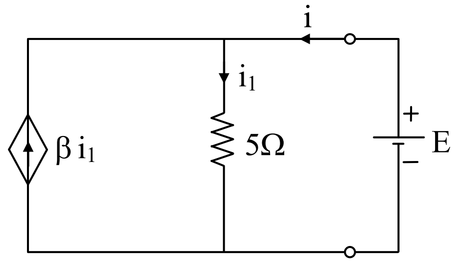
PSI3211 – CIRCUITOS ELÉTRICOS I

Solução dos Exercícios Complementares correspondentes à Matéria da 3ª Prova

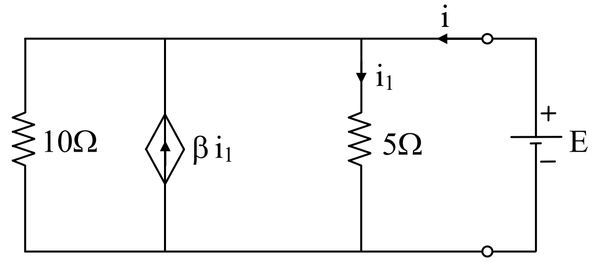
1 – a) $i_L(0_-) = 0$ (não há geradores independentes)
Resistência equivalente vista pelo indutor:



$$\left.\begin{array}{l} i = i_1 - \beta i_1 \\[2ex] i_1 = \dfrac{E}{5} \end{array}\right\} \; i = \frac{E}{5} - \beta\frac{E}{5} = \left(1-\beta\right)\frac{E}{5}$$

$$\Rightarrow \; R_{eq} = \frac{5}{1-\beta} > 0 \quad \text{se} \quad \beta > 1$$

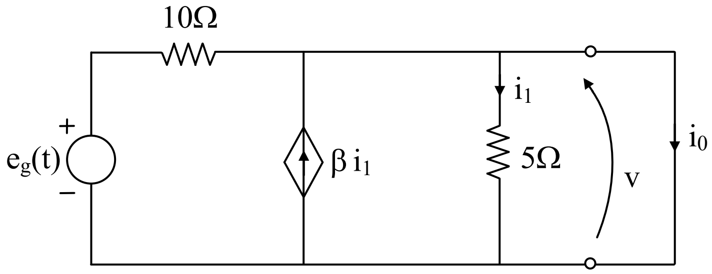
b) $t > 0$: R_0



$$i = \frac{E}{5} + \frac{E}{10} - \beta\frac{E}{5} = \frac{3-\beta}{10}\,E$$

$$\Rightarrow \; R_0 = \frac{E}{i} = \frac{10}{3-\beta}\,(\Omega)$$

Corrente de curto-circuito:



$$v = 0 \;\Rightarrow\; i_1 = 0$$

$$\Rightarrow \; i_0 = \frac{e_g}{10\Omega}$$

$$\therefore \; e_0 = i_0 . R_0 = \frac{e_g}{3-\beta}$$

c) $$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{2\left(3-\beta\right)}{10} = \frac{3-\beta}{5}\left(s\right)$$

d) Solução particular (regime)

$$\hat{I}_L = \underbrace{\frac{\sqrt{2}.20\,\underline{/90^\circ}}{3}}_{\hat{E}_g \text{ para } \beta = 0} . \frac{1}{R_0 + j\omega.L} = j\,\frac{20\sqrt{2}}{3} . \frac{1}{\dfrac{10}{3} + j.\dfrac{10}{3}} = \frac{j\,2\sqrt{2}}{1+j} = 2\,\underline{/45^\circ}$$

$$\Rightarrow \; i_{L,p}\left(t\right) = 2\cos\left(\frac{5}{3}\,t + 45^\circ\right) \quad \left(A,s\right)$$

$$\tau = \frac{3}{5} \quad \text{para} \quad \beta = 0$$

$$i_L(t) = A\,e^{-\frac{5t}{3}} + 2\cos\left(\frac{5}{3}t + 45^o\right), \quad t \geq 0, \quad (A, s)$$

$$i_L(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -2\cos(45^o) = -\sqrt{2}$$

2 – a) Inativando o gerador $\Rightarrow$ RLC série

$$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b) $i_C(t) = i_s(t) - i_L(t)$
$v_L(t) = v_C(t) + R_2\,[\,i_s(t) - i_L(t)\,] - R_1 i_L(t)$
$v_L(0) = v_C(0) + R_2\,i_s(0) - (\,R_1 + R_2\,)\,i_L(0)$

c) $$\left.\frac{d\,v_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_s(0) - i_L(0)}{C} = \frac{1\,m - 0}{2{,}5\,\mu} = 400 \text{ V/s}$$

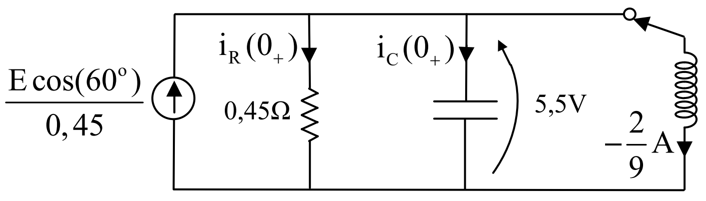
$v_C(0) = 0$
$v_p(t) = R_1\,i_s(t) \quad \rightarrow \quad v_p(0) = R_1\,i_s(0) = 4\text{ k}\Omega\,.\,1\text{ mA} = 4\text{ V}$

$$\frac{d\,v_p}{dt}(0) = 0; \qquad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 66{,}14 \text{ rad/s}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= v_C(0) - v_p(0) = -4 \\ b &= \frac{d\,v_C}{dt}(0) - \frac{d\,v_p}{dt}(0) = 400 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} V &= 4{,}276 \\ \psi &= -159{,}29^o \end{aligned}$$

$$v_C(t) = 4{,}276\,e^{-75\,t}\cos(\,66{,}14\,t - 159{,}29^o\,) + 4\text{ V}, \quad t \geq 0, \quad (V, s)$$

3 – a) Fazendo uma transformação de fontes, em $t = 0_+$ o circuito se reduz a



Assim,

$$i_R(0_+) = \frac{5{,}5}{0{,}45} = 12{,}2222 \text{ A}$$

$$i_C(0_+) = C\left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{1}{9}(-18) = -2 \text{ A}$$

$$\frac{E}{0{,}9} = 12{,}222 - 2 - \frac{2}{9} \Rightarrow E = 9 \text{ V}$$

b) Inativando-se o gerador de tensão, verifica-se que se trata de um circuito RLC paralelo. Portanto,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(0,45)(1/9)} = 10 \text{ s}^{-1}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}}} = 6 \text{ rad/s.}$$

Como $\alpha > \omega_0$, o comportamento livre do circuito será superamortecido com FCPs iguais a $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2$ e $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -18$.

Para obter a resposta completa ainda precisamos calcular

$$\begin{aligned} a &= v(0_+) - v_p(0_+) = 5,5 + 9\cos(60^o) = 5,5 - 4,5 = 1 \\ b &= \dot{v}(0_+) - \dot{v}_p(0_+) = -18 + 9 \times 6\text{sen}(60^o) = 28,7654 \end{aligned}.$$

Da Apostila de Circuitos de Segunda Ordem, temos

$$v(t) = \frac{s_2 a - b}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{-s_1 a + b}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} + v_p(t)\,.$$

Substituindo os valores, chega-se a

$$v(t) = 2,92e^{-2t} - 1,92e^{-18t} + 9\cos(6t + 60^o),\ \text{para } 0 \le t \le 0,5 \text{ s}\,,\ (\text{V, s})$$

c) Depois da mudança da chave, o indutor passa a fazer parte de um circuito de primeira ordem com constante de tempo $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0,25}{0,5} = \frac{1}{2}$s.

Em regime, o indutor tende para um curto-circuito e sua corrente será

$$i_L(\infty) = \frac{5}{0,5} = 10\text{A}\,.$$

Assim a expressão para a corrente do indutor para $t \ge 0,5$s será

$$i_L(t) = Ae^{-2(t-0,5)} + 10.$$

Como $i_L(1,5) = 8$A, podemos encontrar o valor da constante A:

$$8 = Ae^{-2} + 10 \Rightarrow A = -2e^2 = -14,78.$$

Portanto a expressão da corrente no indutor se reduz a

$$i_L(t) = -14,78e^{-2(t-0,5)} + 10,\quad t \ge 0,5 \text{ s}\,.$$

Substituindo $t = 1$ s na expressão acima, obtemos:

$$i_L(1) = -14{,}78e^{-1} + 10 = 4{,}56\text{A} .$$

Testes

1 – No circuito da Figura 4, o capacitor está inicialmente descarregado. A chave S fecha em $t = 0$. Qual deve ser o valor de C para que $v_C(t)$ atinja 4 V em exatamente 1 ms ?

a) $1/\ell n(1{,}25)$ F
b) $1/\ell n 5$ μF
c) $\ell n 5$ F
d) $1/\ell n(1{,}25)$ μF
e) n.d.a.

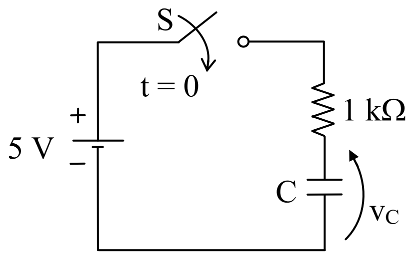


Figura 4

Resolução: $v_C(t) = 5\,(1 - e^{-t/\tau})$, $\tau = RC$

$$4 = 5\left(1 - e^{-10^{-3}/\tau}\right) \qquad 0{,}8 = 1 - e^{-10^{-3}/\tau}$$

$$e^{-10^{-3}/\tau} = 0{,}2$$

$$-\frac{10^{-3}}{\tau} = \ell n(0{,}2) \Rightarrow \frac{10^{-3}}{\tau\,\ell n 5} = 1$$

$$\tau = \frac{10^{-3}}{\ell n 5} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{10^{-6}}{\ell n 5}$$

2 – Para o circuito da Figura 5, sabe-se que $i_L(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right) - e^{-3/2\,t}$, $t \geq 0$. A tensão $e_g(t)$ do gerador deve ser :

a) 0
b) $2e^{-3/2\,t}$
c) $3\sqrt{2}\cos\left(\frac{3t}{2} + 45^{o}\right)$
d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)$
e) n.d.a.

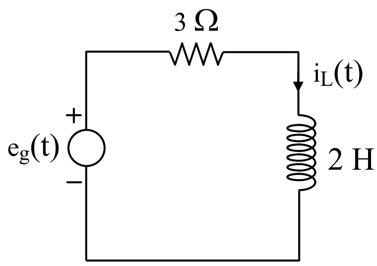


Figura 5

Resolução:

$$e_g(t) = R\,i_L(t) + L\frac{di_L}{dt} = 3\cos\left(\frac{3}{2}t\right) \cancel{- 3e^{-\frac{3}{2}t}} +$$

$$+ 2\left(-\frac{3}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) \cancel{+ 2.\frac{3}{2}e^{-(3/2)t}}$$

$$\Rightarrow e_g(t) = 3\cos\left(\frac{3}{2}t\right) - 3\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) \qquad \hat{E}_g = 3 + j3 = 3\sqrt{2}\,\angle 45^{o}$$

$$\Rightarrow e_g(t) = 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}t + 45^{o}\right)$$

3 – Para o circuito da Figura 6, se $i_g(t) = 0{,}2\,\delta(t)$ (A, s), $v_C(0_-) = -1$ V, $i_L(0_-) = 0{,}5$ A, R = 1 Ω, L = 0,2 H, C = 0,05 F, então $v_C(0_+)$ e $i_L(0_+)$ valem, respectivamente:

a) – 1 V e 0,7 A
b) 4 V e 0,5 A
c) 3 V e 0,5 A
d) – 1 V e 1,5 A
e) n.d.a.

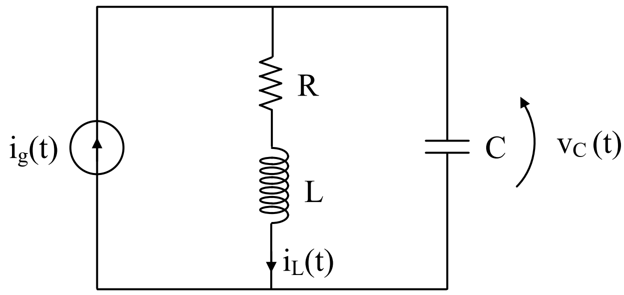


Figura 6

<u>Resolução:</u>
O impulso irá adicionar instantaneamente a carga de 0,2 C ao capacitor.

Portanto, $v_C(0_+) = v_C(0_-) + \dfrac{0{,}2}{C}$

$$v_C(0_+) = -1 + \frac{0{,}2}{0{,}05} = 3\,\text{V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0{,}5\,\text{A}$$

4 – No circuito da Figura 7, $e_s(t)$ é uma onda quadrada com patamares 0 V e 1 V, e período 2 s. A forma de onda de v(t) está representada na Figura 8. Se este circuito está ligado há muito tempo, qual é o valor mínimo aproximado de v(t), ou seja, v_m?

a) 0,314 V
b) 1 V
c) 0,54 V
d) 0,27 V
e) n.d.a.

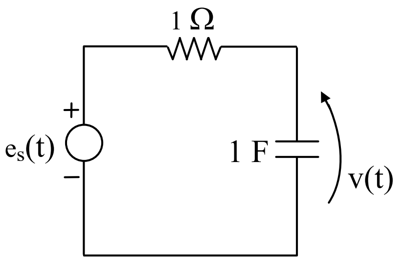


Figura 7

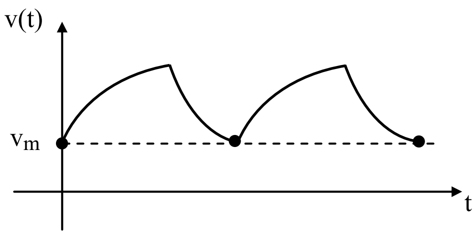


Figura 8

<u>Resolução</u>:

A curva v(t) tem 2 trechos:

$v_1(t) = (v_m - 1)\,e^{-t} + 1 \;\rightarrow$ em t = 0 vale v_m e tende a 1 V correspondendo à carga completa do capacitor.

$v_2(t) = \underbrace{[\,(v_m - 1)\,e^{-1} + 1\,]}_{\text{valor máximo, calculado por } v_1(1s)} . \, e^{-(t-1)} \;\rightarrow$ em t = 0 vale $v_1(1s)$ e tende a 0 V

Agora é só impor que $v_2(2s)$ seja igual a v_m:

$$[\,(v_m - 1)\,e^{-1} + 1\,] . e^{-1} = v_m \;\Rightarrow\; v_m\,e^{-1} - v_m\,e = e^{-1} - 1$$

$$\Rightarrow\; v_m = \frac{e^{-1} - 1}{e^{-1} - e} \cong 0{,}27\ \text{V}$$

5 – Ainda no circuito da Figura 7, considere $e_s(t) = 0$ (o gerador foi trocado por um curto) e sendo $v(0) = 0{,}6$ V, determine o intervalo de tempo (aproximado) para que metade da energia armazenada no capacitor seja dissipada:

a) 1 s
b) 0,54 s
c) 0,35 s
d) 0,21 s
e) n.d.a.

Resolução: Neste caso $v(t) = 0{,}6\, e^{-t}$

$$E_{cap} = \frac{C\,v^2}{2} = \frac{1}{2}\left(0{,}6\,e^{-t}\right)^2 = 0{,}18\,e^{-2t}\ \text{J}$$

$$0{,}18\,e^{-2t} = \frac{0{,}18}{2} \Rightarrow e^{-2t} = \frac{1}{2} \Rightarrow t \cong 0{,}346$$

Para os **testes 6 e 7** considere o circuito da Figura 9, em que a chave está fechada há muito tempo e abre em t = 0.

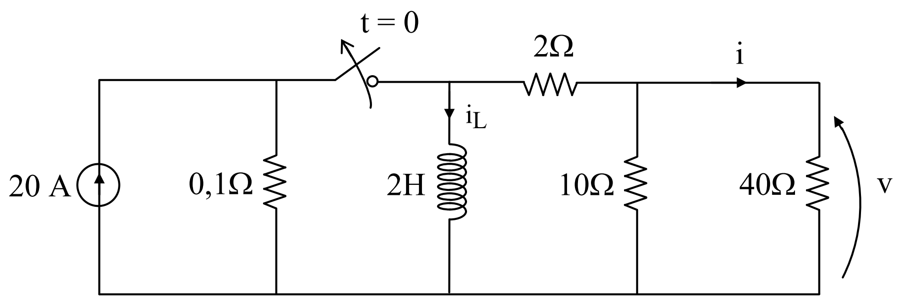


Figura 9

6 – A expressão de i_L para $t \geq 0$ é:

a) $12\, e^{-3t}$
b) $20\, e^{-5t}$
c) $10\, e^{-12t}$
d) $16\, e^{-8t}$
e) n.d.a.

Resolução: Com a chave fechada há muito tempo, o indutor é um curto e $i_L(0_-) = 20$ A. Logo após a abertura da chave a corrente do indutor não sofre descontinuidade, pois não há impulso de tensão atuando sobre ele. Assim, $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 20$ A. Com a chave aberta, o circuito com o indutor está livre, ou seja, sem atuação da fonte independente de corrente. Logo, a resposta completa da corrente será

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-t/\tau} \text{ para } t \geq 0,$$

em que $\tau = \dfrac{L}{R_{eq}}$ e R_{eq} é a resistência "vista" pelo indutor, dada por

$$(10\ \Omega\ //\ 40\ \Omega + 2\ \Omega) = 10\ \Omega.$$

Logo, $\tau = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$ s. Portanto, $i_L(t) = 20e^{-5t}$ para $t \geq 0$.

7 – O valor de v logo após a abertura da chave (em V) é:

a) –160
b) –120
c) –140
d) –100
e) n.d.a

Resolução: Logo após a abertura da chave, $i_L(0_+) = 20$ A. Portanto, a queda de tensão v será igual à queda de tensão sobre a associação 10 Ω // 40 Ω devida à corrente $i_L(0_+)$: $v = -(10//40)\, i_L(0_+) = -8 \cdot 20 = -160$ V.

8 – Considere o circuito da Figura 10 com condição inicial $v(0_-) = 1$ V e excitação $e_s(t) = 2\delta(t)$ (V,s). A condição inicial $v(0_+)$, em V, vale:

a) 9/5
b) 6/5
c) 1
d) 4/5
e) n.d.a.

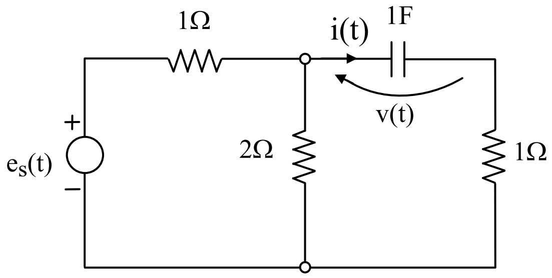


Figura 10

Resolução: Para efeitos de impulso, vamos considerar que o capacitor é um curto-circuito. Assim, quando o impulso atua, a corrente i(t) valerá

$$i = 2\,\delta(t)\frac{2/3}{1+(2/3)} = \frac{4}{5}\delta(t) \;\Rightarrow\; i = C\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{4}{5}\delta(t).$$

Integrando os dois lados da equação acima de 0_- a 0_+, temos

$$v(0_+) - v(0_-) = \frac{4}{5} \;\Rightarrow\; v(0_+) = v(0_-) + \frac{4}{5} = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}\ \text{V}.$$

9 – Para o circuito da Figura 11, o coeficiente de amortecimento α vale :

a) $R/2L$
b) $1/2RC$
c) R/L
d) $1/LC$
e) n.d.a.

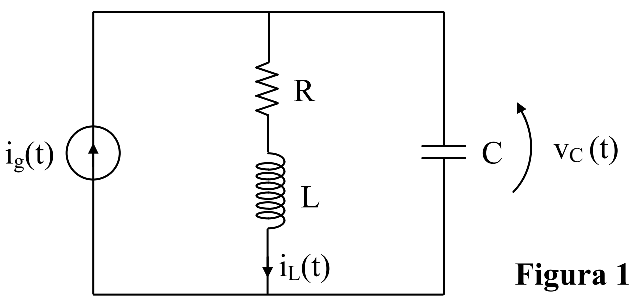


Figura 11

Resolução: Com o gerador inativado, temos um circuito

RLC série $\Rightarrow \alpha = \dfrac{R}{2L}$

Para os **testes 10, 11 e 12**, considere os circuitos das Figuras 12 e 13.

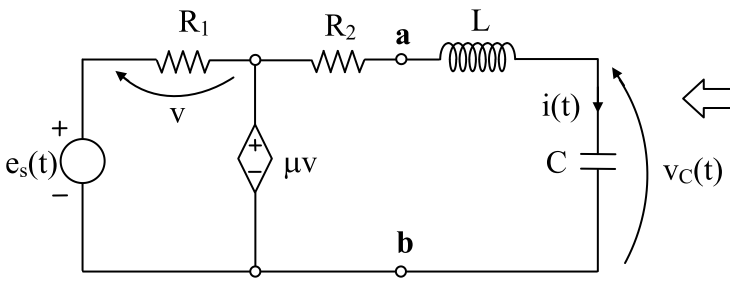


Figura 12

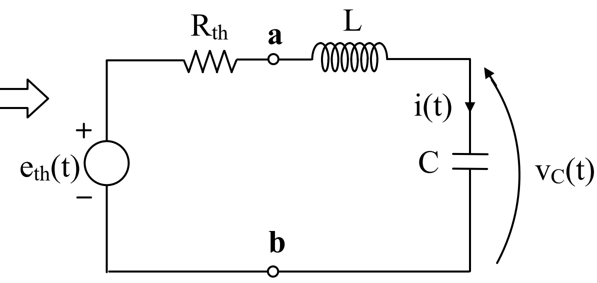


Figura 13

O circuito "visto" pelos elementos reativos (L e C) da Figura 12 é simbolicamente mostrado na Figura 13.

10 – Os valores de α e ω_0^2 são expressos em termos dos parâmetros do circuito da Figura 12, respectivamente, como:

a) $\dfrac{R_1 + R_2}{2L}$, $\dfrac{1}{LC}$

b) $\dfrac{R_2}{2L}$, $\dfrac{1}{LC}\;\dfrac{\mu}{\mu+1}$

c) $\dfrac{R_1 + R_2}{2L}$, $\dfrac{1}{LC}\;\dfrac{\mu}{\mu+1}$

d) $\dfrac{R_2}{2L}$, $\dfrac{1}{LC}$

e) n.d.a.

Resolução:

Tensão V_{AB} em aberto : $e_0 = \dfrac{\mu}{\mu + 1} e_s$

Corrente I_{AB} em curto : $i_0 = \dfrac{\mu}{\mu + 1} \dfrac{e_s}{R_2}$

$R_{th} = R_2 \rightarrow \alpha = \dfrac{R_2}{2L}$ $\qquad \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

11 – Considerando o circuito da Figura 13 com $i(0_-) = 2A$, $v_c(0_-) = 10V$, $L = 0{,}5H$, $C = 20$ mF, e uma excitação $e_{th}(t) = 5\,\delta(t)$ (V,s), os valores de $i(0_+)$ e de $v_C(0_+)$ são, respectivamente:

a) 12 A e 10 V
b) 2 A e 10 V
c) 2 A e 260 V
d) 12 A e 260 V
e) n.d.a.

Resolução: $v_C(0_+) = v_C(0_-) = 10$ V

$$i(0_+) = i(0_-) + \frac{5}{0{,}5} = 12A$$

12 – Supondo agora $R_{th} = 10\ \Omega$ e as demais condições do teste 11, o valor de $\dfrac{di}{dt}\left(t = 0_-\right)$

em (A/s) é igual a:

a) – 10
b) – 20
c) – 40
d) – 60
e) n.d.a.

Resolução:

$$R_{th} - i\left(0_-\right) + L \left.\frac{di}{dt}\right|_{0_-} + v_C\left(0_-\right) = 0$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{0_-} = \frac{-10.2 - 10}{0{,}5} = -60\ A/s$$