MAT0105 – Geometria Analítica

Equações de Planos no Espaço

Profa. Ana Paula Jahn

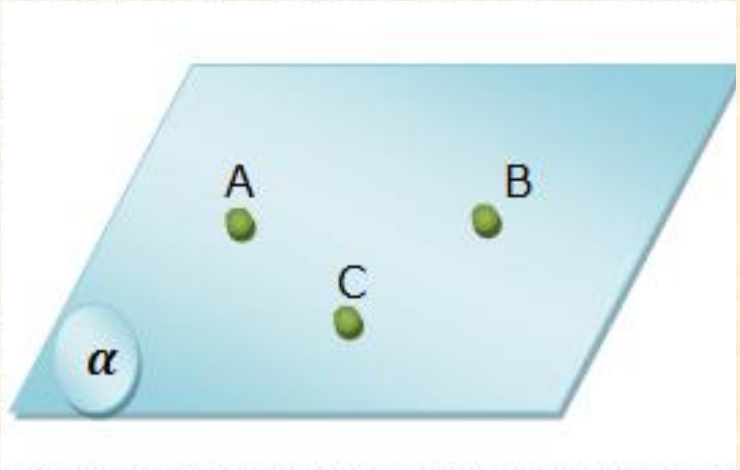
anajahn@ime.usp.br

Determinação de um plano

Um plano pode ser determinado por:

1) **Três pontos** distintos **não colineares**

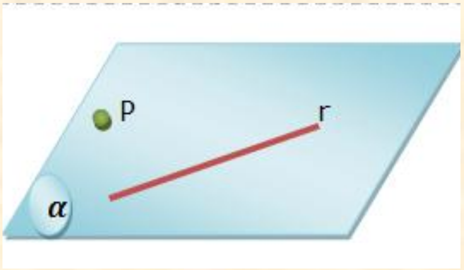
Axioma da Geometria Euclidiana: **Três pontos** distintos e não colineares **determinam um único plano**.



Determinação de um plano

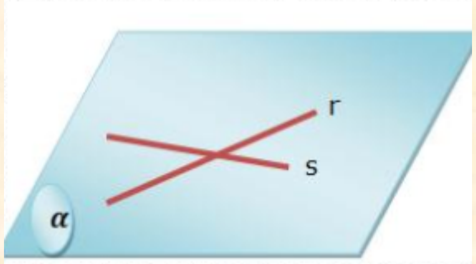
Um plano pode ser determinado por:

1) **Três pontos** distintos não colineares



2) **Uma reta** e **um ponto** fora dela

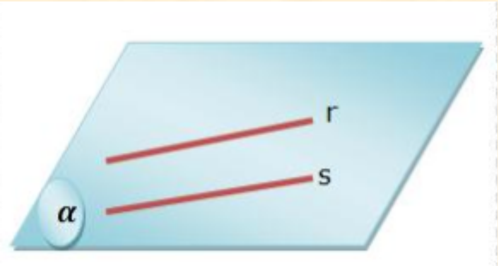
(2 pontos da reta + 1 ponto fora)



3) Duas retas **concorrentes**

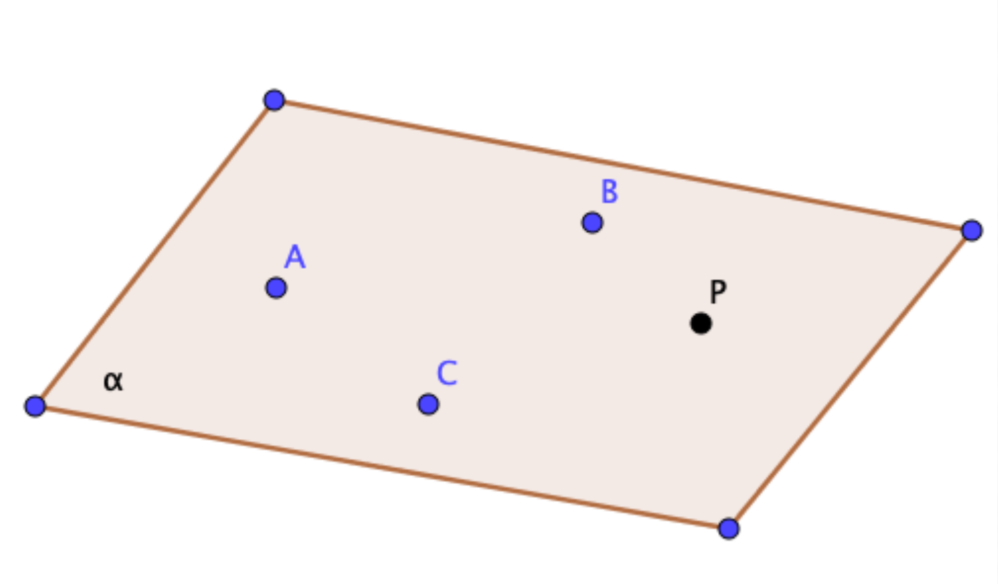
4) Duas retas **paralelas distintas**

(2 pontos de uma reta + um ponto da outra



Equação de plano determinado por 3 pontos

Observe a figura:

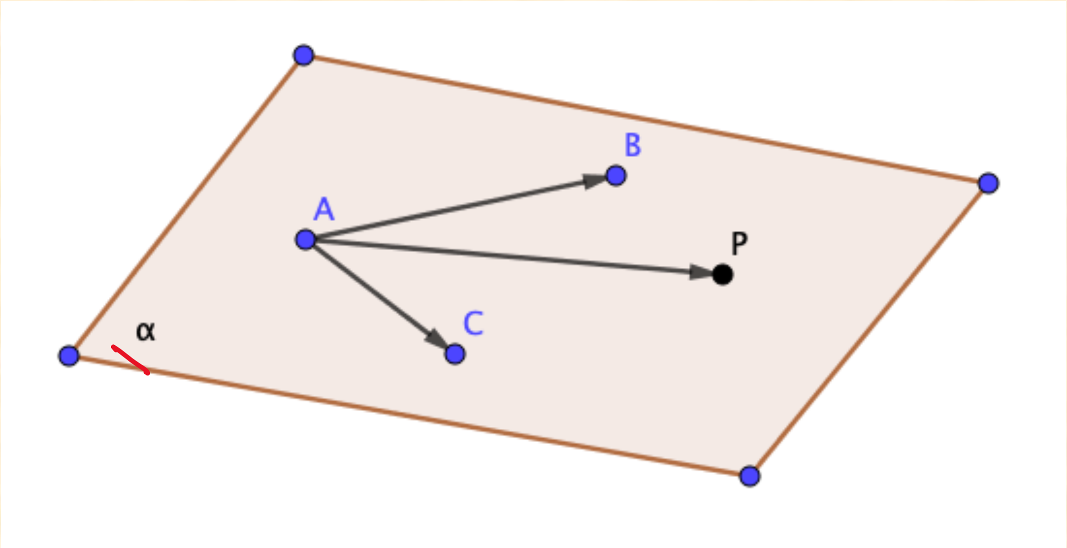


Dados os pontos A, B e C.

Pergunta-se: um ponto *P* qualquer que pertence ao plano α satisfaz qual condição (em relação aos pontos *A*, *B*, *C*)?

Equação de plano determinado por 3 pontos

Observe a figura:



Dados os pontos A, B e C.
Pergunta-se: um ponto *P* qualquer que pertence ao plano α satisfaz qual condição (em relação aos vetores determinados pelos pontos)?

Equação Geral de um plano

Os **vetores** $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$ devem ser coplanares. Isto é:

$$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\} \text{ LD } \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}] = 0$$

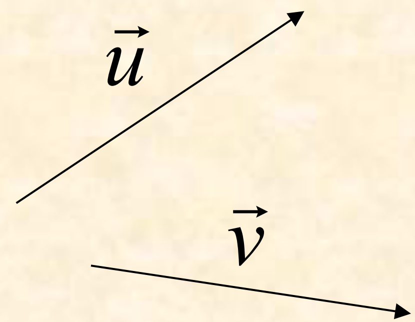
Com coordenadas:

Toma-se $P = (x, y, z)$ um ponto genérico do plano

Basta determinar os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}$ em função das coordenadas dos pontos e fazer:

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x - x_A & y - y_A & z - z_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

Sejam um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ não paralelos (LI). Então existe um único plano $\pi \in R^3$ que passa por *A* e possui representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

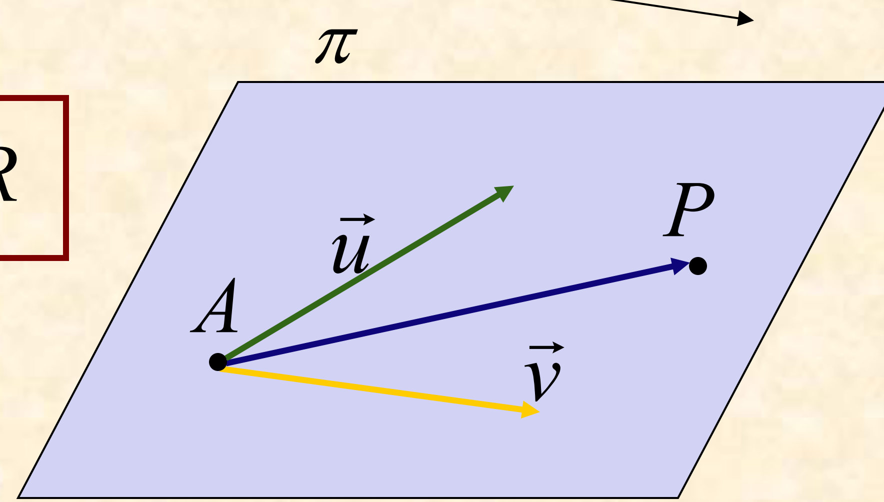


$$\pi : \overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \forall \lambda, \mu \in R$$

$$\pi : P - A = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \forall \lambda, \mu \in R$$

$$\boxed{\pi : P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \forall \lambda, \mu \in R}$$

Equação Vetorial do Plano



<u>Equação Vetorial</u>: Dados $P=(x,y,z)$, $A=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ temos que a equação vetorial do plano é: π

$$\pi : P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \forall \lambda, \mu \in R$$

$$\boxed{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3), \quad \forall \lambda, \mu \in R}$$

Equações Paramétricas

Considerando a equação vetorial do plano π

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3),$$

$$\forall \lambda, \mu \in R$$

Temos as equações paramétricas do plano dadas por:

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}, \forall \lambda, \mu \in R}$$

Exemplo

Determinar as **equações vetorial** e **geral do plano** que passa pelos pontos

$A = (3,0,-5)$, $B = (7,4,-7), C = (1,1,-1)$.

Para a **equação geral**: $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\}$ LD $\Leftrightarrow$ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right] = 0$

Para um ponto $P = (x, y, z)$ genérico do plano:

$\overrightarrow{AB} = (4,4,-2)$; $\overrightarrow{AC} = (-2,1,4)$; $\overrightarrow{AP} = (x-3, y, z+5)$

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ x-3 & y & z+5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 18x - 12y + 12z + 6 = 0 \ \ (:6)$$

$\mathbf{3x - 2y + 2z + 1 = 0}$ **– Equação Geral do plano (ABC)**

Exemplo

Para as **equações paramétricas do plano** que passa pelos pontos A=(3,0,-5), B=(7,4,-7) e C=(1,1,-1).

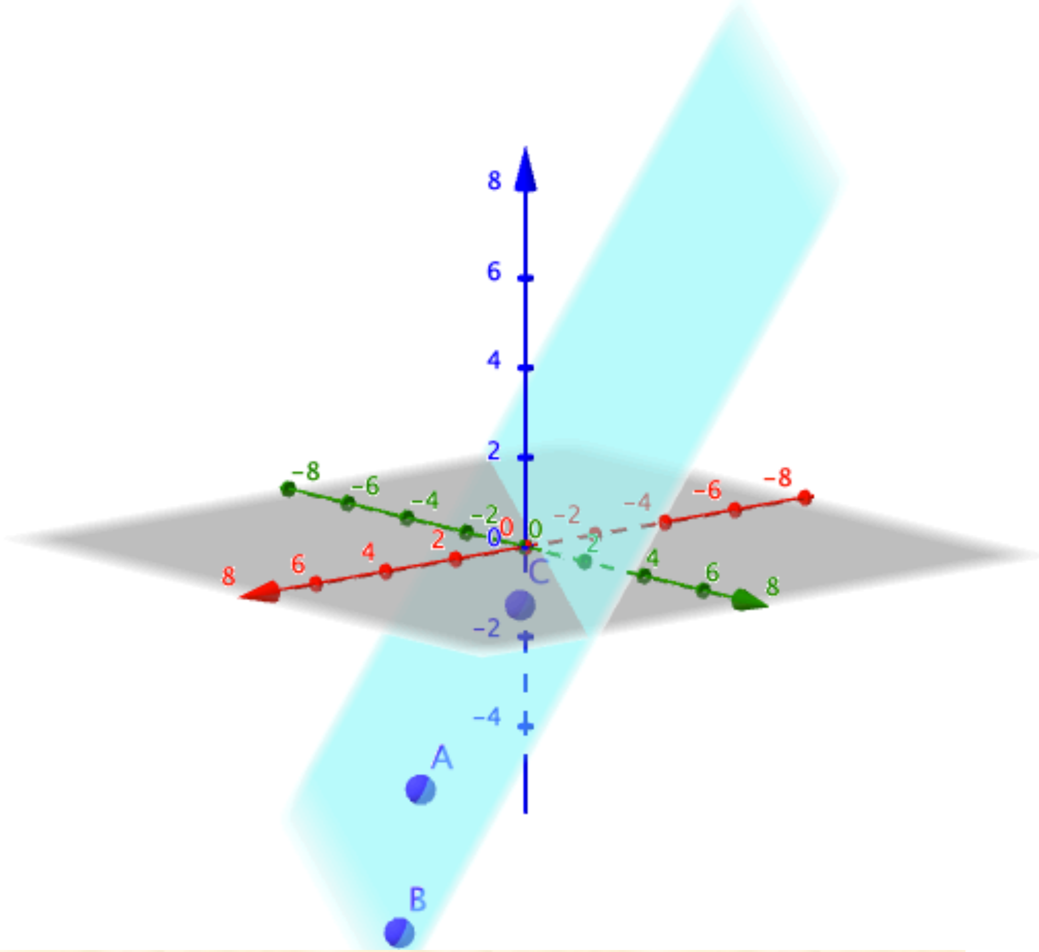
Tomemos **dois vetores diretores** do plano:

$\overrightarrow{AB} = (4,4,-2); \overrightarrow{AC} = (-2,1,4)$

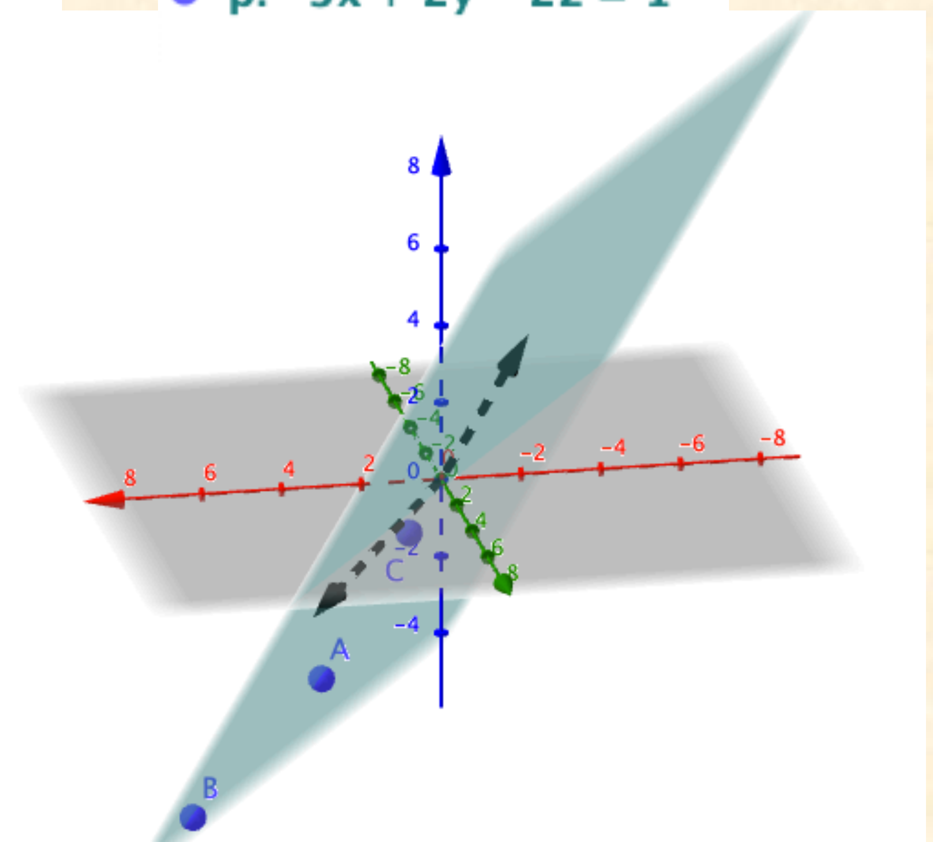
$$P = A + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$(x, y, z) = (3,0,-5)+\alpha(4,4,-2) + \beta(-2,1,4)\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ – **Equação Vetorial do plano (*ABC*)**

$$\begin{cases} x = 3 + 4\alpha - 2\beta \\ y = \quad 4\alpha + \beta \\ z = -5 - 2\alpha + 4\beta \end{cases} (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$ – **Eq. Paramétricas do plano**



- $A = (3, 0, -5)$
- $B = (7, 4, -7)$
- $C = (1, 1, -1)$
- $\mathbf{v1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{v2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $p: -3x + 2y - 2z = 1$



Relembrando:

Assim, para determinar uma **equação vetorial** de um plano α, deve-se ter:

- Um ponto desse plano
- Dois vetores LI com representantes nesse plano

$$P = (x, y, z) \in \alpha \iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ e } \overrightarrow{AP} \text{ são coplanares.}$$

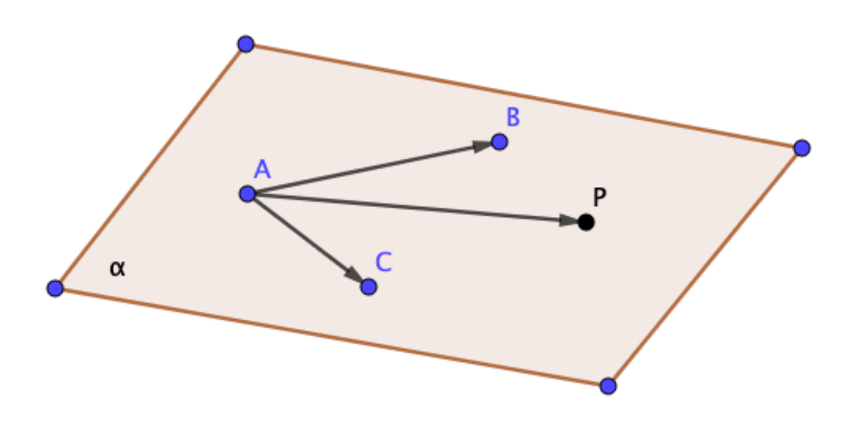
$\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB} + h\,\overrightarrow{AC}$ (com t e h reais)

Como, $\mathbf{P} = \mathbf{A} + \overrightarrow{\mathbf{AP}}$

$$\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{A} + \mathrm{t}\,\overrightarrow{AB} + \mathrm{h}\,\overrightarrow{AC}}$$

variável

parâmetros



Fazendo variar os números t e h em IR, obtém-se todos os pontos do plano α.

Exemplo

Determine uma **equação vetorial** plano (*ABC*), sabendo que $A(2,-1,0)$, $B(0,-1,3)$ e $C=(0,2,3)$.

Solução: determinemos dois vetores diretores do plano

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2,0,3)$$
$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-2,3,3)$$

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{:}\ \boldsymbol{X} = (\mathbf{2},-\mathbf{1},\mathbf{0}) + \boldsymbol{\beta}(-\mathbf{2},\mathbf{0},\mathbf{3}) + \boldsymbol{\lambda}(-\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{3})$$
$$(\beta,\lambda \in \mathbb{R})$$

Retomando a **equação geral** de um plano:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

Obtida a partir de: $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\}$ LD $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}] = 0$

Em coordenadas: $A = (x_A, y_A, z_A)$, $P = (x, y, z)$,

$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x - x_A & y - y_A & z - z_A \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Desenvolvendo:}$$

$$\underline{(\boldsymbol{y_1 z_2 - y_2 z_1})}\, x + \underline{(x_2 z_1 - x_1 z_2)}\, y + \underline{(\boldsymbol{x_1 y_2 - x_2 y_1})}\, z$$

$$+ (-x_1 y_2 z_A - x_2 z_1 y_A - y_1 z_2 x_A + z_1 y_2 x_A + x_1 z_2 y_A$$

$$+ x_2 y_1 z_A) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$

$$\boldsymbol{y_1 z_2 - y_2 z_1 = a} \quad \boldsymbol{x_2 z_1 - x_1 z_2 = b} \quad \boldsymbol{x_1 y_2 - x_2 y_1 = c}$$

Observe que o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}$ pode ser também descrito através dos mesmos coeficientes **a**, ***b*** e **c** da equação anterior, ou seja:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$y_1 z_2 \vec{i} + x_1 y_2 \vec{k} + x_2\, z_1 \vec{j} - x_2 y_1 \vec{k} - y_2 z_1 \vec{i} - x_1 z_2 \vec{j} =$$

$$= \underline{(\boldsymbol{y_1 z_2 - y_2 z_1})}\vec{i} + \underline{(x_2 z_1 - x_1 z_2\,)\vec{j}} +$$

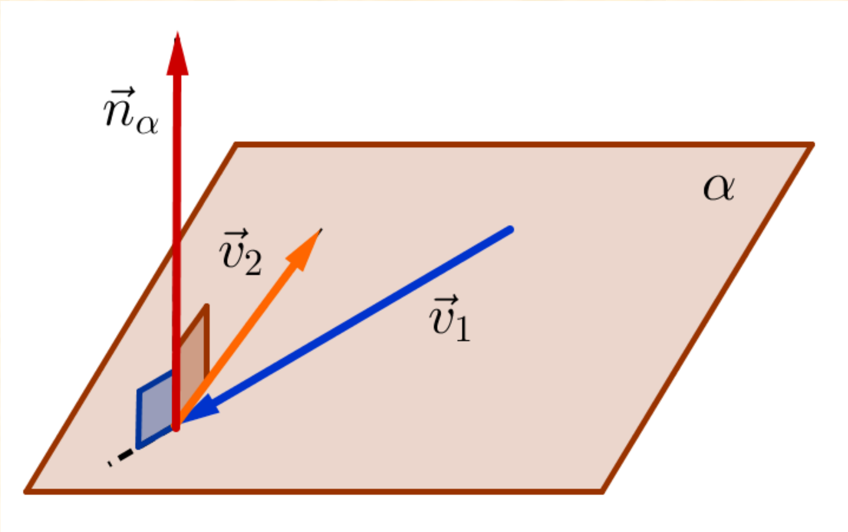
$$+ \underline{(\boldsymbol{x_1 y_2 - x_2 y_1})}\vec{k}$$

$$\boldsymbol{y_1 z_2 - y_2 z_1 = a};\ \boldsymbol{x_2 z_1 - x_1 z_2 = b};\ \boldsymbol{x_1 y_2 - x_2 y_1 = c}$$

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \vec{n} = (a, b, c)$$

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \vec{n} = (a, b, c)$$

O ***vetor*** $\vec{n}$ é simultaneamente **ortogonal aos vetores diretores** do plano, ou seja, é **ortogonal ao plano**.



Um **vetor (não nulo) ortogonal** a todo vetor que possui representante em um plano α é chamado **vetor normal** desse plano.

Assim, o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é um **vetor normal** do plano α.

Plano determinado **por um ponto** e um **vetor normal**

Dados o ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$

Pode-se determinar a equação do plano β que passa por A e tem $\vec{n}$ como vetor normal:

$\forall\, P \in \beta$, tem-se: $< \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}, \boldsymbol{\vec{n}} > = \mathbf{0}$.

Logo: $(x - x_0)a + (y - y_0)b + (\mathrm{z} - z_0)c = 0$

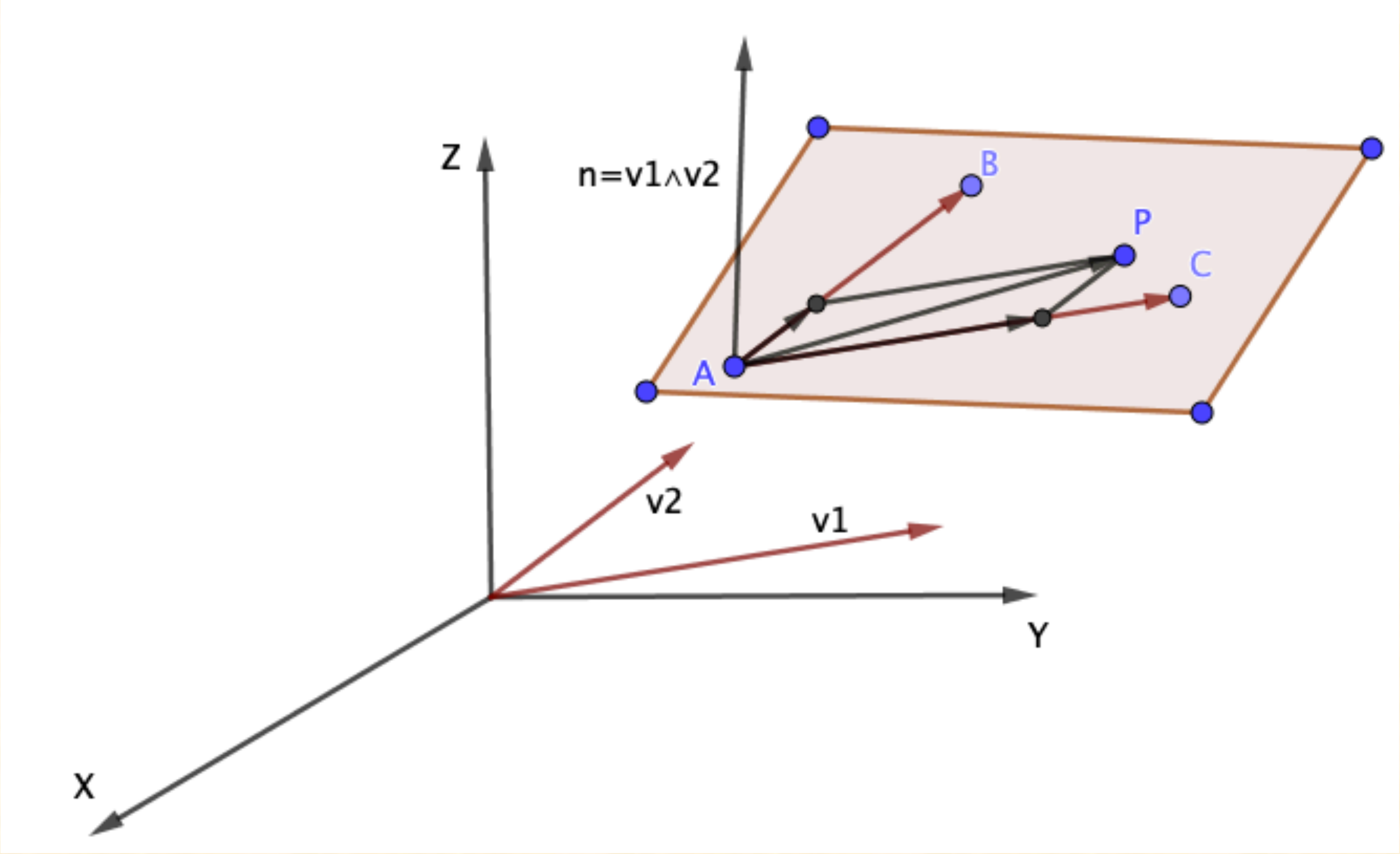
$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$

$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$,

com $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

Plano determinado **por um ponto** e um **vetor normal** ao plano

Dados o ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ ao plano



Exemplo: determinar uma equação do plano que passa pelo ponto A=(1,2,3) e tem vetor normal $\vec{n} = (-1,7,-2)$.

Seja β o plano determinado por A e $\vec{n}$ dados.

$$\forall\, P \in \beta,\ \text{tem-se: } < \overrightarrow{AP}, \vec{n} > = 0.\ \text{Logo,}$$

$$(x-1)(-1) + (y-2)(7) + (\mathrm{z}-3)(-2) = 0$$

$$-x + 1 + 7y - 14 - 2z + 6 = 0$$

$$\boldsymbol{-x + 7y - 2z - 7 = 0}$$

(note: coordenadas de $\vec{n}$)