Mecânica I – PME3100

Aula 2
Capítulo 2 – Forças e Vetores Aplicados

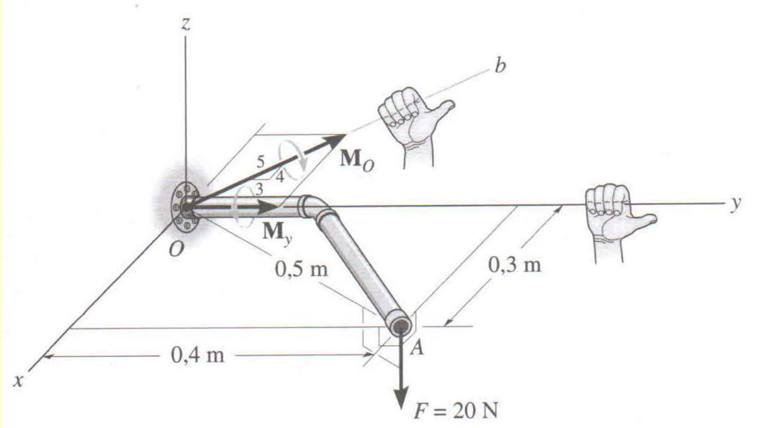
2.2.3 Momento em relação a um eixo

Considere um eixo passando por um ponto ***O*** e orientado por um ***versor*** $\bar{u}$

Momento do sistema de forças $(\bar{F}_i, P_i)$ em relação ao eixo $O\bar{u}$

Define-se:

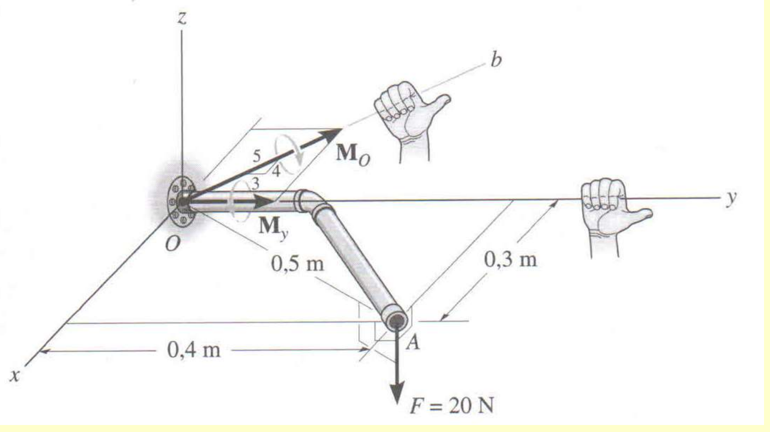
$$\boxed{M_u = \bar{M}_o \cdot \bar{u}}$$ (é um escalar)



Também chamado de torque no eixo

Analogia entre a nomenclatura do nosso livro texto e a figura abaixo

$$M_u = M_y \qquad A = P$$



Fonte: HIBBELER, R. C. ***Estática – mecânica para engenharia***. 10ª ed. São Paulo: Pearson - Prentice Hall, 2005.

$$M_u = \bar{M}_o \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot \bar{M}_o$$

com

$$\bar{u} = u_x \bar{\imath} + u_y \bar{\jmath} + u_z \bar{k}$$

$$M_u = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ (P-O)_x & (P-O)_y & (P-O)_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

O momento de um sistema de forças em relação a um eixo é a soma dos momentos, em relação ao eixo, de todas as forças do sistema

$$\boxed{M_u = \left[\sum_i (P_i - O) \wedge \bar{F}_i\right] \cdot \bar{u} = \sum_i (P_i - O) \wedge \bar{F}_i \cdot \bar{u} = \sum_i M_{iu}}$$

2.2.4 Binário

Forças opostas são duas forças cujos vetores são vetores opostos:

$$(\bar{F} \ e \ -\bar{F})$$

Forças diretamente opostas são forças opostas que tem mesma linha de ação

Binário é um sistema constituído por duas forças opostas, por exemplo, as forças

$$(\bar{F}, P) \quad \text{e} \quad (-\bar{F}, Q)$$

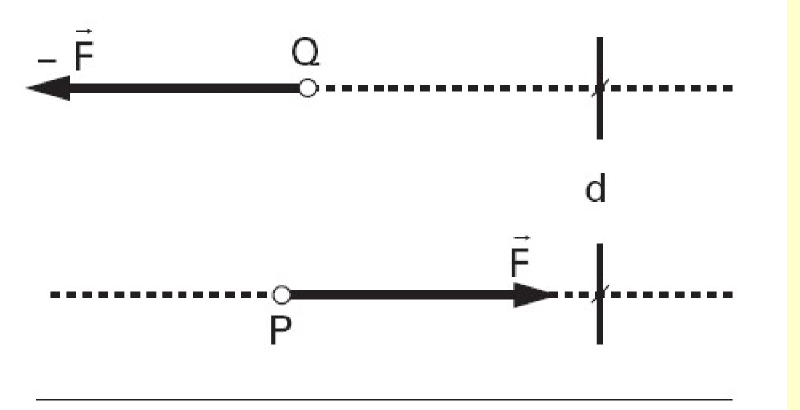


Figura 2.6 – Binário

Fonte: França, L. N. F. e Matsumura, A. Z. 2011, ***Mecânica Geral***, 3ª edição, Editora Edgard Blücher Ltda.

O momento de um binário independe do polo (vetor livre)

$$\boxed{\bar{M} = (P - O) \wedge \bar{F} + (Q - O) \wedge (-\bar{F}) = (P - Q) \wedge \bar{F}}$$

O módulo de $\overline{M}$

$$\boxed{|\bar{M}| = |(P - Q)| \cdot |\bar{F}| sen\phi = |\bar{F}| \cdot d}$$

Exemplo 2.1

Um binário tem um vetor $\bar{v}$ aplicado no ponto A. Achar o ponto de aplicação B do outro vetor, sabendo que esse ponto deve estar no plano Oxy e que o momento do binário é $\bar{M}$. Calcular o braço do binário.

$$\bar{v} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath} + \bar{k} \qquad A = (1,0,1)$$

$$\bar{M} = -2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \bar{k}$$

Resposta:

$$B = (2,1,0) \qquad d = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

2.3 Sistemas equivalentes e redução de um sistema de forças

Dois sistemas $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{S}'$, de forças dizem-se equivalentes se tiverem mesma resultante e mesmo momento em relação a um ponto.

Sistema $\boldsymbol{S}$: $(\bar{F}_1, A)$ e $(\bar{F}_2, B)$

Sistema $\boldsymbol{S}'$: $(\bar{F}_3, C)$ e $(\bar{F}_4, D)$

2.3.1 Redução de um sistema de forças

Reduzir um sistema ***S*** de forças = obter outro equivalente a ***S***

Em geral deseja-se fazer a redução máxima $\Rightarrow$ n° mínimo de forças

Comentar sobre o acréscimo de um binário conveniente $\Rightarrow$ permite transportar uma força de um ponto de aplicação a outro.

Com isto ...

... qualquer sistema ***S*** de forças é equivalente à sua resultante, aplicada num ponto ***O***, arbitrário, e mais um binário cujo momento é o momento de ***S*** em relação a ***O***, chamado polo de redução do sistema de forças.

mostrar um exemplo com três forças

Casos possíveis de redução de sistemas de forças:

1) Se $\bar{R} = \bar{0}$ e $\bar{M}_o = \bar{0}$ $\Rightarrow$ sistema equivalente a zero $\Rightarrow$ equivalente ao sistema cujas forças são todas nulas

2) Se $\bar{R} = \bar{0}$ e $\bar{M}_o \neq \bar{0}$ $\Rightarrow$ sistema equivalente a um binário de momento $\bar{M}_o$

3) Se $\bar{R} \neq \bar{0}$ e $\bar{M}_o = \bar{0}$ $\Rightarrow$ sistema equivalente a uma única força, desde que aplicada em um ponto conveniente $\Rightarrow I = 0$

   $I = \bar{M}_o \cdot \bar{R}$ é chamado invariante escalar do sistema (lembra-se?).

4) Se $\bar{R} \neq \bar{0}$ e $\bar{M}_o \neq \bar{0}$ $\Rightarrow$ sistema equivalente a uma resultante aplicada em O e mais um binário de momento $\bar{M}_o$ $\Rightarrow I \neq 0$

Para o lar: exemplos 2.1 a 2.6 do livro texto

2.3.2 Eixo central

Mas antes, uma forma de equação vetorial da reta

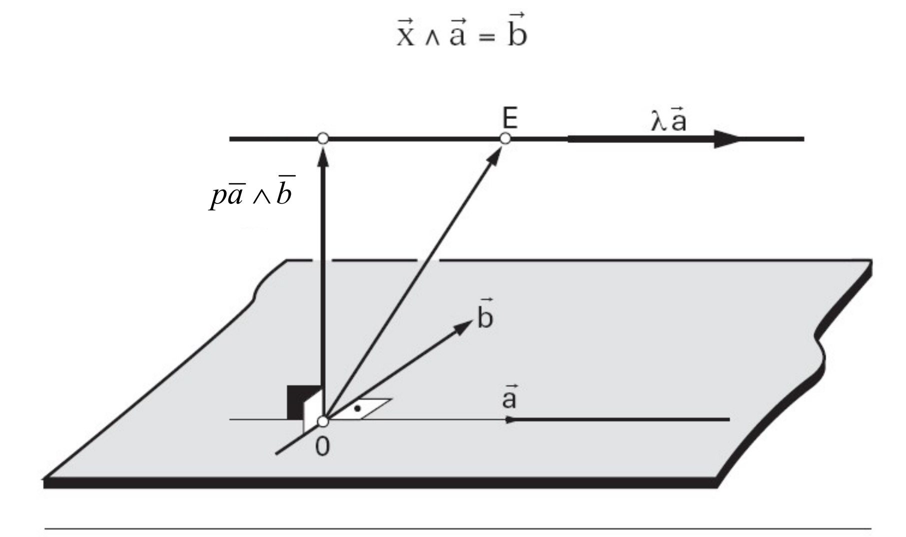


Figura 2.8 – *Equação da reta*

$$\bar{x} = (E - O)$$

Fonte: França, L. N. F. e Matsumura, A. Z. 2011, ***Mecânica Geral***, 3ª edição, Editora Edgard Blücher Ltda.

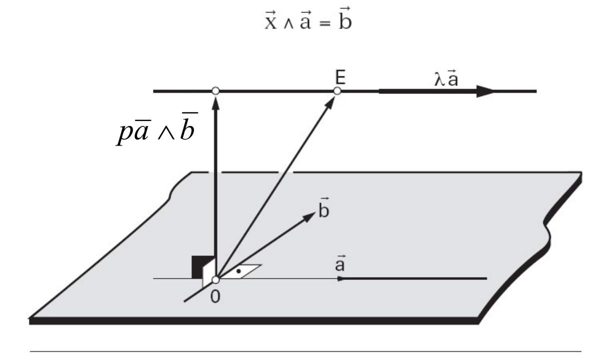


***Figura 2.8** – Equação da reta*

Equação: $\bar{x} \wedge \bar{a} = \bar{b}$ $\qquad \bar{x} = (E - O)$

Solução: $\bar{x} = p\bar{a} \wedge \bar{b} + \lambda\bar{a}$ com λ e $p \in \Re$

Voltando: $(p\bar{a} \wedge \bar{b} + \lambda\bar{a}) \wedge \bar{a} = \bar{b} \Rightarrow (p\bar{a} \wedge \bar{b}) \wedge \bar{a} = \bar{b} \Rightarrow p.|\bar{a}|.|\bar{b}|.|\bar{a}| = |\bar{b}|$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{1}{|\bar{a}|^2}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\bar{a} \wedge \bar{b}}{|\bar{a}|^2} + \lambda\bar{a}}$$

Voltando para a Mecânica:

O problema que se coloca agora é a procura dos pontos E tal que o momento em relação a eles seja mínimo.

Como visto, para qualquer sistema de forças, $I = \bar{M}_o \cdot \bar{R}$ independe do ponto escolhido.

Figura lousa

$\bar{L}_o \Rightarrow$ componente de $\bar{M}_o$ paralela a $\bar{R}$

$$|\bar{M}_o|^2 = |\bar{L}_o|^2 + |\bar{N}_o|^2$$

$\bar{N}_o \Rightarrow$ componente de $\bar{M}_o$ perpendicular a $\bar{R}$

$\bar{L}_0 \Rightarrow$ projeção de $\bar{M}_0$ na direção de $\bar{R}$

$|\bar{L}_0| = \bar{M}_0 \cdot \bar{R}$ (que é o invariante escalar). É uma constante e independe do polo escolhido

O módulo do momento será mínimo quando calculado em relação a um ponto ***E*** tal que $\bar{N}_E = \bar{0}$. Ou seja, $\bar{M}_E$ terá a direção de $\bar{R}$

$$\bar{M}_E = h\,.\bar{R}$$

O escalar *h* independe do ponto *E* da reta

$$\bar{M}_E = \bar{M}_o + (O - E) \wedge \bar{R} = h\,.\,\bar{R}$$

$$(E - O) \wedge \bar{R} = \bar{M}_o - h\,.\,\bar{R}$$

Equação $\Rightarrow \bar{x} \wedge \bar{a} = \bar{b}$

Solução $\Rightarrow \boxed{\bar{x} = \dfrac{\bar{a} \wedge \bar{b}}{|\bar{a}|^2} + \lambda \bar{a}}$

$$(E - O) \wedge \bar{R} = \bar{M}_o - h\,.\,\bar{R}$$

$$(E - O) = \frac{\bar{R} \wedge (\bar{M}_o - h\,.\,\bar{R})}{|\bar{R}|^2} + \lambda \bar{R} = \frac{\bar{R} \wedge \bar{M}_o}{|\bar{R}|^2} + \lambda \bar{R}$$

Sobre o parâmetro h

$$\bar{M}_E.\bar{R} = \bar{M}_o.\bar{R} + (O - E) \wedge \bar{R}.\bar{R}$$

$$\bar{M}_E.\bar{R} = \bar{M}_o.\bar{R} \Longrightarrow h|\bar{R}|^2 = \bar{M}_o.\bar{R} \Longrightarrow h = \frac{\bar{M}_o.\bar{R}}{|\bar{R}|^2}$$

Os pontos E assim determinados são pontos de uma reta paralela a $\bar{R}$

Esta reta é o ***eixo central*** do sistema de forças e o momento em relação aos seus pontos é mínimo

Seja um sistema ***S*** de forças com resultante diferente de zero.

O lugar geométrico dos pontos ***E*** para os quais o momento do sistema é paralelo a $\bar{R}$, é uma reta (paralela a $\bar{R}$). Tal reta é chamada eixo central do sistema e é única.

Analogia $\Rightarrow$

$$\bar{R} = \bar{a}$$
$$\bar{M}_o = \bar{b}$$
$$E - O = \bar{x}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\bar{a} \wedge \bar{b}}{|\bar{a}|^2} + \lambda \bar{a}}$$

$$\boxed{E = O + \left(\frac{\bar{R} \wedge \bar{M}_o}{|R|^2} \right) + \lambda \bar{R}}$$

Informação importante:

O momento do sistema é mínimo, em módulo, nos pontos da reta $(E, \bar{R})$

$$\boxed{\bar{M}_{mín} = \frac{I}{|\bar{R}|^2}\bar{R}}$$

Para o lar: exemplos 2.7 a 2.11 do livro texto

Primeira Prova de Mecânica A – PME 2100 – 28/08/2012

1º Questão (3,0 pontos) Considere o sistema de forças $(\vec{F}_i, P_i)$ dado por $\vec{F}_1 = F\vec{i}$, $\vec{F}_2 = F\vec{j} + F\vec{k}$ e $\vec{F}_3 = F\vec{k}$. As forças estão aplicadas nos pontos: $P_1(a,0,a)$, $P_2(0,a,a)$ e $P_3(0,0,a)$ respectivamente. Pede-se:

a) Calcular a resultante do sistema de forças, o momento em relação ao pólo O (0, 0, 0);

b) Verificar se o sistema é redutível a uma única força. Justificar;

c) Calcular o momento em relação ao pólo D (0, a, a);

d) Determinar o lugar geométrico dos pontos E onde o momento do sistema de forças é mínimo;

PERGUNTAS?