

# PSI3211 – Circuitos Elétricos I – Aula 21

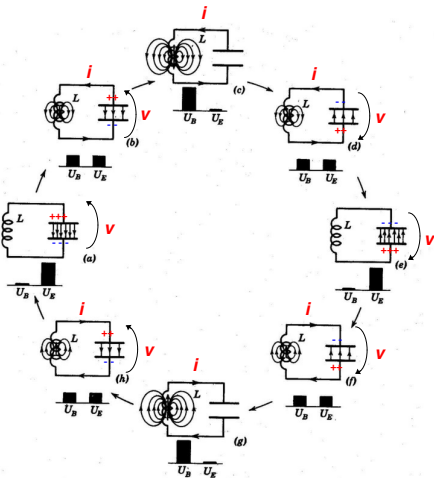
Magno T. M. Silva

Escola Politécnica da USP

Junho de 2017

Vários desses slides foram inspirados nas transparências da  
Profa. Denise Consonni

# Circuito LC ideal

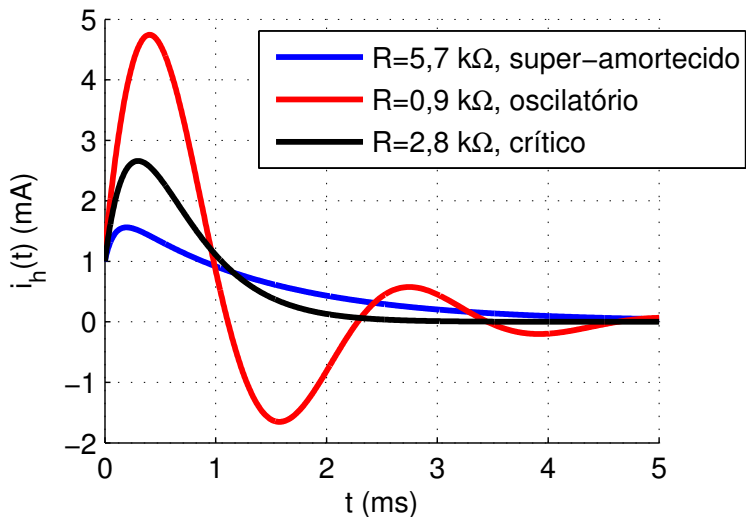


Ciclo de frequência:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

## Comportamento livre, RLC série

R,L,C série, livre,  $i_0=1\text{mA}$ ,  $v_0=-10\text{V}$ ,  $L=0,5\text{H}$ ,  $C=0,25\mu\text{F}$



## Equação diferencial de 2ª ordem

Todo circuito linear de 2ª ordem pode ser descrito por uma equação diferencial do tipo [os valores de  $\alpha$ ,  $\omega_0$  e  $f_s(t)$  dependem do circuito]

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_s(t)$$

cujas equações características são dadas por

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

As raízes dessa equação são as frequências complexas próprias do circuito, dadas por

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- ▶  $\alpha$ : fator de amortecimento
- ▶  $\omega_0$ : frequência própria não amortecida

## Resposta completa – Super-amortecido

Neste caso,  $s_1 \neq s_2$  e ambas são reais. A resposta completa é dada por

$$x(t) = \frac{s_2 a - b}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{-s_1 a + b}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} + x_p(t)$$

em que

$$a = x(0) - x_p(0)$$

e

$$b = \dot{x}(0) - \dot{x}_p(0)$$

## Resposta completa – Oscilatório

Neste caso,  $s_1 \neq s_2$  e são complexas conjugadas. A resposta completa é dada por

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \psi) + x_p(t)$$

em que

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (\text{freq. própria amortecida})$$

$$a = x(0) - x_p(0)$$

$$b = \dot{x}(0) - \dot{x}_p(0)$$

$$A = \sqrt{a^2 + \left( \frac{\alpha a}{\omega_d} + \frac{b}{\omega_d} \right)^2}$$

$$\psi = \text{atan2} \left( a, - \left( \frac{\alpha a}{\omega_d} + \frac{b}{\omega_d} \right) \right)$$

## Função atan2

Seja o número complexo  $a + j\gamma$

$$\text{atan2}(a, \gamma) = \begin{cases} \arctan(\gamma/a), & a > 0 \\ \arctan(\gamma/a) - \text{sinal}(\gamma/a) \cdot 180^\circ, & a < 0 \\ 90^\circ, & a = 0 \text{ e } \gamma > 0 \\ -90^\circ, & a = 0 \text{ e } \gamma < 0 \\ 0^\circ, & a = \gamma = 0 \end{cases}$$

## Resposta completa – Amortecimento crítico

Neste caso,  $s_1 = s_2$  e ambas reais. A resposta completa é dada por

$$x(t) = ae^{-\alpha t} + (b + \alpha a)te^{-\alpha t} + x_p(t)$$

em que

$$a = x(0) - x_p(0)$$

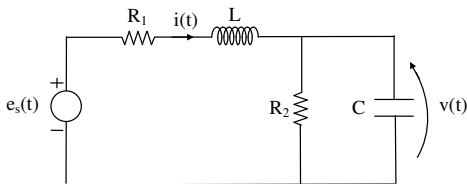
$$b = \dot{x}(0) - \dot{x}_p(0)$$



# Exercício 1

A equação diferencial em  $v(t)$  que descreve o circuito da Figura 1 é dada por

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \left( \frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C} \right) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) v(t) = \frac{1}{LC} e_s(t).$$



Dados:

$$R_1 = 5 \, \Omega$$

$$R_2 = 10 \, \Omega$$

$$L = 0,5 \, \text{H}$$

$$C = 0,01 \, \text{F}$$

$$v(0_-) = 5 \, \text{V}$$

$$i(0_-) = 0$$

**Figura 1**

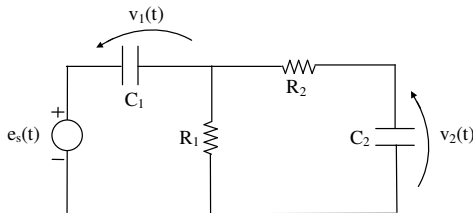
Pede-se

- Sabendo-se que em regime permanente senoidal a tensão  $v(t)$  vale  $v_p(t) = 10 \cos(10t)$ , (V,s), determine a excitação  $e_s(t)$ .
- Classifique o comportamento do circuito (super-amortecido, oscilatório ou amortecimento crítico). Justifique sua resposta.
- Determine a resposta completa de  $v(t)$  para  $t > 0$ , considerando que o circuito é excitado com  $e_s(t)$  obtido no item a).

## Exercício 2

A equação diferencial em  $v_2(t)$  que descreve o circuito da Figura 2 é dada por

$$\frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_2 C_1 C_2} \left[ C_1 + C_2 \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \right] \frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} v_2(t) = \frac{1}{R_2 C_2} \frac{de_s(t)}{dt}.$$



**Figura 2**

Dados:

$$R_1 = 1 \, \Omega$$

$$R_2 = 9 \, \Omega$$

$$C_1 = 1 \, \text{F}$$

$$C_2 = 1,9 \, \text{F}$$

$$v_1(0_-) = 5 \, \text{V}$$

$$v_2(0_-) = -1 \, \text{V}$$

Pede-se:

- Calcule o fator de amortecimento  $\alpha$ , a frequência própria não-amortecida  $\omega_0$  e classifique o comportamento livre do circuito (super-amortecido, oscilatório ou amortecimento crítico). Justifique sua resposta.
- Determine a resposta completa de  $v_2(t)$  para  $t > 0$ , considerando que o circuito é excitado com  $e_s(t) = 10H(t)$  (V,s).