AULA 2

MECÂNICA QUÂNTICA II

AULA 2

3.0) Grupo de Rotações

Vamos considerar agora o conjunto de todas as rotações R próprias (excluindo reflexão) de um vetor $\vec{K}$ em $\mathcal{E}_{3D}$. Esse conjunto deixa invariante a norma de qualquer vetor $\vec{K}$ e forma um grupo de Lie não-Abeliano : $SO(3)$, o grupo especial ortogonal de dimensão 3.

Se $\vec{K}$ é um vetor coluna com 3 entradas, as rotações são produzidas por matrizes ortogonais 3×3 de determinante 1 (especial, próprio).

Como já vimos antes (MQI), para cada elemento R existe uma transformação unitária $D(R)$ nos estados do espaço de Hilbert ($\mathcal{H}$) que satisfaz as leis de composição

$\mathcal{E}_{3D}$	$\mathcal{H}$
$R_1\, R_2 = R$	$D(R_1)\, D(R_2) = D(R_1 R_2)$ (3.0)
$R\, R^{-1} = R^{-1} R = I$	$D(R)\, D(R^{-1}) = I$
	$D(R^{-1}) = D^{+}(R)$ (3.1)

Definição: qualquer conjunto de matrizes que satisfaz essas leis de composição (3.0) e (3.1) é uma representação de $SO(3)$

ex: as matrizes 3×3 que transf. $\vec{K}$ são uma representação de $SO(3)$.

Qualquer rotação ~~de~~ $SO(3)$ é uma rotação por um ângulo θ em torno de uma direção $\vec{n}$ (vetor unitário) : $R_{\vec{n}}(\theta)$

Qualquer vetor $\vec{n}$ depende de 2 parâmetros, logo qualquer elemento de $SO(3)$ é parametrizado por 3 parâmetros contínuos

Vimos em M.Q.I que

$$\mathcal{D}(R) = e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{J}} \qquad (3.2a)$$

$$\vec{\omega} = \theta\,\vec{n} \qquad (3.2b)$$

onde J_i são os geradores infinitesimais das rotações que obedecem a algebra de Lie do grupo

$$[J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,J_k \qquad (3.3)$$

As matrizes 3×3 ortogonais não formam a <u>representação não trivial de dimensão mais baixa</u> do grupo. De fato já vimos que esta é dada pelas matrizes unitárias de dim. 2:

$$\mathcal{D}^{1/2}(R) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\frac{\theta}{2} - i\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \qquad (3.4)$$

Claramente $\mathcal{D}^{1/2}(R)$ satisfaz as leis de composição (3.0), mas esta representação tem uma peculiaridade: é uma representação de valor duplo em $SO(3)$. Para uma rotação $\theta = 2\pi$ em torno de qualquer eixo, que retorna qualquer vetor em $\mathcal{E}_{3D}$ para sua orientação original, $\mathcal{D}^{1/2} = -1$!

3.1) <u>$SO(3)$ e $SU(2)$</u>

Qualquer vetor real em $\mathcal{E}_{3D}$ pode ser representado por uma matriz de dim 2.

ex: $\vec{r}$

$$X = \vec{r}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

onde

$$\det X = -(x^2+y^2+z^2) \quad (3.6a)$$

$$\mathrm{Tr}\, X = 0 \quad (3.6b)$$

$$X = X^{+} \quad (3.6c)$$

logo qualquer transformação contínua linear de X que deixe o seu determinante e traço inalterados e o mantenha Hermitiano, corresponde a uma rotação.

Considere

$$X' = \Omega^{+} X\, \Omega \quad (3.7)$$

$$X'^{+} = (\Omega^{+} X \Omega)^{+} = \Omega^{+} X^{+} \Omega = \Omega^{+} X \Omega = X$$

$$\mathrm{Tr}\, X' = \mathrm{Tr}(\Omega^{+} X \Omega) = \mathrm{Tr}(\Omega \Omega^{+} X)$$

$$\det X' = \det \Omega^{+} \det X \det \Omega = |\det \Omega|^2 \det X$$

assim se $\Omega \Omega^{+} = 1$ então Ω satisfaz todas as condições, logo qualquer matriz unitária de dim 2 realizará uma rotação em um vetor via

$$X' = \Omega^{+} X\, \Omega \quad !$$

Podemos escrever qualquer matriz de dim 2 como:

$$\Omega = \varphi_0 + i\,\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}$$

se Ω é unitária

$$\Omega \Omega^{+} = |\varphi_0|^2 + |\vec{\varphi}|^2 + i\,\vec{\sigma} \cdot (\vec{\varphi}\,\varphi_0^{*} - \vec{\varphi}^{*} \varphi_0) + i\,\vec{\sigma} \cdot (\vec{\varphi} \times \vec{\varphi}^{*})$$
$$= 1$$

onde usamos

$$(\vec{\sigma}.\vec{a})(\vec{\sigma}.\vec{b}) = \vec{a}.\vec{b} + i\,\vec{\sigma}.(\vec{a}\times\vec{b})$$

os coeficientes de $\vec{\sigma}$ se anulam se Q_0 e $\vec{Q}$ são reais, a parte uma fase global

$$\Omega = e^{i\alpha}(Q_0 + i\,\vec{\sigma}.\vec{Q}) \quad (3.8a)$$

$$|Q_0|^2 + |\vec{Q}|^2 = 1 \qquad (3.8b)$$

Vamos esquecer a fase global pois ela não sobrevive à transformação. A condição (3.8b) reduz de 4 para 3 variáveis i.e. 3 números reais. Existe uma infinidade de escolhas.

Ex: Tomemos $\vec{r} = (x, y, 0)$ e uma rotação em torno do eixo z de um ângulo θ no sentido horário

$$\Omega = \cos\frac{\theta}{2} - i\,\sigma_3 \,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} \qquad Q_0 = \cos\frac{\theta}{2} \quad \vec{Q} = -\hat{z}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

$$X' = \Omega^{+} X \Omega \qquad (\text{Verifique!})$$

uma rotação em torno de qualquer eixo

$$Q_0 = \cos\frac{\theta}{2} \qquad \vec{Q} = -\vec{n}\,\text{sen}\frac{\theta}{2} \qquad \therefore \boxed{\Omega(R) = D^{1/2}(R)} \quad (3.9)$$

Cayley-Klein parameters

$$D^{1/2}(R) = \begin{pmatrix} Q_0 + iQ_3 & iQ_1 + Q_2 \\ iQ_1 - Q_2 & Q_0 - iQ_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \qquad \vec{n} = (\cos\phi\,\text{sen}\,\theta,\ \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta,\ \cos\theta)$$

$$a = \cos\frac{\delta}{2} - \text{sen}\frac{\delta}{2}\cos\theta \quad (3.11a)$$

$$b = -i\,e^{-i\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\delta/2 \quad (3.11b)$$

para uma rotação por um ângulo δ.

$$D^{1/2}(R^{-1}) = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$D^{1/2}(R_2)\, D^{1/2}(R_1) = D^{1/2}(R_2 R_1)$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2^* & a_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1^* & a_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 - b_2 b_1^* & a_2 b_1 + b_2 a_1^* \\ -b_2^* a_1 - a_2^* b_1^* & -b_2^* b_1 + a_2^* a_1^* \end{pmatrix}$$

$$= (a_2, b_2) \times (a_1, b_1) = (a_2 a_1 - b_2 b_1^*\,,\ a_2 b_1 + b_2 a_1^*)$$

assim $\quad (a,b)^{-1} = (a^*, -b)$

$$\underbrace{\delta = 0,\ 2\pi}_{\text{corresponde à indentidade de } SO(3)} \qquad \underbrace{a = \pm 1 \qquad b = 0}_{\text{dois conj. de parâmetros distintos}}$$

De forma geral o par de matrizes $D^{1/2}(\pm a, \pm b)$ fornecem a mesma rotação de um vetor pois $X \longrightarrow X'$ é bilinear em $D^{1/2}$ e logo as matrizes $D^{1/2}(R)$ são uma representação de valor duplo do grupo de rotação $SO(3)$

Essas matrizes fornecem uma representação de valor único de $SU(2)$ o grupo de transformações lineares de vetores complexos com componentes (u_1, u_2) no espaço $\mathbb{C}_2$

$$D^{1/2}(a,b) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a u_1 + b u_2 \\ -b^* u_1 + a^* u_2 \end{pmatrix}$$

que deixe $|u_1|^2 + |u_2|^2$ invariante

SU(2) é o grupo especial de matrizes unitárias de dimensão 2, $\det D^{1/2} = 1$ (sem a fase $e^{i\alpha}$ da definição de Ω). Quando a fase é incluída o grupo é chamado de U(2) - grupo unitário bidimensional.

$D^{1/2}(\pm a, \pm b)$ produz 2 vetores distintos $(\pm u_1', \pm u_2') \in \mathbb{C}_2$ enquanto que produz o mesmo vetor real em 3D.

3.2) <u>Representações irredutíveis de SU(2)</u>

Para qualquer grupo $\mathcal{G}$ com elementos $(g_1, g_2, \dots)$ um conjunto de matrizes $\{\mathcal{M}_K(g)\}$ de dimensão K que satisfaz a lei de composição

$$\mathcal{M}_K(g_2)\,\mathcal{M}_K(g_1) = \mathcal{M}_K(g_2 g_1) \quad (3.13)$$

forma uma <u>representação</u> de $\mathcal{G}$.

Se existe uma transf. unitária W que <u>não depende de</u> g para a qual $\forall g$

$$W^{\dagger}\mathcal{M}_K W = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_m & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_n \end{pmatrix}$$

a <u>representação</u> é <u>redutível</u>. Se não existe W que transforme $\mathcal{M}_K$ na forma bloco diagonal, a representação é irredutível.

$D^{1/2}(a,b) \equiv \Omega(a,b)$ é a representação irredutível de dim. 2 de SU(2) pois $e^{-\frac{i}{2}\theta\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}$ só pode ser (17) colocado na forma diagonal por uma transf. unitária que depende de $\vec{n}$. Veremos que as representações irredutíveis de dimensão maior podem ser construídas de $D^{1/2}$ essencialmente pela adição de momento angular.

Vamos considerar um sistema físico arbitrário com um operador de mom. angular $\vec{J}$, e um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ gerado por $|\alpha j m\rangle$ $j = 0, 1/2, 1, \ldots$ $m = -j, -j+1, \ldots, j$

$\vec{J}$ não precisa ser const. de movimento.

Sob rotação R:

$$|\alpha j m\rangle \longrightarrow |\alpha j m; R\rangle = D(R)\,|\alpha j m\rangle$$

$$D(R)\,|\alpha j m\rangle = \sum_{\alpha'} \sum_{j'm'} |\alpha' j' m'\rangle \langle \alpha' j' m'| D(R) |\alpha j m\rangle \quad (3.14)$$

mas $D(R) = e^{-i\theta \vec{n}\cdot\vec{J}}$ não muda j, além disso todos os elementos de matriz de $\vec{J}$ são completamente determinados por $\vec{J}$ por causa das regras de comutação do momento angular $\Longrightarrow$ os elementos de matriz de $D(R)$ são diagonais em j e totalmente independentes de α. Definindo

$$D^{j}_{mm'}(R) \equiv \langle j m | D(R) | j m' \rangle \quad (3.15)$$

$$|j m; R\rangle \equiv D(R)\,|j m\rangle = \sum_{m'} |j m'\rangle\, D^{j}_{m'm}(R) \quad (3.16)$$

as quantidades $\mathcal{D}^j_{m'm}(R)$ formam a matriz de rotação $\mathcal{D}^j(R)$ de dimensão $(2j+1)$. <u>Essas matrizes são universais</u>, dependem apenas dos autovalores do operador de momento angular que gera a rotação R e <u>são as mesmas para todos os sistemas</u> <u>que</u> <u>possuem o estado de momento angular em questão</u>.

$$\mathcal{D}^j_{mm'}(R_2 R_1) = \sum_{m''} \mathcal{D}^j_{mm''}(R_2)\, \mathcal{D}^j_{m''m'}(R_1) \quad (3.17)$$

se $R_2^{-1} = R_1$

$$\mathcal{D}^j_{mm'}(I) = \delta_{mm'}$$

$$\sum_{m''} \mathcal{D}^j_{mm''}(R)\, \mathcal{D}^j_{m''m'}(R^{-1}) = \delta_{mm'}$$

mas $\mathcal{D}^j$ é uma matriz unitária, então

$$\sum_{m''} \mathcal{D}^j_{mm''}(R) \left[\mathcal{D}^j_{m'm''}(R)\right]^* = \delta_{mm'}$$

$$\therefore\ \mathcal{D}^j_{mm'}(R^{-1}) = \left[\mathcal{D}^j_{m'm}(R)\right]^* \quad (3.18)$$

Como já vimos $\mathcal{D}^j$ é irredutível, não há sub-espaço invariante. Pode ser mostrado que ~~para~~ uma representação unitária ou é irredutível ou completamente redutível (existe um subespaço invariante e o seu complementar é também invariante).

3.21) Construção Explícita

Vamos construir D^j a partir de $D^{1/2}$

Sejam u_1 e u_2 vetores de base de representação de dim 2 de $SU(2)$

$$D^{1/2}(a,b)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\,u_1+b\,u_2\\-b^*u_1+a^*u_2\end{pmatrix}\quad(3.19)$$

u_1 se transforma sob rotação como $|j=1/2\ \ m=1/2\rangle$
u_2 se transforma sob rotação como $|j=1/2\ \ m=-1/2\rangle$

Vamos construir os polinômios. $u_1^p u_2^q$ que, com escolhas adequadas de p e q, transformem-se como os estados $|jm\rangle$

Considere

$$\Phi_{jm}=c_{jm}\ u_1^{j+m}\ u_2^{j-m}\quad(3.20)$$

vamos mostrar que Φ_{jm} se transforma como $|jm\rangle$ desde que c_{jm} sejam escolhidas de forma adequada, ou seja.

$$J_\pm\,\Phi_{jm}=\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\ \ \Phi_{j\,m\pm1}\quad(3.21)$$

Podemos escrever os operadores de momento angular em termos das variáveis (u_1,u_2)

$$J_+=u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\qquad J_-=u_2\frac{\partial}{\partial u_1}\qquad J_z=\frac{1}{2}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1}-u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right)$$

$$\Phi_{1/2\,1/2}=u_1\qquad \Phi_{1/2\,-1/2}=u_2$$

$$J_z\,\Phi_{jm}=m\,\Phi_{jm}\qquad J_z\,\Phi_{1/2\,1/2}=\frac{1}{2}u_1=\frac{1}{2}\Phi_{1/2\,1/2}$$

$$J_z\,\Phi_{\frac12\,-\frac12}=-\frac{1}{2}u_2=-\frac{1}{2}\Phi_{\frac12\,-\frac12}\qquad J_+\,\Phi_{\frac12\,\frac12}=0\qquad J_+\Phi_{\frac12\,-\frac12}=J_+u_2=u_1\ \Phi_{\frac12\,\frac12}$$

$$J_\pm \, \Phi_{jm}(u_1,u_2) = \sqrt{(j\pm m+1)\,(j\mp m)} \quad \Phi_{j\,m\pm 1}$$

pois $j(j+1) - m(m\pm 1) = (j\mp m)(j\pm m+1)$

É possível mostrar que a parte uma fase arbitrária irrelevante

$$\Phi_{jm}(u_1,u_2) = \frac{u_1^{\,j+m}\; u_2^{\,j-m}}{\sqrt{(j+m)!\;(j-m)!}} \qquad (3.22)$$

i.e.

$$J_+ \Phi_{jm} = u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} \Phi_{jm} = j-m \;\; \frac{u_1^{\,j+m+1} \quad u_2^{\,j-m-1}}{\sqrt{(j+m)!\;(j-m)!}}$$

$$= u_1^{\,j+m+1}\, u_2^{\,j-m-1} \sqrt{\frac{(j-m)\,\cancel{(j-m)}\,(j+m+1)}{(j+m+1)!\;\cancel{(j-m)}\,(j-m-1)!}} = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\;\Phi_{jm+1}$$

etc.

Agora precisamos avaliar a transf de Φ_{jm}. Lembramos que

$$|jm;R\rangle \equiv D(R)\,|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle\, D^{j}_{m'm}(R)$$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 D_{11} + u_2 D_{21} \\ u_1 D_{12} + u_2 D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 a - u_2 b^* \\ u_1 b + u_2 a^* \end{pmatrix}$$

pois $D^{1/2}(R) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$ para ser consistente com a def $D^{j}_{m'm}$!

$$\Phi_{jm}(u_1',u_2') = \sum_{m'} \Phi_{jm'}(u_1,u_2)\, D^{j}_{m'm}(a,b)$$

$$= \frac{(u_1 a - u_2 b^*)^{j+m}\,(u_1 b + u_2 a^*)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\;(j-m)!}} \qquad (3.23)$$

o teorema binomial fornece

$$\Phi_{jm}^{(u_1', u_2')} = \sum_{\mu\nu} \binom{j+m}{\mu}\binom{j-m}{\nu} \frac{(u_1 a)^{j+m-\mu} (-u_2 b^*)^{\mu} (u_1 b)^{j-m-\nu}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}$$

$$(u_2 a^*)^{\nu} \qquad (3.24)$$

pois $(x+y)^n = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} x^{n-\mu} y^{\mu}$

Comparando os termos

$$\sum_{m'} \frac{u_1^{j+m'}\, u_2^{j-m'}}{\sqrt{(j-m')!\,(j+m')!}} D^{j}_{m'm}(a,b) = \sum_{\mu=0}^{j+m} \sum_{\nu=0}^{j-m} \binom{j+m}{\mu}\binom{j-m}{\nu} \frac{u_1^{2j-\mu-\nu}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}$$

$$u_2^{\mu+\nu}\, a^{j+m-\mu}\, a^{*\nu}\, b^{j-m-\nu}\, (-b^*)^{\mu}$$

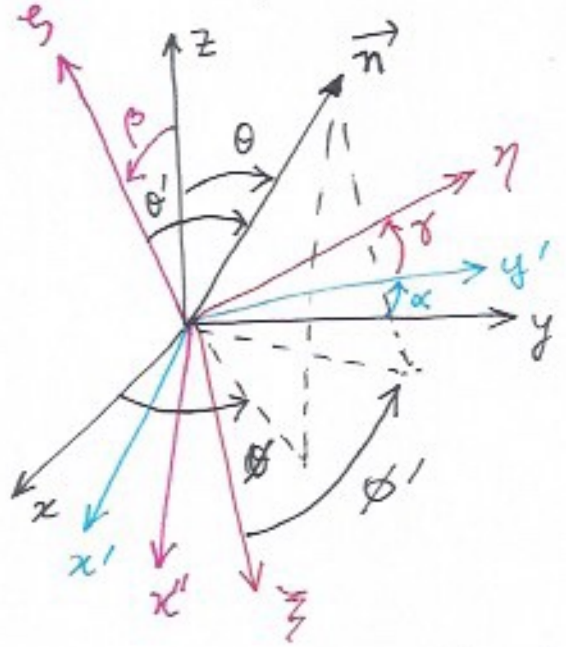
$$\begin{aligned} 2j-\mu-\nu &= j+m' \\ \mu+\nu &= j-m' \end{aligned} \implies \mu,\ \nu = j-m'-\mu$$

$$D^{j}_{m\,m'}(a,b) = \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}{\sqrt{(j+m')!\,(j-m')!}} \sum_{\mu=0}^{j+m'} \binom{j+m'}{\mu}\binom{j-m'}{j-m-\mu}$$

$$a^{j+m'-\mu}\, (a^*)^{j-m-\mu}\, (-b^*)^{\mu}\, (b)^{m-m'+\mu} \qquad (3.25) \ \left(\text{trocando } m \to m'\right)$$

Esse é o resultado que procurávamos, i.e. as representações irredutíveis de SO(3).

Podemos também usar os ângulos de Euler (α, β, γ) para parametrizar uma rotação.



$K = (x, y, z) \rightarrow K' = (\xi, \eta, \zeta)$

$\vec{n} = (\theta, \phi)$ $\quad\quad$ $\vec{n} = (\theta', \phi')$

$0 \leq \alpha, \gamma \leq 2\pi$

$0 \leq \beta \leq \pi$

a rotação R do referencial $K = (x, y, z)$ para $K' = (\xi, \eta, \zeta)$ é realizada por três rotações sucessivas:

$$D(R) = D_{\zeta}(\gamma) D_{y'}(\beta) D_z(\alpha)$$

em três referenciais diferentes. É possível mostrar (lista) que a rotação $K \rightarrow K'$ também pode ser descrita por três rotações com relação ao mesmo referencial K

$$D(R) = D_z(\alpha)\, D_y(\beta)\, D_z(\gamma) \quad (3,26)$$

assim $D^j_{mm'}(R) = \langle jm |\, e^{-i\alpha J_z}\, e^{-i\beta J_y}\, e^{-i\gamma J_z} \,| jm' \rangle$

$$= e^{-i\alpha m} \underbrace{\langle jm |\, e^{-i\beta J_y} \,| jm' \rangle}_{d^j_{mm'}(\beta)} e^{-i\gamma m'} \quad (3.27)$$

para calcular $d^j_{mm'}(\beta)$ usamos (3.25)

como $\vec{n} = (0,1,0) = \hat{y}$ $\quad a = \cos\frac{\beta}{2} \quad b = -\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}$

$$d^{j}_{mm'}(\beta) = \sqrt{\frac{(j+m)!\,(j-m)!}{(j+m')!\,(j-m')!}} \sum_{\mu} \binom{j+m'}{\mu} \binom{j-m'}{j-m-\mu} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j+m'-m-2\mu}$$

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)^{m-m'+2\mu} \quad (-1)^{m-m'+\mu} \qquad (3.28)$$

Mostre que (lista) se $j=l$ (inteiro) e $m'=0$

$$D^{l}_{m0}(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\; Y^{*}_{lm}(\beta,\alpha) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\; Y^{*}_{lm}(\vec{n}) \qquad (3.29)$$

onde β é o ângulo polar e α o ângulo azimutal de $\vec{n}$ em K.

As matrizes de rotação aparecem em inúmeras aplicações importantes, em funções de onda de moléculas e núcleos atômicos, em amplitudes de espalhamento de partículas com spin, em distribuições angulares de estados finais produzidos por transições radiativas e decaimentos.

Integrais sobre produtos de matrizes de rotação aparecem frequentemente (Gottfried. Cap 7.4(f))

Definindo

$$\int dR = \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\pi} \int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi}\frac{d\delta}{\pi}\, \operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2} \qquad \vec{\omega} = \delta\,\vec{n}(\theta,\phi)$$

Todas as integrais de interesse saem a partir do seguinte: Seja $|a\rangle$ um estado arbitrário e $|a;R\rangle$ o estado rodado. Se tomarmos a média de $|a;R\rangle$ sobre todas as orientações, a única componente que pode de sobreviver é $\langle 0|a\rangle$

esfericamente simétrico!

$$\int dR\; D(R)|a\rangle = |0\rangle\langle 0|a\rangle \qquad (3.30)$$