MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Modelos Populacionais

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Modelos Populacionais

Vamos inicialmente imaginar uma população de coelhos em uma ilha. Vamos supor que se reproduzam de forma que a população cresça em α% mensalmente (são coelhos, lembre ...).

Podemos então calcular a evolução da população em função da taxa α, a partir de uma população inicial, que vamos denotar por c_0. Denominando a população após n meses por c_n, podemos calcular:

$\Delta_n = c_{n+1} - c_n = \alpha c_n$ (variação mensal da população).

Assim, obtemos:

$$c_{n+1} = c_n + \alpha c_n = (1+\alpha) c_n$$

Vamos observar como uma tal população evolui em 5 anos.

Saindo de $c_0 = 30$ com $\alpha = 0.1$, chegamos a mais de 500 coelhos em 2 anos e meio e a mais de 9000 em 5 anos.

Temos também uma população de lebres que se reproduz um pouco mais lentamente, com taxa $\alpha = 0.08$. Se partirmos de 30 lebres (l_0), teremos após n meses.

$$l_n = (1+0.08)^n l_0.$$

A população de lebres será de aproximadamente 300 em 2 anos e meio e de uns 3 mil em 5 anos. Podemos nos perguntar qual o tempo necessário para as populações dobrarem de tamanho.

Como a partir de um valor inicial c_0, temos

$$c_n = (1+\alpha)c_{n-1} = (1+\alpha)(1+\alpha)c_{n-2} = \cdots = (1+\alpha)^n c_0,$$

podemos ver que a população dobra em n meses se

$(1+\alpha)^n = 2$ ou $n \log(1+\alpha) = \log 2$ $\rightarrow$ $n = \log 2 / \log(1+\alpha) \sim 7.27$,

ou seja, em aproximadamente 7 meses e 9 dias.

Já a população de lebres, que cresce um pouco mais lentamente irá dobrar a cada $n = \log 2 / \log(1.08) \sim 9.006$ meses, aproximadamente 9. Veja que no longo prazo esta pequena diferença é bem significativa.

Vamos deixar por um instante o crescimento populacional de lado e cuidar de finanças.

A situação é totalmente análoga a uma aplicação financeira sendo remunerada mensalmente a uma taxa de juros α. Com juros a 8% ao mês, o montante dobra a cada 9 meses (o que seria ótimo para uma aplicação financeira, mas não para uma dívida ....)

Para informação, coletei valores de juros do cheque "especial" no dia de hoje (site da serasa):

Banco do Brasil	12,03% ao mês
Bradesco	12,27%
Itaú	12,43%
Caixa E.F.	12,41%
Santander	14,77%

Conclusão:

Fuja!

← Parecem desatualizados $\sim 6.4\%$?

Cartão de crédito rotativo: 12,25% (site minhas economias).

Suponha que a taxa de juros mensal esteja em 1% ao mês para aplicações financeiras.

Você tem a opção de comprar um produto em 10 vezes 'sem acréscimo', ou pode pagar à vista com desconto de 6%. O que é mais vantajoso?

Vamos considerar que o preço 'justo' à vista, fosse aquele tal que desse na mesma pagar à vista ou a prestação, ou seja se pegássemos o valor do "preço justo" e investíssemos, retirando apenas os montantes para o pagamento das prestações, ao final não sobrasse (nem faltasse) nada.

Vamos supor que a 1ª parcela só é paga após 1 mês.

Se temos PJ inicialmente, após 1 mês o valor é:

$P_1 = (PJ * 1.01) - P/10$ (onde $P/10$ é o valor da prestação).

Após 2 meses: $P_2 = ((PJ * 1.01) - P/10) * 1.01 - P/10$

Após 3 meses: $P_3 = P_2 * 1.01 - P/10 = PJ * 1.01^3 - P/10\,(1.01^2 + 1.01 + 1)$

Após 10 meses: $P_{10} = PJ * 1.01^{10} - \dfrac{P}{10}\,(1.01^9 + 1.01^8 + \dots + 1)$

Para o preço justo, devemos ter $P_{10} = 0$.

$$PJ * 1.01^{10} = \frac{P}{10}\left(\frac{1.01^{10} - 1}{1.01 - 1}\right)$$ soma da P.G.

e portanto $$\frac{PJ}{P} = \frac{1.01^{10} - 1}{0.01 \times 10 \times 1.01^{10}} = 0.947$$

Nestas circunstâncias (caso se disponha do montante) vale a pena pagar à vista com os 6% de desconto.

Mas voltemos aos coelhos e lebres. Em um modelo mais realista, devemos levar em conta que os recursos naturais da pequena ilha são finitos e não permitem a alimentação de um número indefinido de coelhos e lebres. Vamos inicialmente supor que os coelhos e lebres se alimentem de vegetais distintos e que os suprimentos sejam adequados para a alimentação de 2000 coelhos e 2500 lebres. Como levar isso em conta na modelagem? Há modelos distintos para este fim, mas um modelo bastante popular é o modelo logístico, em que a taxa de crescimento vai diminuindo conforme a população se aproxima do valor de 'saturação'. Sendo M o valor para o qual os suprimentos são adequados, o modelo prevê a seguinte evolução:

$$C_{n+1} = C_n + \alpha C_n \left(1 - \frac{C_n}{M}\right)$$

Veja que quando a população é pequena, há alimentos em abundância, e o crescimento ocorre a uma taxa muito próxima a α. Quando o tamanho da população se aproxima de M, o crescimento se torna extremamente lento. Note também que se houver mais que M indivíduos na população, esta irá diminuir gradativamente.

Competição: Vamos agora supor que coelhos e lebres se alimentem dos mesmos vegetais. Enquanto há abundância, não sentirão muito, mas irão competir pelos alimentos.

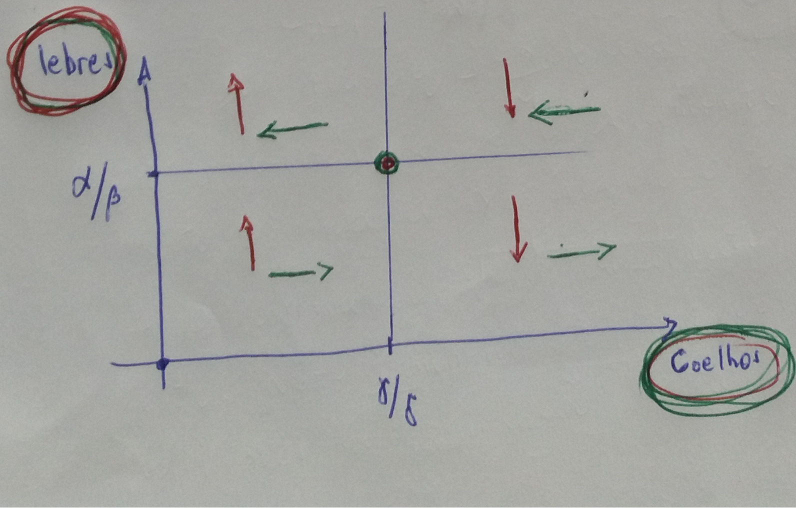
Esta competição é modelada como:

$$c_{n+1} - c_n = \Delta c_{n} = \alpha c_n - \beta c_n l_n$$

$$l_{n+1} - l_n = \Delta l_{n} = \gamma l_n - \delta c_n l_n$$

Veja que o termo da competição em cada equação (proporcional a $c_n l_n$) irá causar uma redução no crescimento das populações de coelhos e lebres.

Podemos observar que $\begin{cases} \Delta c_{n} = c_n(\alpha - \beta l_n) \\ \Delta l_{n} = l_n(\gamma - \delta c_n) \end{cases}$ e portanto a população total estará em equilíbrio se $c_n = \gamma/\delta$ e $l_n = \alpha/\beta$. O que acontece em outras situações. Vejamos:

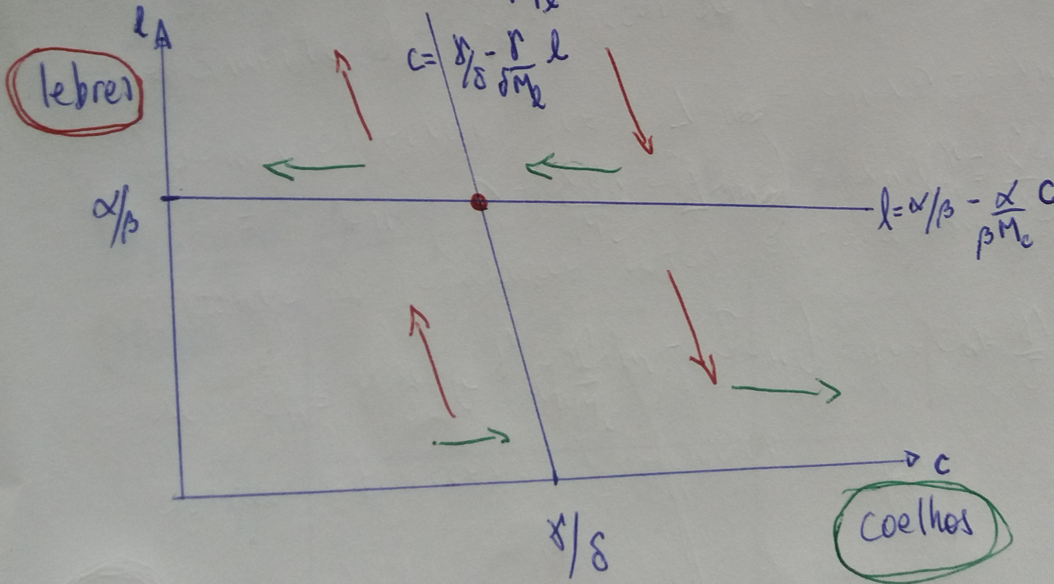


Competição com logística

O modelo anterior pode ser modificado, de forma a incluir também um fator limitante quanto à disponibilidade de alimentos na ausência do competidor:

$$\Delta c_n = \alpha\, c_n \left(1 - \frac{c_n}{M_c}\right) - \beta\, c_n l_n = c_n\left(\alpha - \beta l_n - \alpha \frac{c_n}{M_c}\right)$$

$$\Delta l_n = \gamma\, l_n \left(1 - \frac{l_n}{M_l}\right) - \delta\, c_n l_n = l_n\left(\gamma - \delta c_n - \gamma \frac{l_n}{M_l}\right)$$



Raposas x Coelhos — Presa-Predador

Suponha agora que as lebres foram extintas, mas chegaram raposas à ilha. Estas se alimentam de coelhos, mas ficam sem alimentos na ausência deles. O modelo tem a forma:

$$\Delta c_n = \alpha c_n - \beta c_n r_n = c_n(\alpha - \beta r_n)$$

$$\Delta r_n = \gamma r_n c_n - \delta r_n = r_n(\gamma c_n - \delta)$$

População de equilíbrio: $r_n = \alpha/\beta$, $c_n = \delta/\gamma$