 = n^2 L_1$$

$$Z_{ent} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 n^2 L_1^2}{Z_C + j\omega n^2 L_1}$$

$L_1 \to \infty$
resultado é indeterminado!

* Combinando os dois termos:

$$Z_{ent} = \frac{j\omega L_1 Z_C - \omega^2 n^2 L_1^2 + \omega^2 n^2 L_1^2}{Z_C + j\omega n^2 L_1}$$

$$Z_{ent} = \frac{j\omega L_1 Z_C}{Z_C + j\omega n^2 L_1} \qquad \boxed{\div j\omega L_1} \qquad Z_{ent} = \frac{Z_C}{\frac{Z_C}{j\omega L_1} + n^2}$$

Como $L_1 \to \infty$ $\therefore$ $\boxed{Z_{ent} = \frac{Z_C}{n^2}}$ para um $Z_L$ finito (10)

* Relação simples entre as correntes do 1ário e 2ário.

Da eq. (8): $\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega M}{Z_C + j\omega L_2}$ é muito grande

Fazemos $L_2 \to \infty$ $\quad \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$

$M = \sqrt{L_1 L_2} \qquad \frac{L_2}{L_1} = n^2$

$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \lim_{L_1, L_2 \to \infty} \frac{j\omega\sqrt{L_1 L_2}}{Z_C + j\omega L_2} \;\; \div L_2 \;\; = \lim_{L_1, L_2 \to \infty} \frac{j\omega\sqrt{L_1/L_2}}{j\omega + Z_C/L_2} = \lim_{L_1, L_2 \to \infty} \frac{j\omega \, 1/n}{j\omega + Z_C/L_2}$

$$\boxed{\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{n}} \qquad (11)$$

* Deve ser notado que a relação entre as correntes é o negativo da relação entre o nº de espiras, se alguma corrente for invertida ou se a localização de algum dos pontos for trocada.

* Relação entre as tensões do 1ário e 2ário:

$$\dot{V}_2 = Z_L \cdot \dot{I}_2 \qquad \boxed{Z_{ent} = \frac{Z_L}{n^2}} \qquad (10)$$

$$\dot{V}_1 = Z_{ent} \cdot \dot{I}_1 = \frac{Z_L}{n^2} \cdot \dot{I}_1$$

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_L \cdot \dot{I}_2}{\frac{Z_L}{n^2} \cdot \dot{I}_1} \qquad \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = n^2 \cdot \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{n}} \quad (11)$$

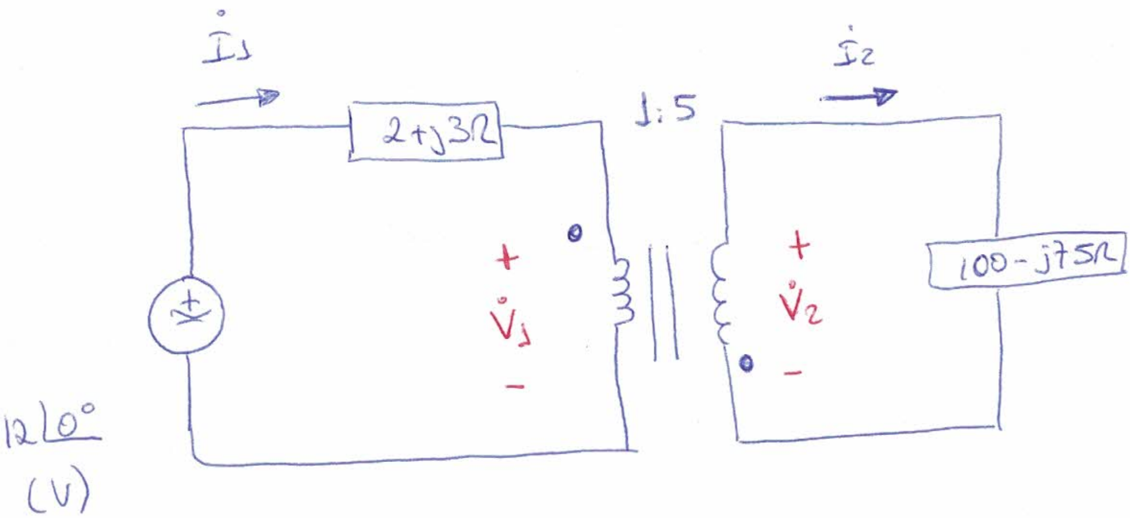
$$\boxed{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = n = \frac{N_2}{N_1}} \qquad (12)$$

$$Z_1 = \frac{\dot V_1}{\dot I_1} = \frac{\dot V_2 / n}{n \cdot \dot I_2} = \frac{\overbrace{\dot V_2 / \dot I_2}^{Z_2}}{n^2}$$

$$Z_1 = \frac{Z_2}{n^2} \qquad \boxed{\frac{Z_2}{Z_1} = n^2}$$

Exercício 1: Johnson 16.5.1

Calcule $\dot V_1$, $\dot V_2$, $\dot I_1$ e $\dot I_2$

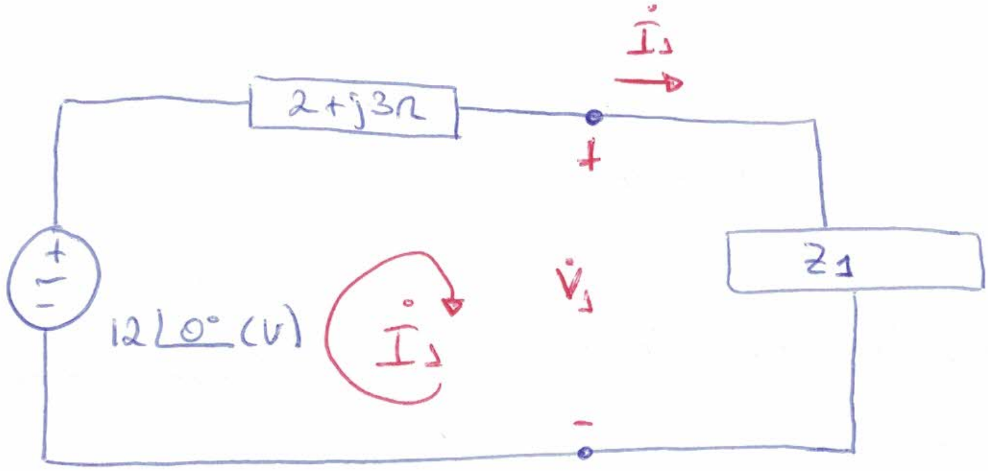



<u>SOLUÇÃO 1</u>: Vamos substituir o circuito 2ário e o transformador → referenciar o 2ário ao 1ário

$$\frac{\dot V_2}{\dot V_1} = n \;\rightarrow\; \dot V_1 = \cancel{\frac{\dot V_2}{n}} \; -\frac{\dot V_2}{n} \qquad \frac{Z_2}{Z_1} = n^2 \;\rightarrow\; Z_1 = \frac{Z_2}{n^2}$$

$$\frac{\dot I_2}{\dot I_1} = \frac{1}{n} \;\rightarrow\; \dot I_1 = \cancel{n \dot I_2}$$

$$-n \dot I_2$$




$$Z_1 = \frac{Z_2}{m^2} = \frac{100-j75}{5^2} \qquad \boxed{Z_1 = 4-j3\,\Omega}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{12\angle 0°}{2+j3+4-j3} \qquad \dot{I}_1 = \frac{12\angle 0°}{6} \qquad \boxed{\dot{I}_1 = 2\angle 0°\,(A)}$$

$$\dot{I}_1 = -m.\dot{I}_2 \;;\; \dot{I}_2 = -\frac{\dot{I}_1}{m} = -\frac{2\angle 0°}{5} \qquad \dot{I}_2 = -0{,}4\angle 0°\,(A)$$

$$\boxed{\dot{I}_2 = 0{,}4\angle +180°\,(A)}$$

$$\dot{V}_1 = (4-j3)\dot{I}_1 = (4-j3)2\angle 0° \qquad \dot{V}_1 = 8-j6 \qquad \boxed{\dot{V}_1 = 10\angle -36{,}9°\,(V)}$$

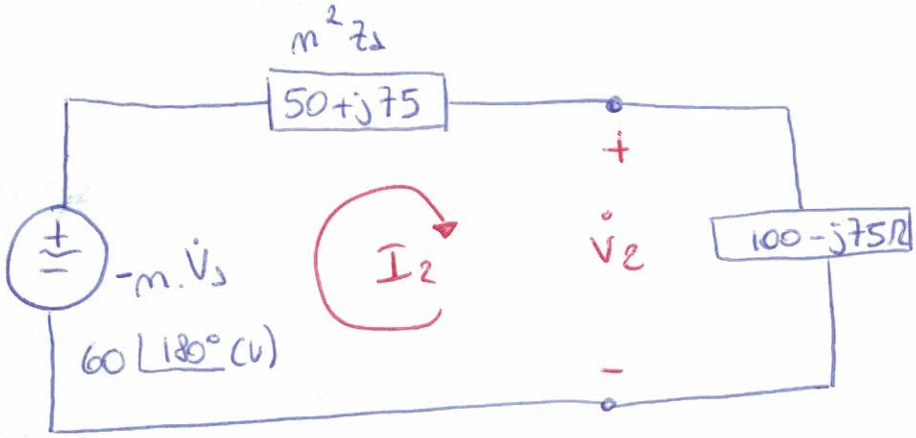
$$\dot{V}_2 = -m.\dot{V}_1 = -5.\,10\angle -36{,}9° \qquad V_2 = -50\angle -36{,}9°$$

$$\boxed{\dot{V}_2 = 50\angle 143{,}1°\,(V)}$$

<u>Solução 2:</u> Vamos substituir o 1ário e o transformador

→ referenciar o 1ário ao 2ário

$\dot{V}_2 = -m\dot{V}_1$ $\quad \dot{I}_2 = -\dfrac{\dot{I}_1}{m}$ $\quad Z_2 = m^2 Z_1$




$$\dot{I}_2 = \frac{60\angle 180^\circ}{50+j75+100-j75} \qquad \dot{I}_2 = \frac{60}{150}\angle 180^\circ \qquad \boxed{\dot{I}_2 = 0{,}4\angle 180^\circ\ (A)}$$

$$\dot{V}_2 = (100-j75)\dot{I}_2 = (100-j75)(0{,}4\angle 180^\circ)$$

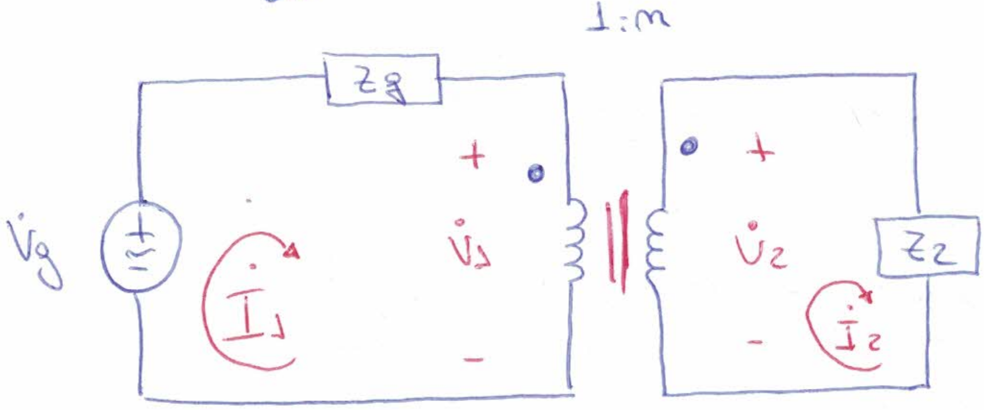
$$\boxed{\dot{V}_2 = 50\angle 143{,}1^\circ\ (V)}$$

$$\dot{V}_1 = -\frac{\dot{V}_2}{m} \qquad \boxed{\dot{V}_1 = 10\angle 36{,}9^\circ\ (V)} \qquad \dot{I}_1 = -m\dot{I}_2$$

$$\boxed{\dot{I}_1 = 2\angle 0^\circ\ (A)}$$

(V rms)

Exercício 2: Na figura abaixo, $\dot{V}_g = 100\angle 0°$, $Z_g = 20\Omega$ e $Z_2 = 2k\Omega$. Calcule n de forma que $Z_1 = Z_g$ e, então, calcule a potência entregue a $Z_2$.

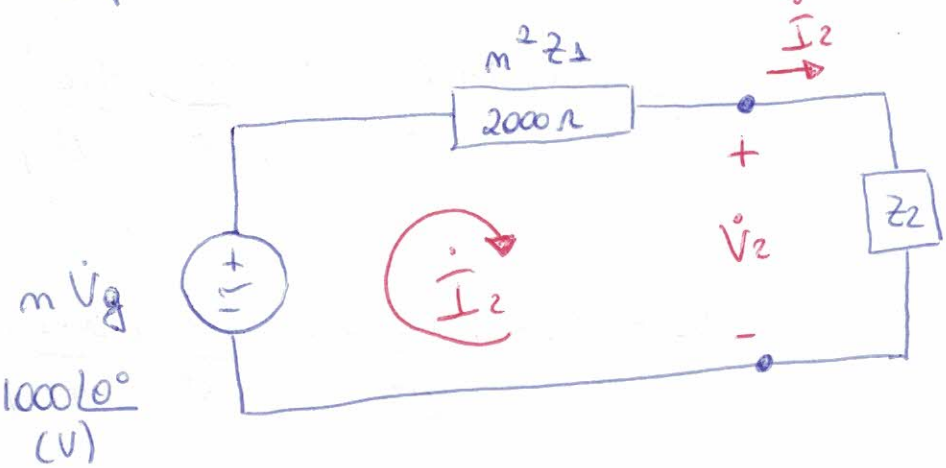



$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = n \qquad \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{n} \qquad \frac{Z_2}{Z_1} = n^2$$

$$Z_1 = Z_g = 20\Omega \qquad Z_2 = 2000\Omega \qquad \frac{Z_2}{Z_1} = n^2 \qquad n = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}$$

$$n = \sqrt{\frac{2000}{20}} \qquad \boxed{n = 10}$$

* Referencio o 1ário e o transformador p/ o 2ário.




$\dot{V}_2 = n\dot{V}_1$

$\dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_1}{n}$

$Z_2 = n^2 Z_1$

$$P_{Z2} = Z_2 \cdot I_2^2 = \dot{V}_2 \cdot \dot{I}_2$$

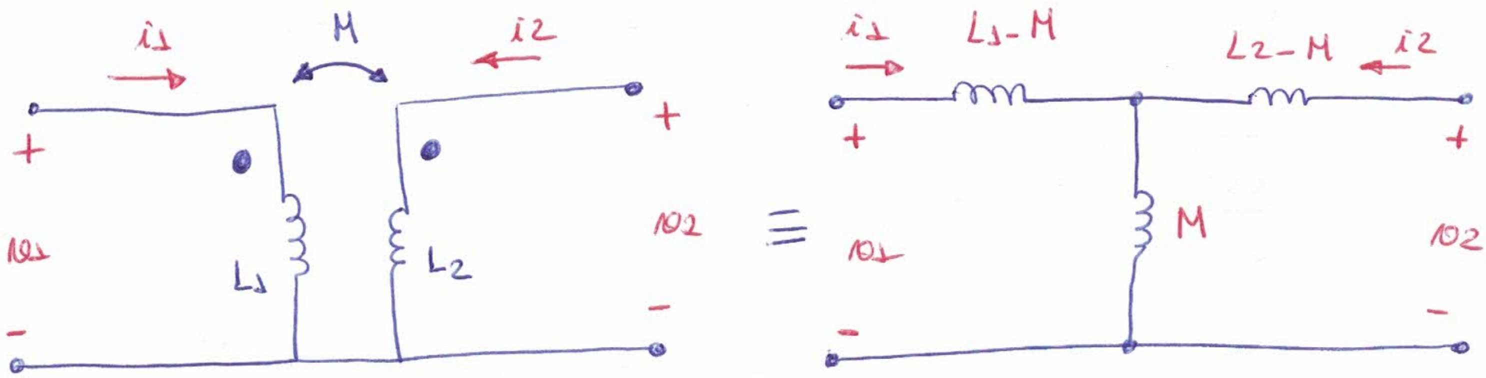
$$\dot{I}_2 = \frac{1000\angle 0^\circ}{2000 + 2000} = \frac{1000\angle 0^\circ}{4000} \qquad \boxed{\dot{I}_2 = 0{,}25\angle 0^\circ \,(A)\, rms}$$

$$P_{Z2} = 2000 \cdot (0{,}25)^2 \qquad \boxed{P_{Z2} = 125\,(W)}$$

Transformador linear → depois da pág. 48

## Redes equivalentes "T" e "π"

* Rede "T"




$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \equiv \quad v_1 = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right)$$

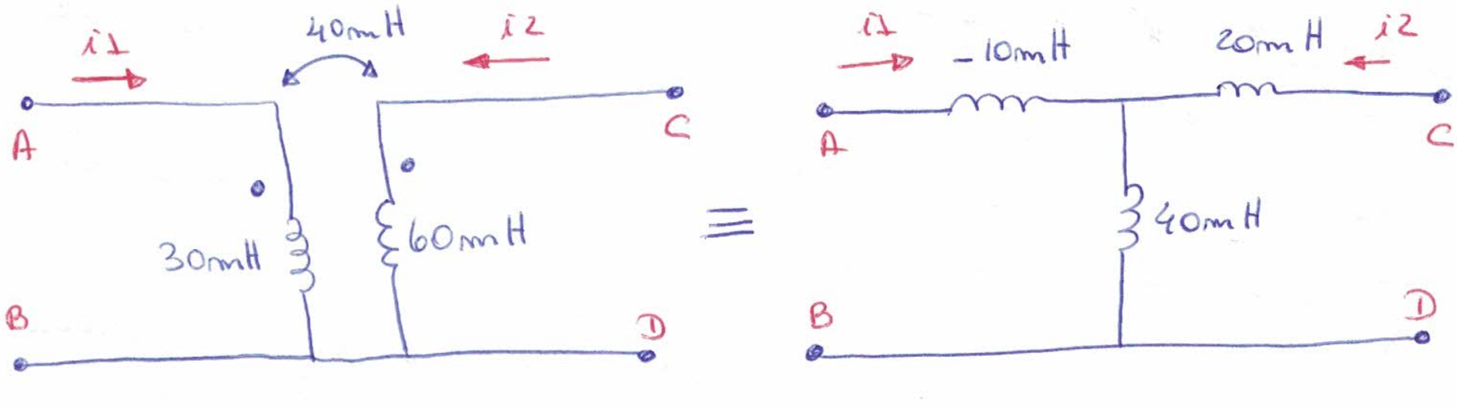
$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \qquad v_2 = (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} + M\left(\frac{di_2}{dt} + \frac{di_1}{dt}\right)$$

* Se qualquer dos pontos nos enrolamentos do transformador for colocado na terminação oposta de sua bobina, os termos mútuos terão sinal negativo. Isso é análogo à troca de M por −M e tal troca na rede "T" equivalente leva à análise correta. Os três valores de indutância própria seriam então:

$L_1+M$, $-M$ e $L_2+M$.

* Todos as indutâncias presentes no equivalente "T" são indutâncias próprias, nenhuma indutância mútua está presente.

Exemplo: Obtenha o equivalente "T" do transformador mostrado.

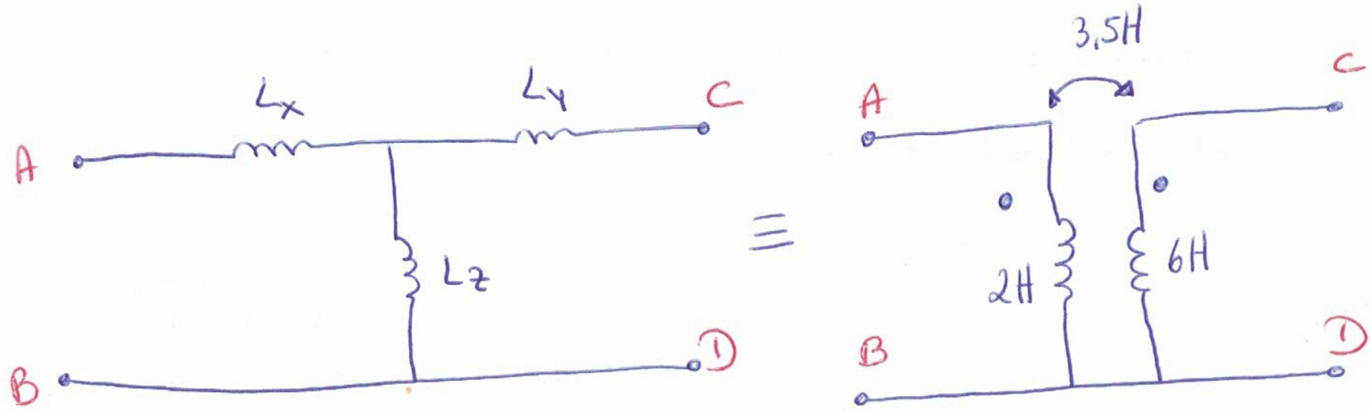



Transf. linear

"T" equivalente

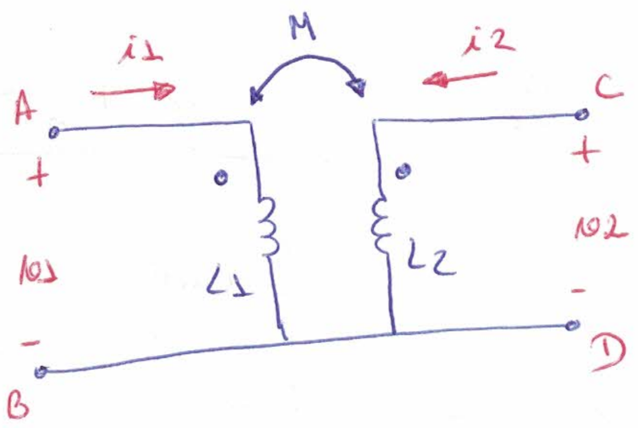
Exercício: (a) Se as duas redes mostradas são equivalentes, especifique os valores para $L_x$, $L_y$ e $L_z$.

(b) Repita se o ponto secundário da figura (b) estiver localizado na base da bobina.




Respostas: a) -1,5; 2,5 e 3,5 H   b) 5,5; 9,5 e -3,5 H

## * Rede "π"




* não é usualmente utilizada!
* não é obtida tão facilmente

$$v_1 = L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \quad (1)$$

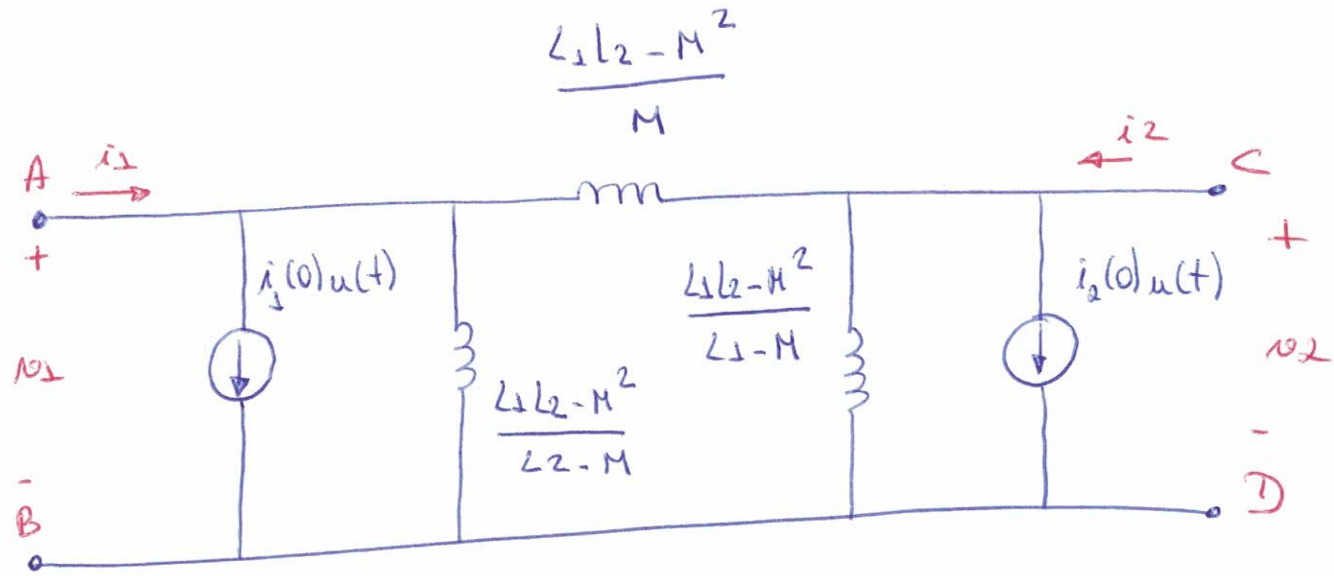
$$v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

* Resolver (2) p/ $\frac{di_2}{dt}$ e substituir em (1)

$\therefore \frac{di_1}{dt} = ?$

* Integrando de 0 a t

$i_1 - i_1(0)u(t) = \dots$
$i_2 - i_2(0)u(t) = \dots$
} Um par de eqções nodais




Exercícios recomendados:

16.1.1 | 1.2 e 1.3

16.2.1 | 2.2 e 2.3

16.3.1 | 3.2 e 3.3

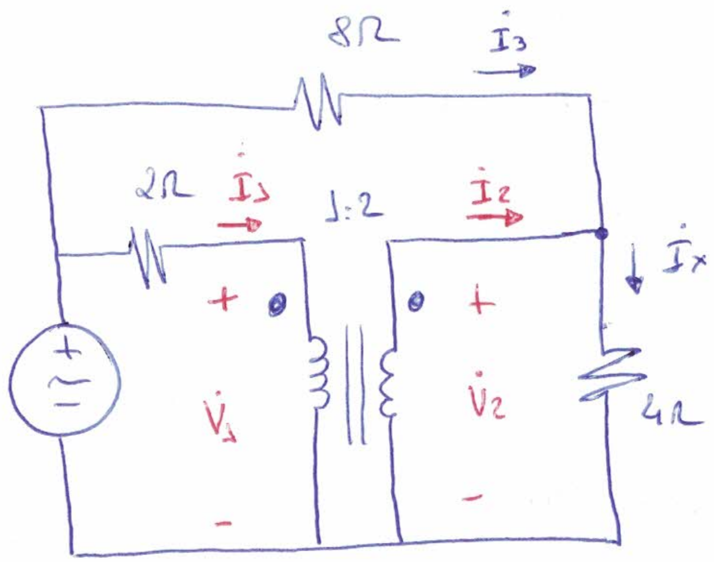
16.4.1 | 4.2 e 4.3

16.~~5~~.1 | ~~5~~.2, 5.3 e 5.4 $\boxed{s = j\omega}$

16.3 / 5 / 9 / 11 / 17 / 25 / 27 / ~~29~~ / ~~33~~ e 36

Exercício: Johnson 16.33

Calcule a potência média entregue ao resistor de 4Ω.




16 cos 3t (V)   $V_{rms}$

Transf. ideal

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = n \qquad \boxed{\dot{V}_2 = 2\dot{V}_1}$$

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{n} \qquad \boxed{\dot{I}_1 = 2\dot{I}_2}$$

(1) $-16 + 2\dot{I}_1 + \dot{V}_1 = 0 \therefore \boxed{2\dot{I}_1 + \dot{V}_1 = 16}$ (1)

$-\dot{I}_3 - \dot{I}_2 + \dot{I}_x = 0 \therefore \dot{I}_x = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$

$\dot{V}_2 = 4\dot{I}_x \therefore -\dot{V}_2 + 4\dot{I}_x = 0$

$\boxed{-\dot{V}_2 + 4\dot{I}_2 + 4\dot{I}_3 = 0}$ (2)

(3) $-16 + 8\dot{I}_3 + 4\dot{I}_3 + 4\dot{I}_2 = 0$

$\boxed{4\dot{I}_2 + 12\dot{I}_3 = 16}$ (3)

Aplicando $\dot{I}_1 = 2\dot{I}_2$ em (1) $\therefore \boxed{4\dot{I}_2 + \dot{V}_1 = 16}$ (4)

Aplicando $\dot{V}_2 = 2\dot{V}_1$ em (2) $\therefore \boxed{-2\dot{V}_1 + 4\dot{I}_2 + 4\dot{I}_3 = 0}$ (5)

Considerando $\boxed{4\dot{I}_2 + 12\dot{I}_3 = 16}$ (6)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}_1 = \frac{?}{128} \qquad \dot{V}_1 = ?$$

$$\dot{I}_2 = \frac{320}{128} \qquad \boxed{\dot{I}_2 = 2{,}5\angle 0^\circ \ (A)}$$

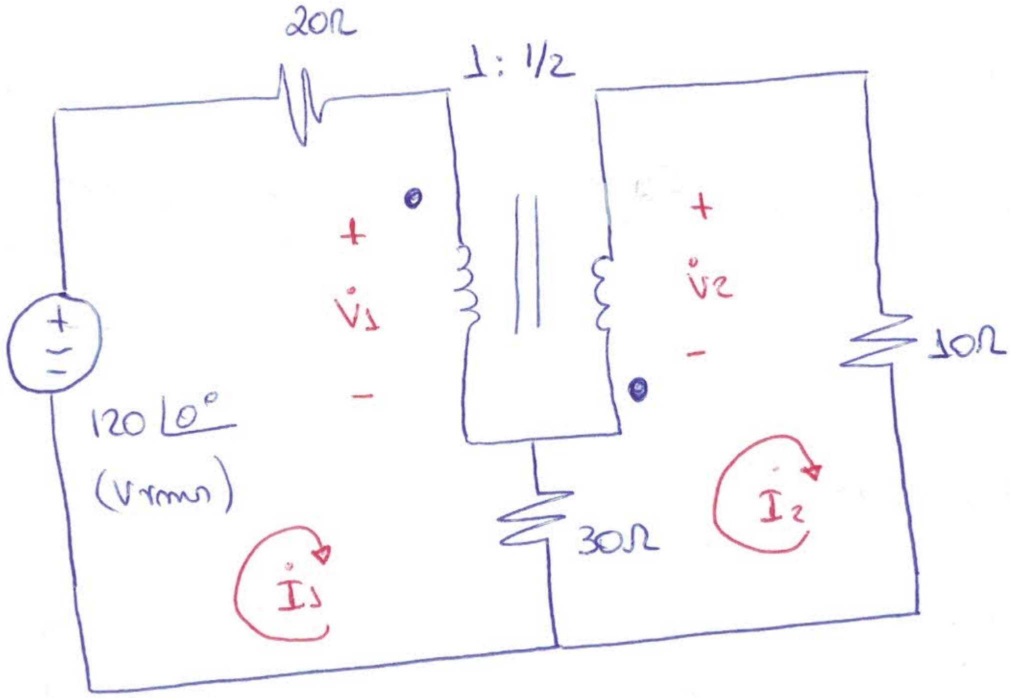
$$\dot{I}_3 = \frac{64}{128} \qquad \boxed{\dot{I}_3 = 0{,}5\angle 0^\circ \ (A)}$$

$$\dot{I}_x = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0{,}5 + 2{,}5 \qquad \boxed{\dot{I}_x = 3\angle 0^\circ \ (A)}$$

$$P_{4\Omega} = 4 \cdot I_x^2 = 4 \cdot (3)^2 \qquad \boxed{P_{4\Omega} = 36 \ (W)}$$

58-b

Exercício: No circuito apresentado, calcule a potência fornecida ao resistor de 10Ω.




MALHA 1

$$-120 + (20+30)\dot{I}_1 - 30\dot{I}_2 + \dot{V}_1 = 0$$

$$\boxed{50\dot{I}_1 - 30\dot{I}_2 + \dot{V}_1 = 120}$$

MALHA 2

$$-\dot{V}_2 + (10+30)\dot{I}_2 - 30\dot{I}_1 = 0$$

$$\boxed{-30\dot{I}_1 + 40\dot{I}_2 - \dot{V}_2 = 0}$$

* Transformador ideal: $\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = -n \qquad \dot{V}_2 = -\frac{1}{2}V_1$

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = -\frac{1}{n}$$

* SOLUÇÃO: $\boxed{\dot{I}_2 = ?}$

$\boxed{\dot{V}_1 = -2\dot{V}_2}$ e $\boxed{\dot{I}_2 = -2\dot{I}_1}$ $\boxed{\dot{I}_1 = -0{,}5\dot{I}_2}$

* Da eq. da malha 1:

$50(-0{,}5\dot{I}_2) - 30\dot{I}_2 - 2\dot{V}_2 = 120 \therefore \boxed{-55\dot{I}_2 - 2\dot{V}_2 = 120}$

$\dot{V}_2 =$

* Da eq. da malha 2

$-30(-0{,}5\dot{I}_2) + 40\dot{I}_2 - \dot{V}_2 = 0$

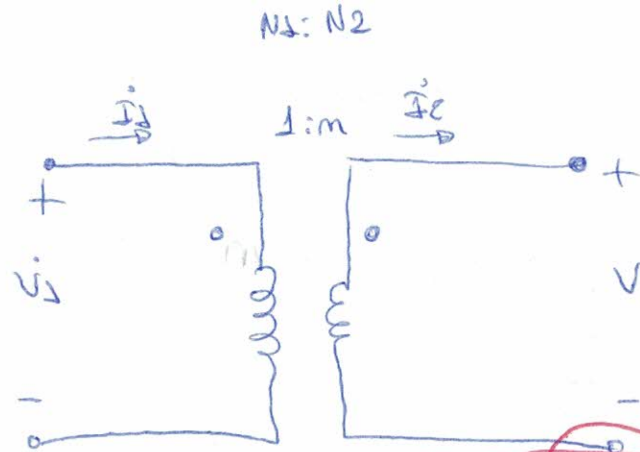
$15\dot{I}_2 + 40\dot{I}_2 - \dot{V}_2 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\dot{V}_2 = 55\dot{I}_2}$

* $-55\dot{I}_2 - 2(55\dot{I}_2) = 120 \quad \dot{I}_2 = \frac{-120}{165}$ $\boxed{\dot{I}_2 = -0{,}7272\angle 0^\circ \text{ (A)}_{rms}}$

$P_{10\Omega} = 10 \cdot (-0{,}7272)^2$

$\boxed{P_{10\Omega} = 5{,}3 \text{ (W)}}$

$$\boxed{m = \frac{N_2}{N_1}}$$

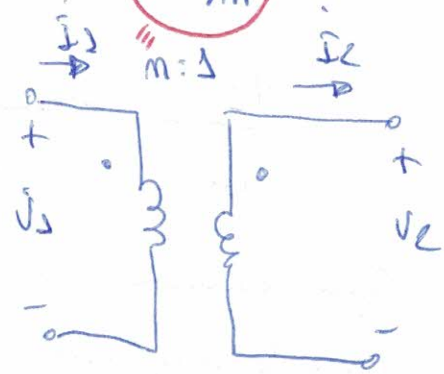



$$\frac{\dot V_2}{\dot V_1} = m \quad \therefore \quad \dot V_2 = m \dot V_1$$

$$\frac{\dot I_2}{\dot I_1} = \frac{1}{m} \quad \therefore \quad \dot I_2 = \frac{1}{m} \dot I_1$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = m^2 \quad \therefore \quad Z_2 = m^2 Z_1$$

$1 : 1/m$



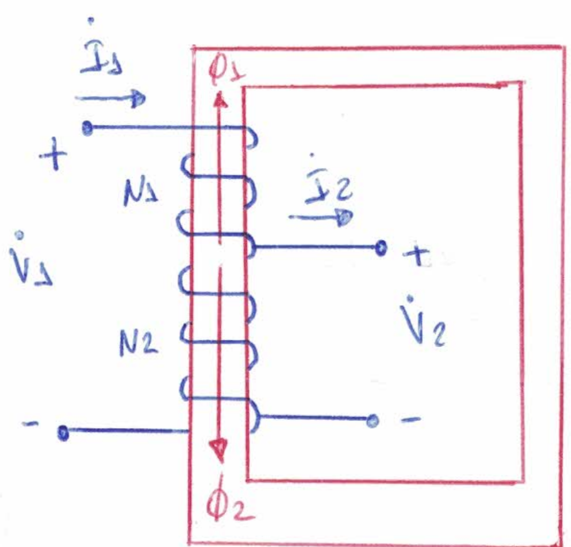

$$\boxed{m = \frac{N_1}{N_2}} \qquad \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{m^2}$$

$$\frac{\dot V_2}{\dot V_1} = \frac{1}{m}$$

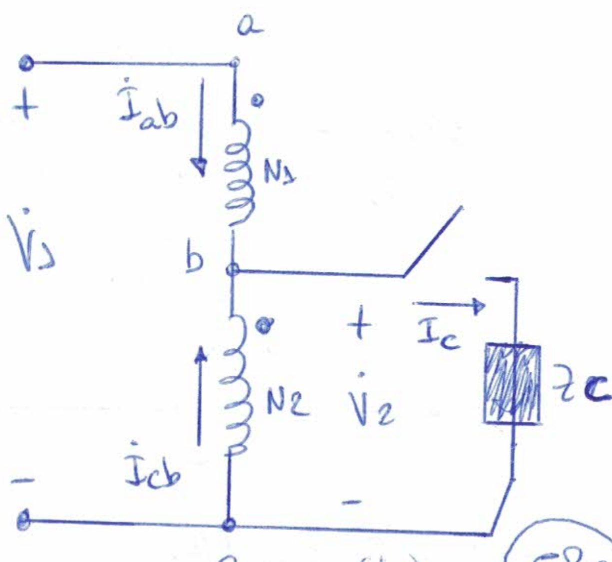
$$\frac{\dot I_2}{\dot I_1} = m$$

## Autotransformador

É um enrolamento eletricamente contínuo, com uma ou mais derivações (taps), em um núcleo magnético.




(a)




(b)

Considerando o circuito da figura b, a relação de transformação é:

$$a = \frac{N_1}{N_2} \quad (n)$$

$$a : 1 \quad (n)$$

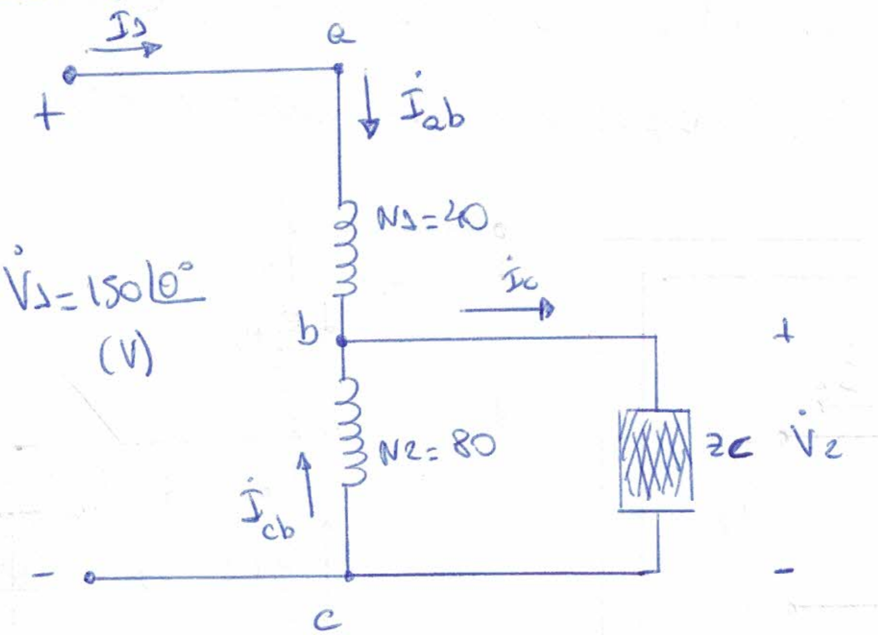
$$V_2 = \frac{1}{a\,(n)} V_1$$

$$\frac{\dot V_1}{\dot V_2} = \frac{N_1+N_2}{N_2} = \frac{N_1}{N_2} + \frac{N_2}{N_2} = \overset{n}{a} + 1 \therefore \boxed{\frac{\dot V_2}{\dot V_1} = \frac{1}{a+1}} \quad (n)$$

que excede pela unidade a relação de transformação de um transformador ideal tendo a mesma relação de espiras.

$$\boxed{\frac{\dot I_c}{\dot I_{ab}} = a+1} \qquad \boxed{\frac{\dot I_2}{\dot I_1} = n+1}$$

**Exemplo**: Para o autotransformador ideal apresentado, calcule $\dot V_2$ e $\dot I_{cb}$ e a corrente de entrada $\dot I_1$.




$Z_c = 10\angle 60°\ (\Omega)$

$$m = \frac{N_2}{N_1} = 0{,}1$$

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{m} \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = 10}$$

Trafo 1

$\dot{I}_{a1} = -0{,}1 \cdot \dot{I}_{a2}$ $\quad$ $\dot{I}_{a1} = -1\angle 0^\circ$ (A)

$$\frac{\dot{I}_{a2}}{I_{a1}} = -\frac{1}{m} = -10 \qquad \dot{I}_{a1} = \frac{\dot{I}_{a2}}{-10} \qquad \dot{I}_{a1} = \frac{-10\angle 0^\circ}{10}$$

$m$ = 0,1

$$\boxed{\dot{I}_{a1} = -1\angle 0^\circ \text{ (A)}}$$

Trafo 2

$$\frac{\dot{I}_{b2}}{\dot{I}_{b1}} = \frac{1}{m} = 10 \qquad \dot{I}_{b1} = \frac{\dot{I}_{b2}}{10} = \frac{20\angle 0^\circ}{10} \qquad \boxed{\dot{I}_{b1} = 2\angle 0^\circ \text{ (A)}}$$

Trafo 3

$$\frac{\dot{I}_{c2}}{\dot{I}_{c1}} = -\frac{1}{m} = -10 \qquad \dot{I}_{c1} = \frac{\dot{I}_{c2}}{-10} = \frac{10\angle 0^\circ}{-10}$$

$$\boxed{\dot{I}_{c1} = -1\angle 0^\circ \text{ (A)}}$$

58i

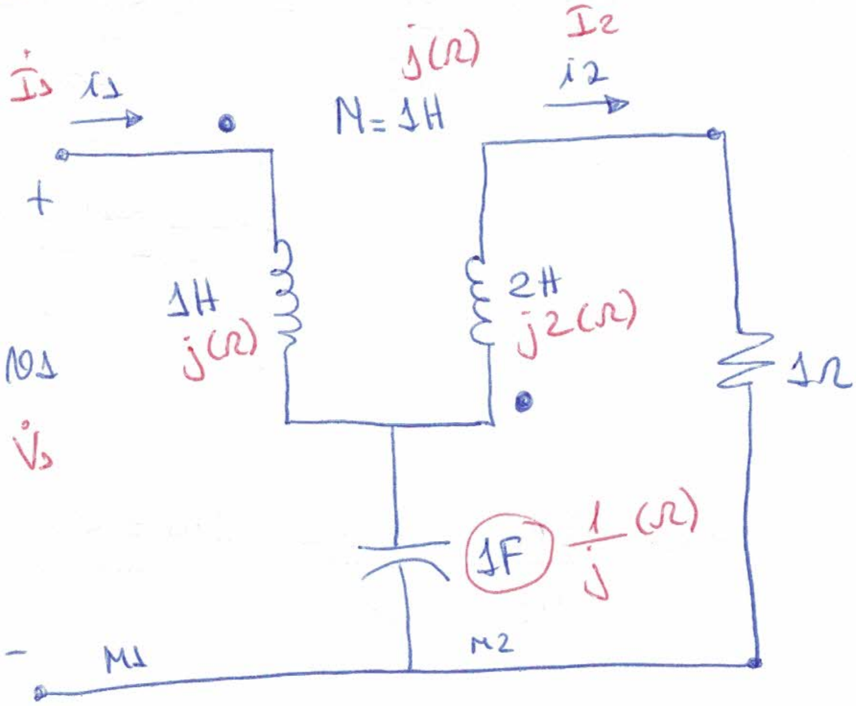
A soma das correntes do 1º enrolamento (série) fornece uma verificação: LKC

$$\dot{I}_{a1} + \dot{I}_{b1} + \dot{I}_{c1} = 0$$

$\boxed{LKC \to \text{nó } n}$

Exercício: No circuito acoplado, encontre a admitância de entrada $Y_1 = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}$ e determine a corrente $i_1(t)$ para $v_1(t) = 2\sqrt{2}\cos t$ (V).

$\boxed{\dot{V} = Z \cdot \dot{I}}$




* LKT à M1

mútua

$$\dot{V}_1 = j\dot{I}_1 + \frac{(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)}{j} + j\dot{I}_2 = 0$$

* LKT à M2

mútua

$$(j2+1)\dot{I}_2 + \frac{(\dot{I}_2 - \dot{I}_1)}{j} + j\dot{I}_1 = 0$$

⋮

$$Y_1 = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1} = \frac{2j^2 + j + 1}{j^3 + j^2 + 5j + 1}$$

$$Y_1 = \frac{1+j}{4} \qquad Y_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \angle 45^\circ \qquad \boxed{Y_1 = 0{,}3536 \angle 45^\circ \ (\mho)}$$

$$\boxed{\dot{I}_1 = Y_1 . \dot{V}_1} \qquad \dot{I}_1 = 0{,}3536 \angle 45^\circ . 2{,}8284 \angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_1 = 1 \angle 45^\circ$$

$$\boxed{i_1(t) = 1 \cos(t + 45^\circ) \ (A)}$$

58l

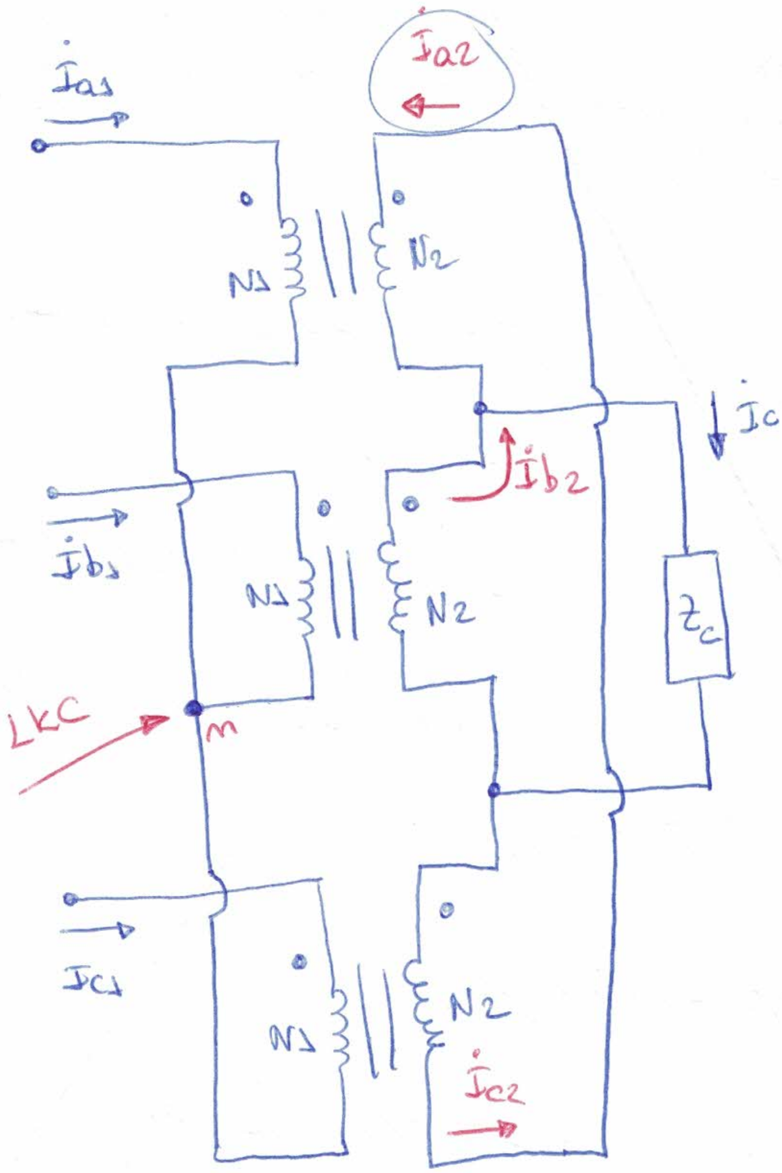
Exercício: Três transformadores idênticos são conectados em estrela (Y) no 1º ário e em delta (Δ) no 2º ário. Uma única carga conduz a corrente $\dot{I}_C = 30\angle 0°$.

Dados: $\dot{I}_{a2} = \dot{I}_{c2} = 10\angle 0°$ (A) $\quad N_2 = 10$

$\dot{I}_{b2} = 20\angle 0°$ (A)

$N_1 = 10 N_2 \qquad \boxed{\dfrac{N_2}{N_1} = 0,1}$

Encontre as correntes do 1º ário $\dot{I}_{a1}$, $\dot{I}_{b1}$ e $\dot{I}_{c1}$



$$\boxed{m = \frac{N_2}{N_1}} \qquad m = \frac{80}{40} \qquad \boxed{m = 2}$$

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = m + 1 \qquad \dot{V}_2 = (m+1)\dot{V}_1 \qquad \dot{V}_2 = 3 \cdot 150\angle 0^\circ$$

$$\boxed{\dot{V}_2 = 450\angle 0^\circ \ (V)}$$

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{V}_2}{Z_c} = \frac{450\angle 0^\circ}{10\angle 60^\circ} \qquad \boxed{\dot{I}_c = 45\angle -60^\circ \ (A)}$$

$$\boxed{\dot{I}_{cb} = I_c - \dot{I}_{ab}} \qquad \dot{I}_{ab} = \dot{I}_1 = (m+1) \cdot \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_c$$

$$\dot{I}_{ab} = 3 \cdot 45\angle -60^\circ \ (A)$$

$$\dot{I}_{ab} = 135\angle -60^\circ \ (A)$$

$$\dot{I}_{cb} = 45\angle -60^\circ - (135\angle -60^\circ)$$

$$\dot{I}_{cb} = 22{,}5 - j\,38{,}97 - 67{,}5 + j\,116{,}9$$

$$\dot{I}_{cb} = -45 + j\,77{,}93 \qquad \boxed{\dot{I}_{cb} = 90\angle -60^\circ \ (A)}$$

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{a = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}}$$

$$\dot{V}_2 = \frac{\dot{V}_1}{a+1} = 100 \angle 0^\circ \ (V)$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_2}{Z_C} = 10 \angle -60^\circ \ (A)$$

* corrente atrasada em relação a tensão ∴ carga com característica indutiva!

$$\dot{I}_{cb} = \dot{I}_C - \dot{I}_{ab} = 3,33 \angle -60^\circ \ (A)$$

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{I}_C}{a+1} = 6,67 \angle -60^\circ \ (A)$$

$$\boxed{\dot{I}_1 = \dot{I}_{ab} = 6,67 \angle -60^\circ \ (A)}$$

---

* LKC

$$-\dot{I}_{ab} - \dot{I}_{cb} + \dot{I}_C = 0$$

$$-\dot{I}_1 - \dot{I}_{cb} + \dot{I}_2 = 0$$

$$\boxed{\dot{I}_{cb} = -\dot{I}_1 + \dot{I}_C}$$

$$\boxed{\dot{I}_1 = \frac{\dot{I}_2}{n+1}}$$