

2ª Aula : Introdução de Conceitos

- Introdução
- Conceitos
 - Sistemas: * **Dinâmicos** * Estáticos
 - Dinâmica dos Sistemas
 - Modelo Físico e Modelo matemático
 - Construção de Modelos Matemáticos
- Procedimentos de projeto
 - Análise e Síntese
- Exemplo de modelagem
 - Hipótese simplificadoras
- Sistemas Tratados na disciplina

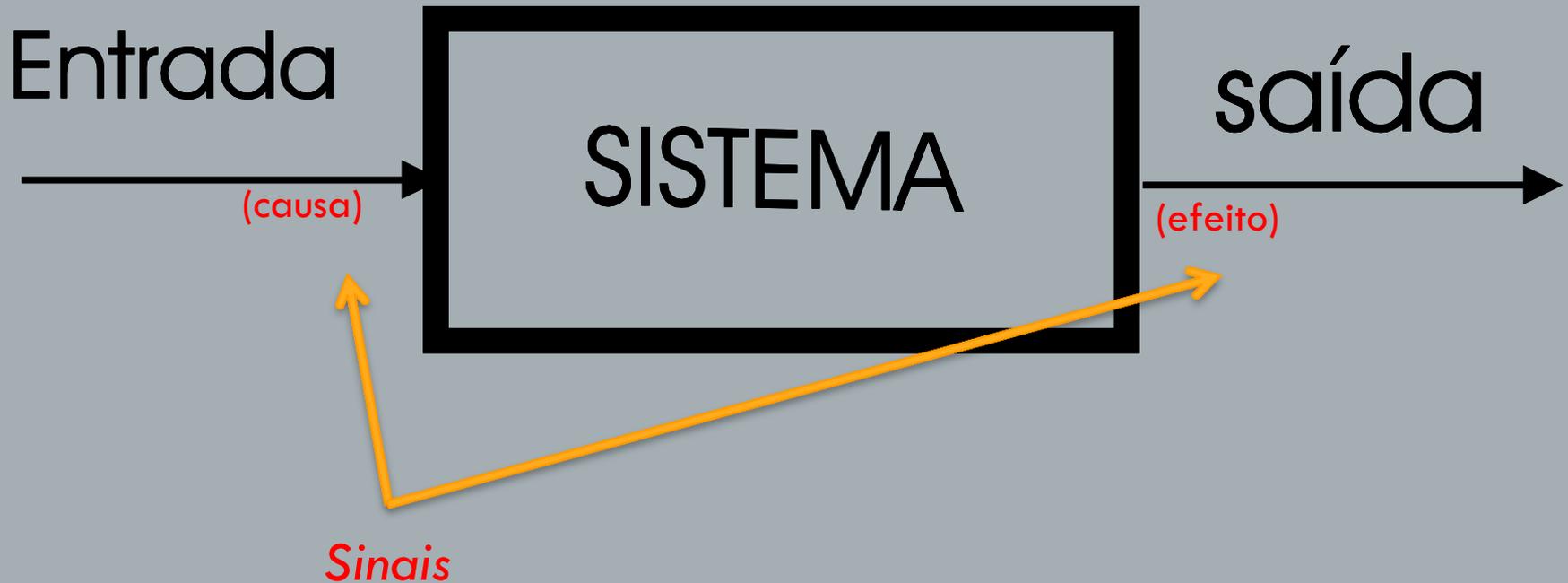
Introdução

Objetivo da disciplina: **Estudo do Comportamento de Sistemas Dinâmicos**

- Modelagem ou modelação (criação de modelos físicos e matemáticos)
- Avaliação da resposta dos sistemas (análise de desempenho ou "performance").

Esta disciplina faz parte da Dinâmica dos Sistemas. Dinâmica dos sistemas: estuda/determina o comportamento (resposta ou saídas) do sistema frente a diversas situações (causas ou entradas)

Representação Usual



Áreas de Aplicação da Disciplina

- Engenharia mecânica, elétrica, mecatrônica, mecânica dos fluídos, térmica
- Engenharia Civil e Química
- Física
- Sociologia
- Biologia (destaque: biomecânica)
- Economia/finanças
- Transporte
- Estudo populacionais e atuária
- Clima
- etc...

Definições

- **Sistema:** combinação de elementos/componentes que agem em conjunto para realizar um tarefa específica.
- **Modelo físico:** Representação simplificada, sistema imaginário que reproduza as características mais importantes do sistema real.
- **Modelo matemático:** descrição matemática dos sistemas através de equações.
- **Sistemas Dinâmicos** (nosso interesse) ou *Estáticos* (estática, mecânica dos sólidos, materiais, etc)
 - Sistemas dinâmicos são descritos por equações diferenciais (caso contínuo) ou por equações de diferenças (caso discreto).
 - Sistemas discretos: a representação é apenas disponível em instantes espaçados no tempo, como é o caso da simulação de sistemas em computadores.

Sistemas Dinâmicos

- **Contínuos**

- Equações Diferenciais
 - Não Lineares

$$\ddot{x} + (x - 1)\dot{x} + x = 0$$

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = 0$$

$$\ddot{x} - (x - 1)\dot{x} + \frac{kx}{1 - \varepsilon|x|} = 0$$

- **Lineares**

- Parâmetros Invariantes no Tempo (SLIT): Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) → Parâmetros concentrados (cada elemento tem apenas uma função):

$$\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

- Parâmetros Variáveis:

$$\ddot{x} + (1 - 2\cos t)\dot{x} + kx = 0$$

- Sistemas Lineares a parâmetros não concentrados ou sistemas lineares a parâmetros distribuídos não são objeto da disciplina. Por exemplo, uma barra de seção uniforme, onde a massa por unidade de comprimento é μ_1 , com módulo de elasticidade E e momento de inércia I em vibração é descrita precisamente pela equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \frac{\mu_1}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Sistemas Discretos: a representação é apenas disponível em instantes espaçados no tempo, como é o caso da simulação de sistemas em computadores.
 - Equação de Diferenças:
 $x(k + 1) = ax(k) + bu(k - 1)$ onde $k = 1, 2, \dots, n$
- Para sistemas Lineares vale o Princípio da Superposição (soma de efeitos).

Modelagem



- *Toda modelagem é uma aproximação.* A construção de modelos físicos e matemáticos **sempre** envolve simplificações e desconhecimentos que impedem que o sistema real seja reproduzido com perfeição total. A arte aqui consiste em obter as representações físico-matemáticas mais simples possíveis, mas que consigam se aproximar adequadamente da realidade
- **→ UMA BOA MODELAGEM É UMA SOLUÇÃO DE COMPROMISSO ENTRE SIMPLICIDADE DO MODELO E PRECISÃO DOS RESULTADOS BASEADO NO BOM SENSO DO ENGENHEIRO.**

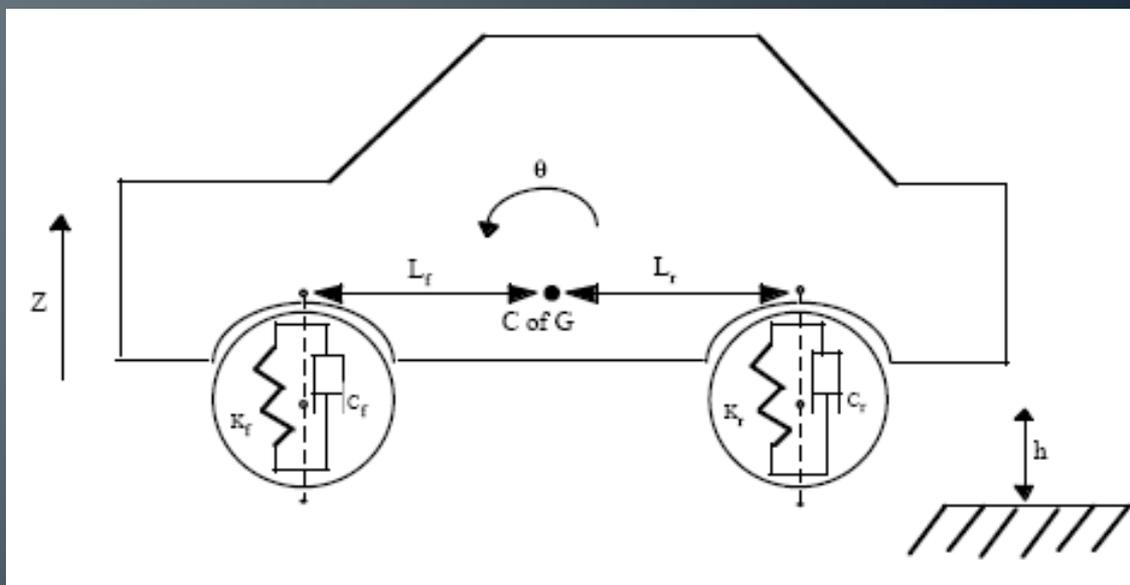
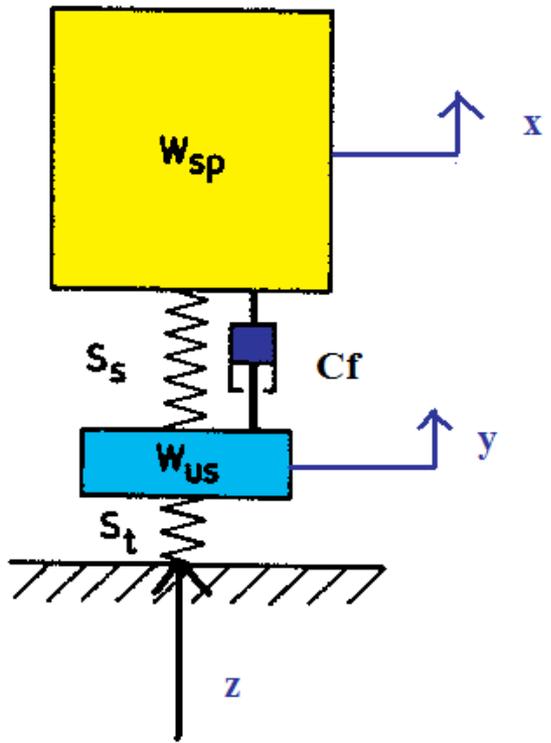
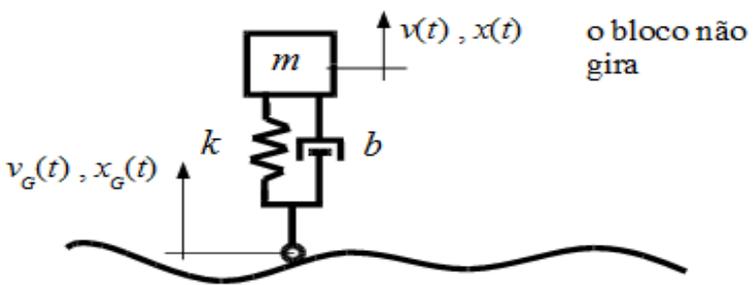
Modelagem Física

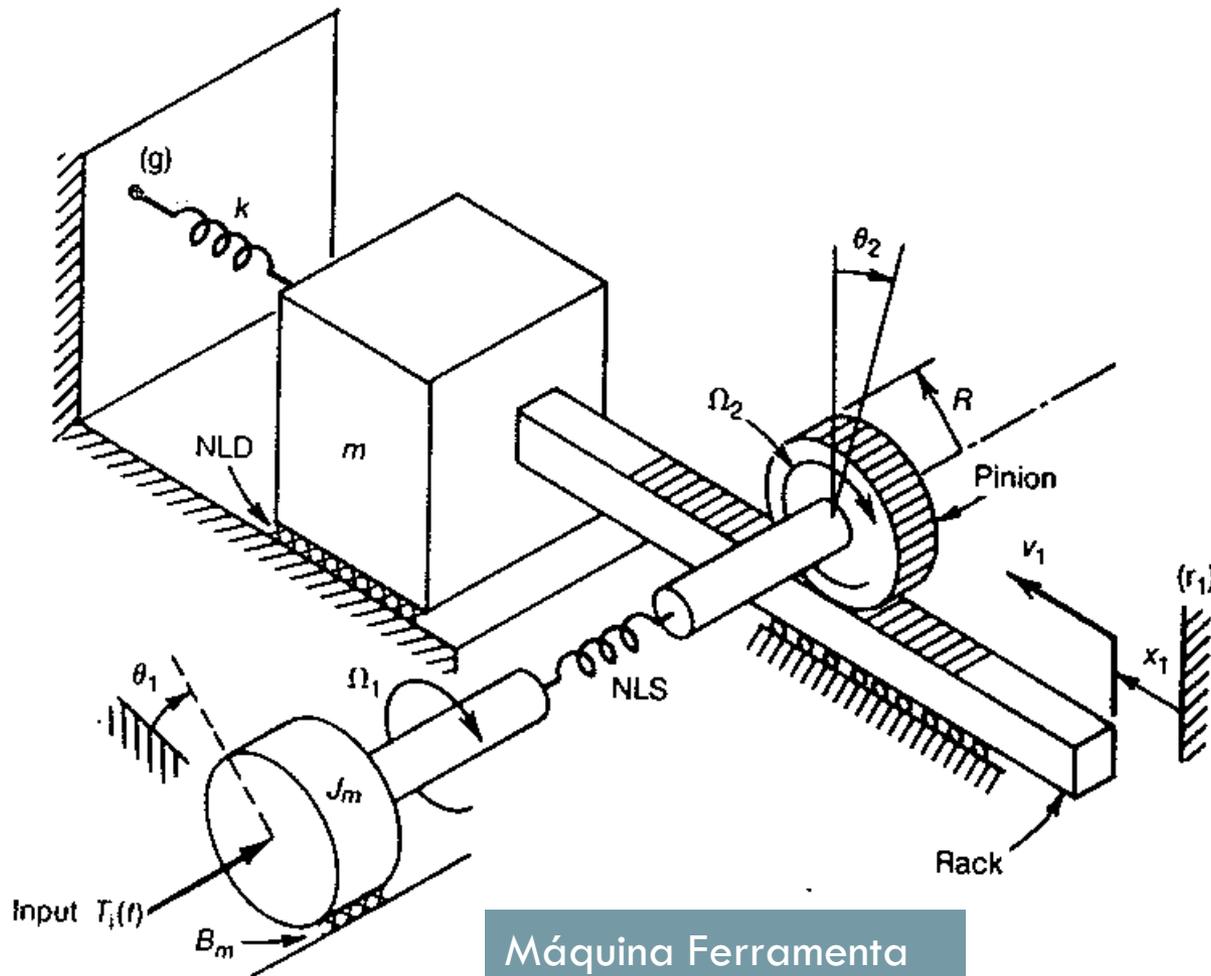
- Modelo físico: Criar um sistema imaginário que reproduza as características mais importantes do sistema real.

Ex: a) Foguete no instante do lançamento (sistema real) representado por um pêndulo invertido (modelo físico).

b) suspensão de um carro representada por $1/4$ do carro e elementos puros e lineares como massas, molas e amortecedores. Uma sofisticação para incluir os movimentos rotacionais seria trabalhar com $1/2$ carro e os elementos puros.

c) navio representado por um cubo de dimensões semelhantes as do navio, etc.



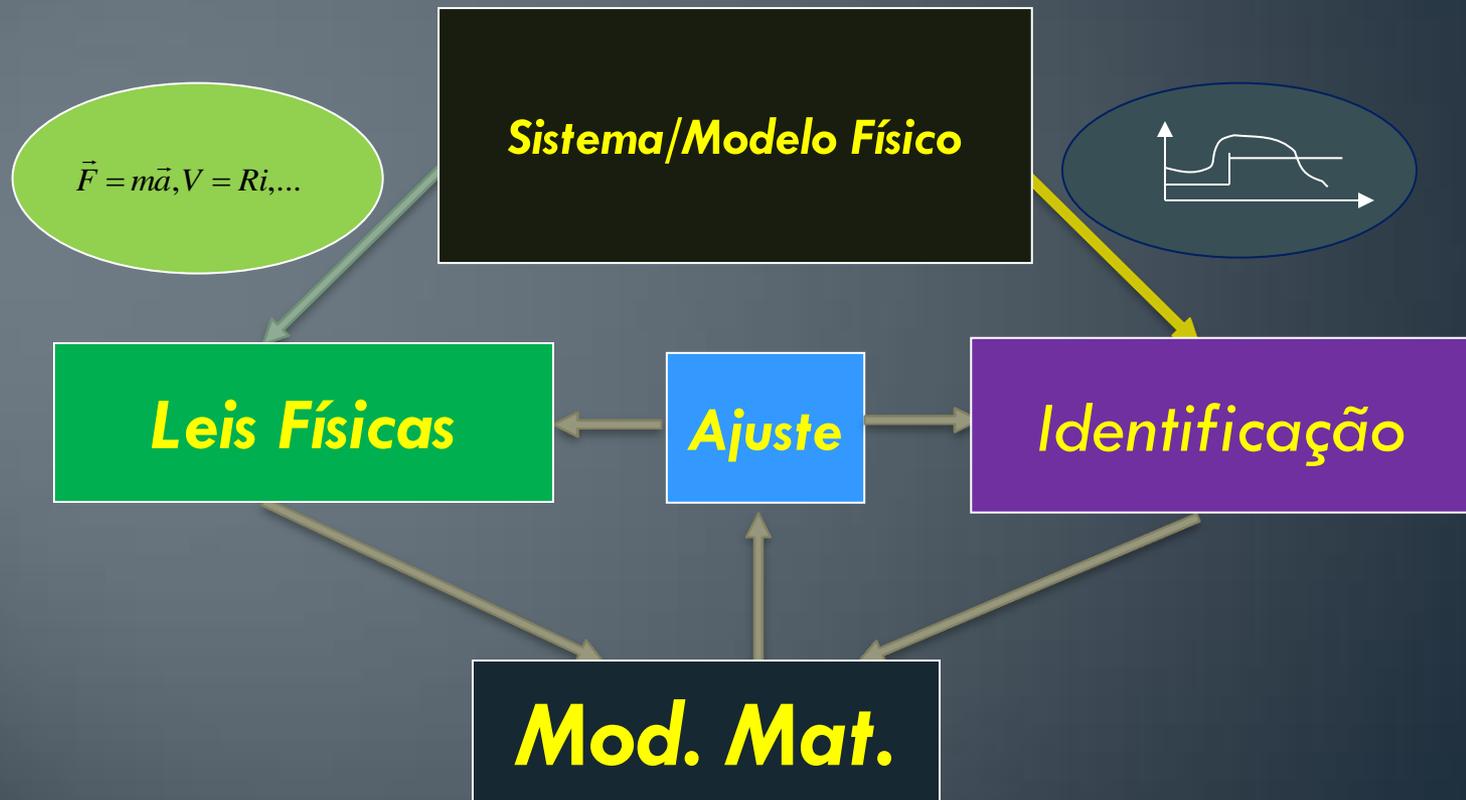


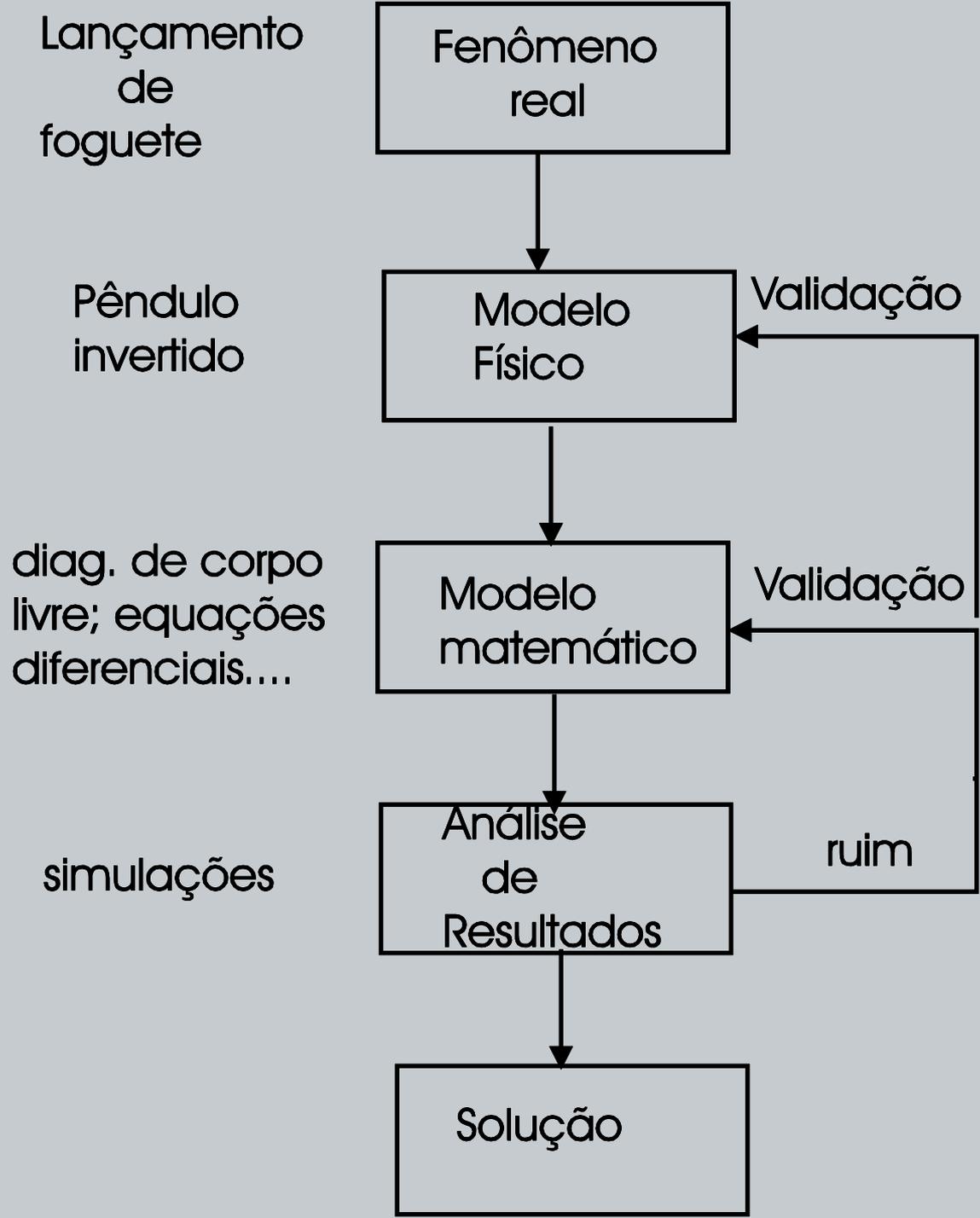
Máquina Ferramenta

Modelagem matemática:

Todo e qualquer sistema dinâmico pode ser descrito por meio de equações diferenciais ou por meio de dados provenientes de ensaios. Vamos nos ater nesta disciplina aos sistemas dinâmicos que possam ser adequadamente descritos por EDO com coeficientes constantes (SLIT). Nestes sistemas a estrutura do modelo matemático não varia no tempo e a resposta independe do instante em que a entrada é aplicada. Os modelos matemáticos podem ser obtidos através de leis físicas (teorema do Baricentro, teorema do Momento Angular, Leis de Kirchhoff, lei do balanço de massas, teorema da continuidade, lei de Lenz, etc...) ou através de experimentos e usando a técnica de IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS (não é vista nesta disciplina).

CONSTRUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS





Hipóteses e aproximações adotadas na modelagem:

- Objetivos: rapidez, redução de custo, análise aproximada ou superação de desconhecimentos de fenômenos envolvidos:

1) negligenciar pequenos efeitos ou fenômenos secundários:

Exemplos:

- a) uso de elementos puros (ex: mola com massa \rightarrow mola sem massa + massa rígida)
- b) em movimento de satélites desprezar a pressão solar, campo magnético, ou campo gravitacional solar;
- c) cor em veículo, quando não se tratar do sistema de ar condicionado, etc.

2) admitir que o ambiente externo não é afetado pelo sistema

3) **substituir parâmetros distribuídos** (que exigem equações diferenciais parciais) por **parâmetros concentrados** (EDO).

Ex: Viga com massa distribuída em vibração, admitir uma vibração oscilatória numa frequência ω :

$$y(x,t) = y(x) \text{sen} \omega t \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\mu_1}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{\mu_1 \omega^2 y}{EI}$$

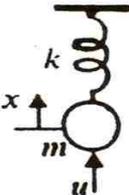
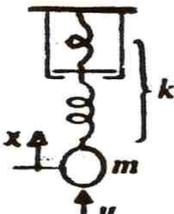
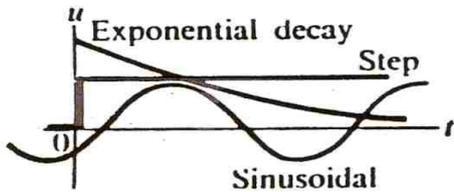
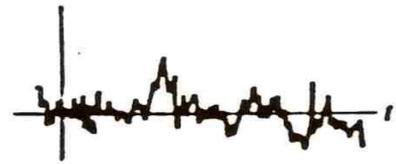
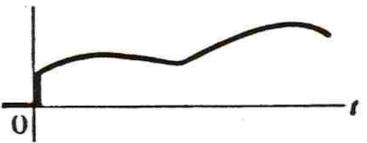
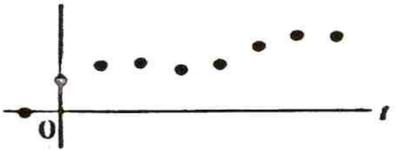
4) **admitir relações lineares** de causa e efeito (proporcionalidade da resposta em relação a entrada)

5) **parâmetros fixos** quando na verdade eles variam

Ex: aviões (rígidos), foguetes (massa cte), amortecedores (viscosidade cte), efeitos parasitas...

6) **negligenciar incertezas** nos parâmetros e/ou na estrutura do modelo

7) **negligenciar ruídos** e outros efeitos secundários menos relevantes

(a)	<p>Linear system</p>  <p>Mass m and spring constant k independent of applied force u and displacement x</p>	<p>Nonlinear system</p>  <p>k depends on x</p> <p>pouco</p>
(b)	<p>Lumped-parameter system</p> <p>parâmetros concentrados</p>  <p>Rigid mass and massless spring</p>	<p>Distributed-parameter system</p>  <p>Spring with mass</p> <p>não</p>
(c)	<p>Stationary system</p> <p>Invariantes</p>  <p>m and k time invariant</p>	<p>Nonstationary system</p>  <p>Leak</p> <p>m changing with time</p> <p>não</p>
(d)	<p>Deterministic variable</p>  <p>Exponential decay Step Sinusoidal</p>	<p>Random variable</p>  <p>pouco</p>
(e)	<p>Continuous data</p> 	<p>Sampled data</p> <p>discretos</p> 
f)	Sistemas causais (só respondem depois atuados)	

Projeto

- O **objetivo** do Projeto é criar um sistema que realize uma certa tarefa, por exemplo, transportar 500 pessoas rapidamente. Há, é claro, diversas soluções: trens, aviões (Boeing, Airbus), etc. Não é um procedimento direto e envolve tentativas e erros. Envolve a espiral de projeto, que é um procedimento de refinamento de uma solução inicial tentativa.
- Geralmente um projeto deve satisfazer às **Especificações**, estabelecidas por um comprador ou um dono.

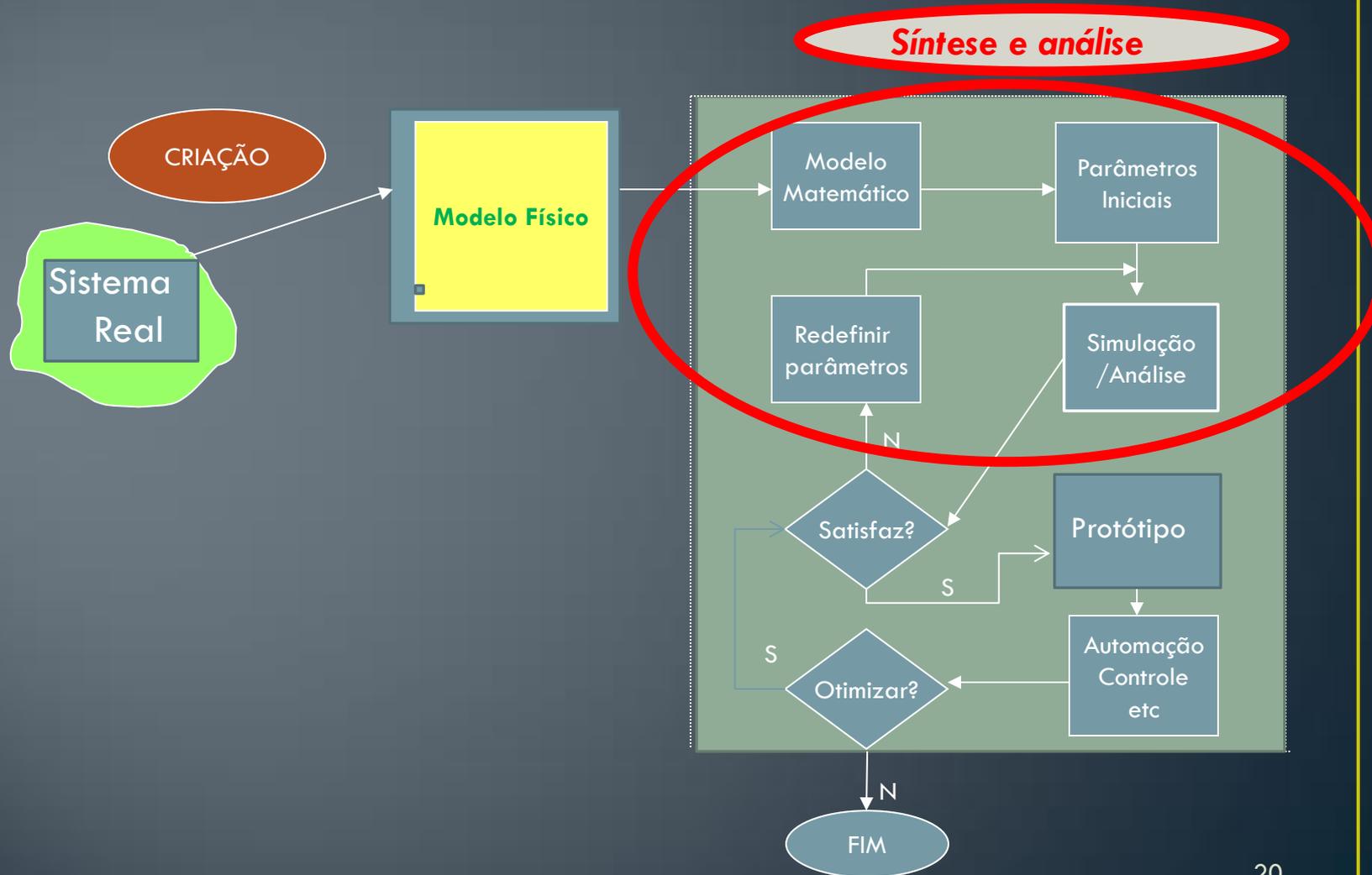
Exemplo:

-transportar 500 pessoas, custo mais baixo possível, confiabilidade, manutenção, manobrabilidade, autonomia, etc....

Procedimento de Projeto:

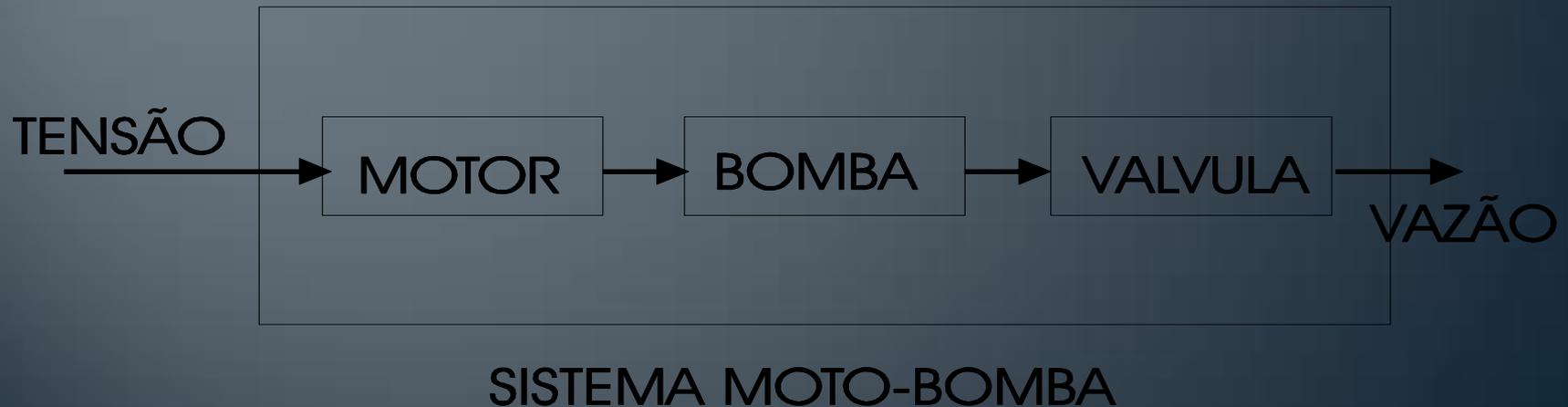
- 1. Conhecimento de **especificações** e de **elementos do sistema**.
 - **Custo; Confiabilidade, Espaço; Peso; Manutenção**
 - Durabilidade, facilidade de uso**
- 2. **Técnicas de síntese** → criação de modelos (físicos e matemáticos).
- 3. Solução para o modelo matemático
- 4. Simulação em computador (introdução de distúrbios, ruídos e diferentes entradas ou condições de operação)
- 5. Refinamento: **análise** → modificações → nova síntese → reinício do processo
- 6. Prototipagem (satisfazer o modelo matemático)
- 7. Construção em escala real.

Projeto



Síntese

- O objetivo aqui é criar um modelo matemático do sistema. É um procedimento puramente matemático onde busca-se criar um procedimento explícito para satisfazer às especificações. Assim, seus componentes, ligações, interações e influência externa, ficarão bem estabelecidas ao final deste estágio.



Análise

O objetivo aqui é avaliar o comportamento de um sistema através de um modelo matemático.

Envolve: variação de parâmetros, inclusão e exclusão de variáveis, solução do sistema e comparação com dados reais. Aqui aplicam-se métodos computacionais e analíticos que geralmente independem do tipo de sistema físico.

Ex: funções de transferências, gráficos de Bode, posição das raízes de polinômios, etc...

Exemplo: estudo de slosh (choque de líquido em movimento em tanque)



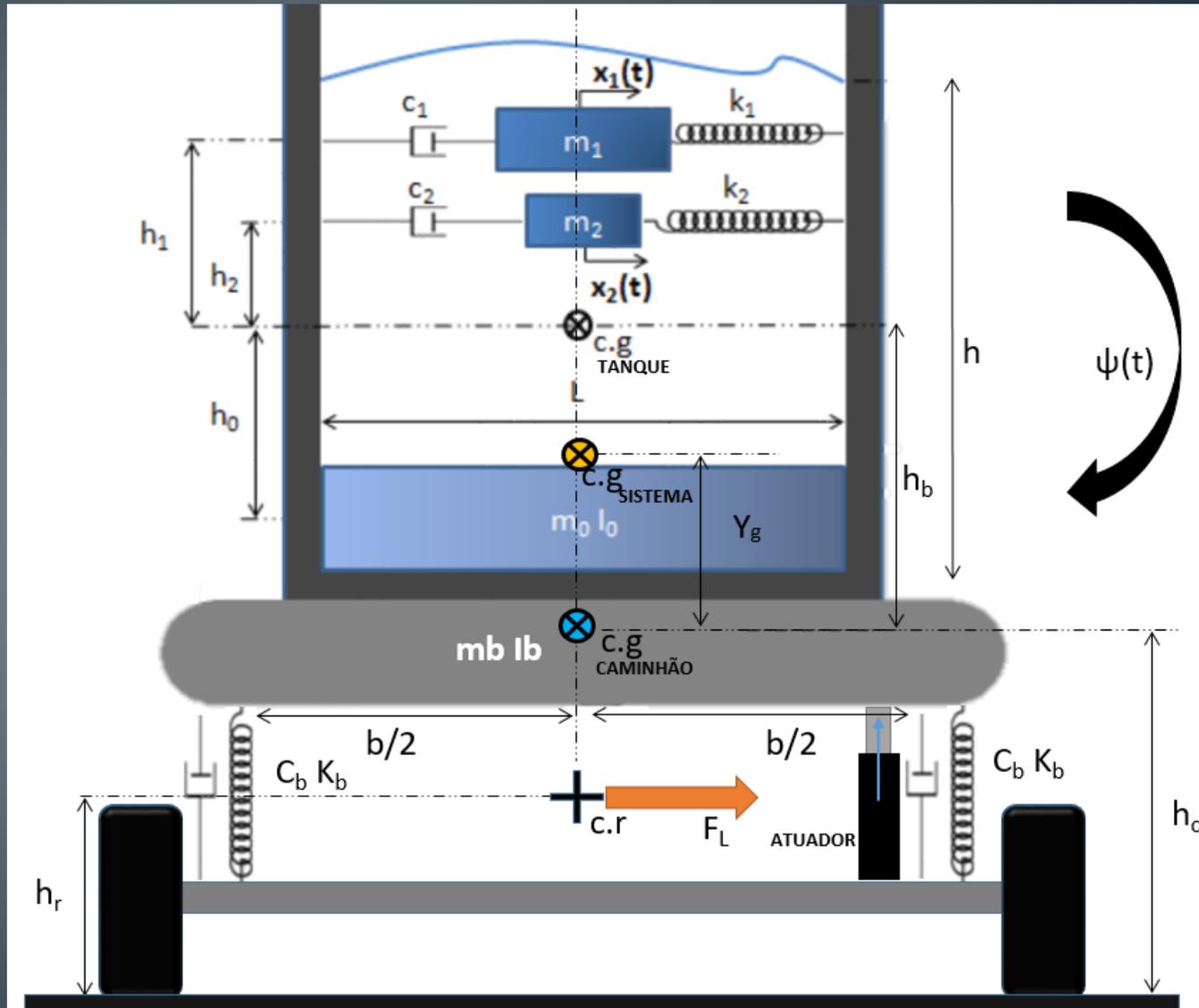
Exemplo: estudo de slosh

Parâmetros de Modelagem

- Número de suspensões : 6
- Constante de rigidez média (N/s)
- Constante de amortecimento média (N.s/m)
- Massa suspensa (Kg)
- Altura do baricentro (m)
- Centro de Rolagem (m)
- Momento de inércia na direção de interesse (kg/m^2)
- Distância entre suspensões (m)
- Largura da base (m)
- Comprimento da base (m)
- Altura do tanque (m)
- Rigidez a rolagem equivalente (N.m/rad)

- Constante de amortecimento equivalente (N.m.s/rad)
- Volume máximo do tanque (m^3)
- Massa máxima de água (Kg):

Exemplo de modelo físico: slosh



Modelo matemático: slosh



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \psi \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$[M]\vec{\ddot{x}} + [C]\vec{\dot{x}} + [K]\vec{x} = [E_c]\vec{c} + [E_d]\vec{d}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} I_{tot} & m_1 \cdot (h_1 + h_b + h_c - h_r) & m_2 \cdot (h_2 + h_b + h_c - h_r) \\ m_1 \cdot (h_1 + h_b + h_c - h_r) & m_1 & 0 \\ m_2 \cdot (h_2 + h_b + h_c - h_r) & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{eq} & -g \cdot m_1 & -g \cdot m_2 \\ -g \cdot m_1 & k_1 & 0 \\ -g \cdot m_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$[E_c] = \begin{pmatrix} b \\ \frac{2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{c} = F_{atuação}$

$$[E_d] = \begin{pmatrix} -m_{tot} \cdot V^2 \cdot (h_c - h_r + Y_g) \\ -m_1 \cdot V^2 \\ -m_2 \cdot V^2 \end{pmatrix}$$

$\vec{d} = Curv$

$$Curv = \frac{1}{R}$$

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

Modelo - Pantógrafo

Modelo Linearizado

- Sistema massa-mola - amortecedor
- 3 graus de liberdade

