PSI3211 – Circuitos I – Aula 10

Magno T. M. Silva, Daniel G. Tiglea e Fábio Bretas Ferreira

Escola Politécnica da USP

2019

Vários desses slides foram inspirados nas transparências da Profa. Denise Consonni

Sumário

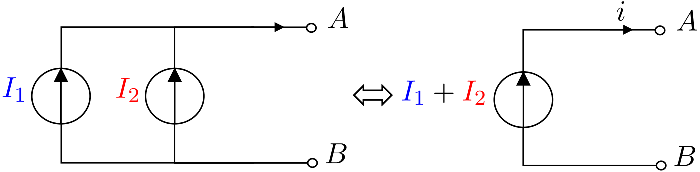
Técnicas de Simplificação de Redes Lineares

Objetivo: simplificar ou reduzir a rede antes de começar a análise

- Reduzir os cálculos
- Facilitar a compreensão do funcionamento da rede

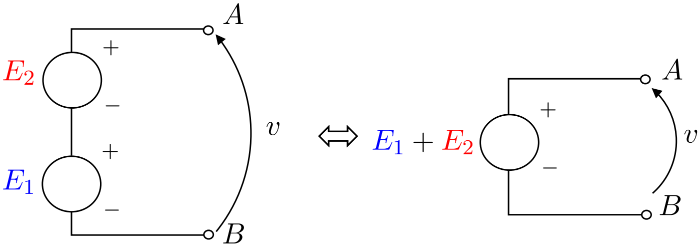
Associação de fontes semelhantes

Fontes de corrente em paralelo:



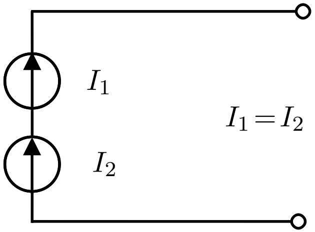
Associação de fontes semelhantes

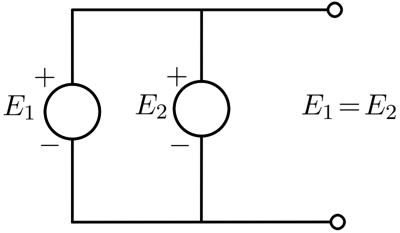
Fontes de tensão em série:



1 Associação de fontes semelhantes

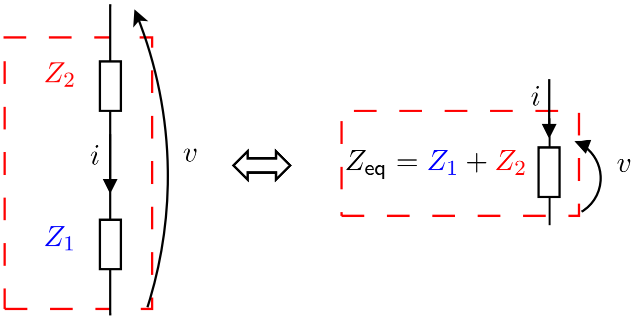
Cuidado: Se $I_1 \neq I_2$ ou $E_1 \neq E_2$, as leis de Kirchhoff podem não ser obedecidas

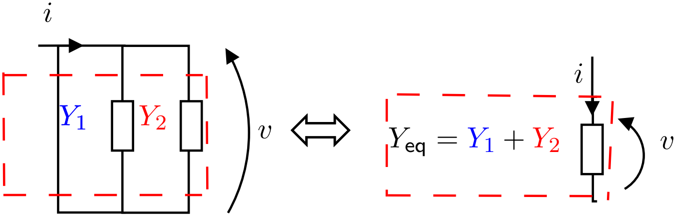




2 Impedâncias e Admitâncias

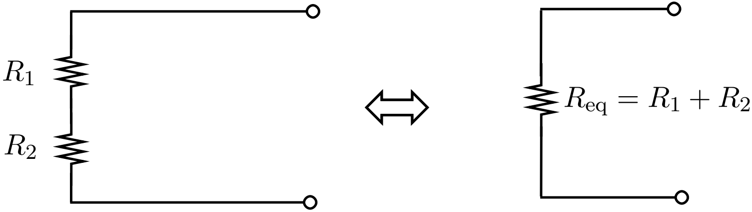
Impedâncias em série e admitâncias em paralelo:





2.1 Associação de resistores

Resistores em série

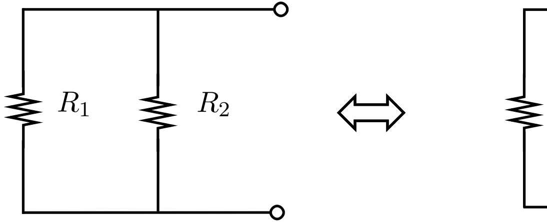


Generalizado para n resistores em série

$$R_{\mathrm{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

2.1 Associação de resistores

Resistores em paralelo



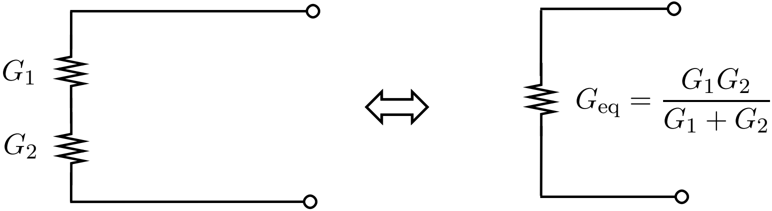
$$R_{\mathrm{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Generalizado para n resistores em paralelo

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

2.1 Associação de resistores

Condutâncias em série

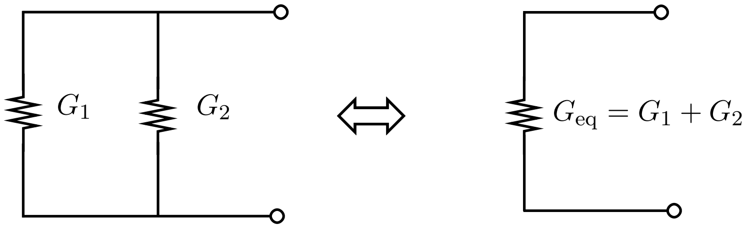


Generalizado para n condutâncias em série

$$\frac{1}{G_{\text{eq}}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \cdots + \frac{1}{G_n}$$

2.1 Associação de resistores

Condutâncias em paralelo

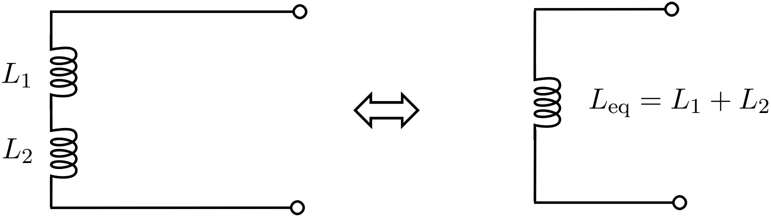


Generalizado para n condutâncias em paralelo

$$G_{\mathrm{eq}} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

2.2 Associação de indutores sem mútua

Indutores em série

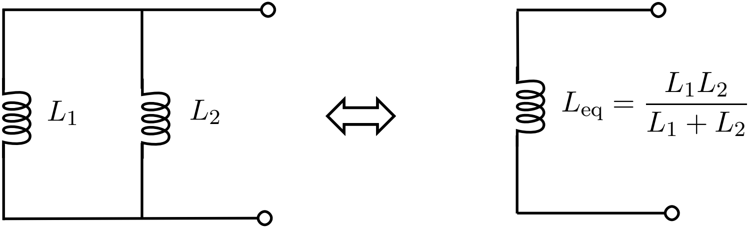


Generalizado para n indutores em série

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

2.2 Associação de indutores sem mútua

Indutores em paralelo

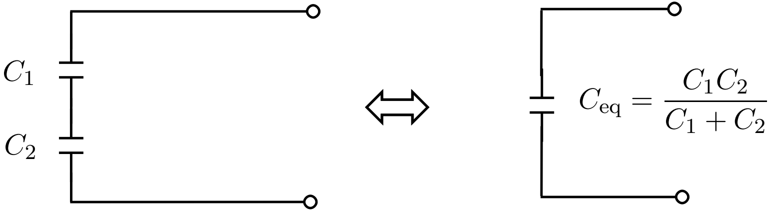


Generalizado para n indutores em paralelo

$$\frac{1}{L_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

2.3 Associação de capacitores

Capacitores em série

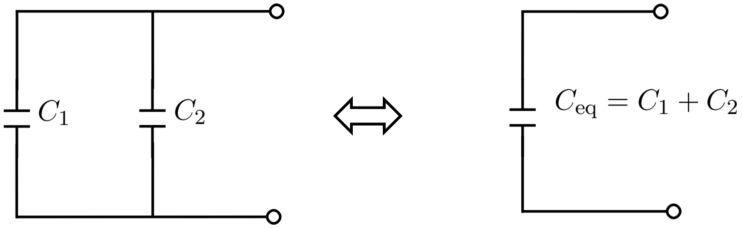


Generalizado para n capacitores em série

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

2.3 Associação de capacitores

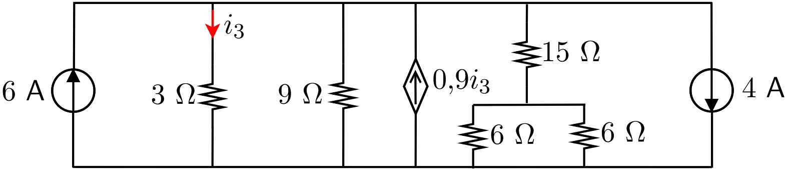
Capacitores em paralelo



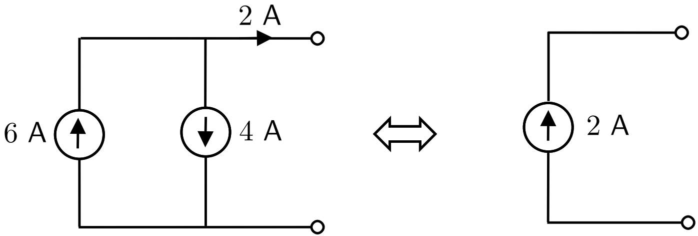
Generalizado para n capacitores em paralelo

$$C_{\mathrm{eq}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

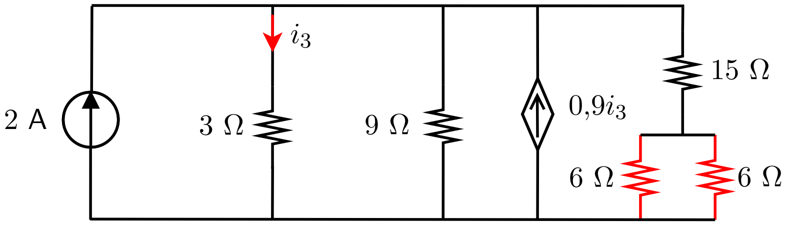
Exemplo 1



- Cuidado para não sumir com i_3 que é a corrente que controla o vinculado!
- Associando os geradores de corrente, temos



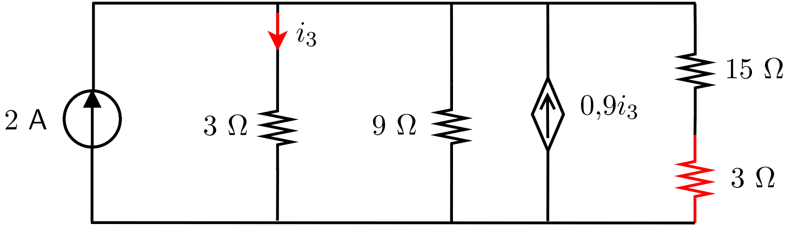
Exemplo 1



- Associando os dois resistores de $6\ \Omega$ em paralelo, temos

$$6//6 = \frac{6 \times 6}{6 + 6} = 3\ \Omega$$

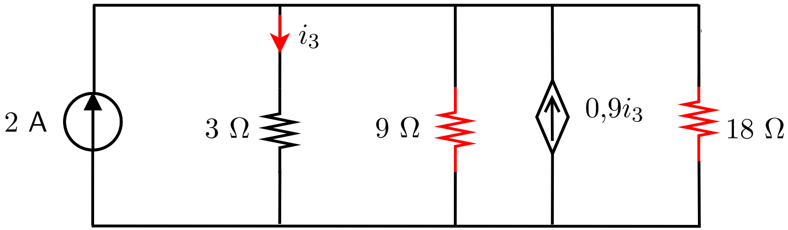
Exemplo 1



- Associando agora o resistor de $3\ \Omega$ em série com o resistor de $15\ \Omega$, temos

$$3\ \Omega + 15\ \Omega = 18\ \Omega$$

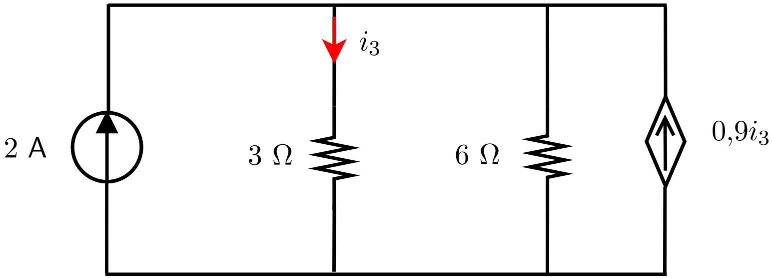
Exemplo 1



- Finalmente, associando em paralelo com o resistor de $9\ \Omega$, temos

$$18//9 = \frac{18 \times 9}{18 + 9} = 6\ \Omega$$

Exemplo 1

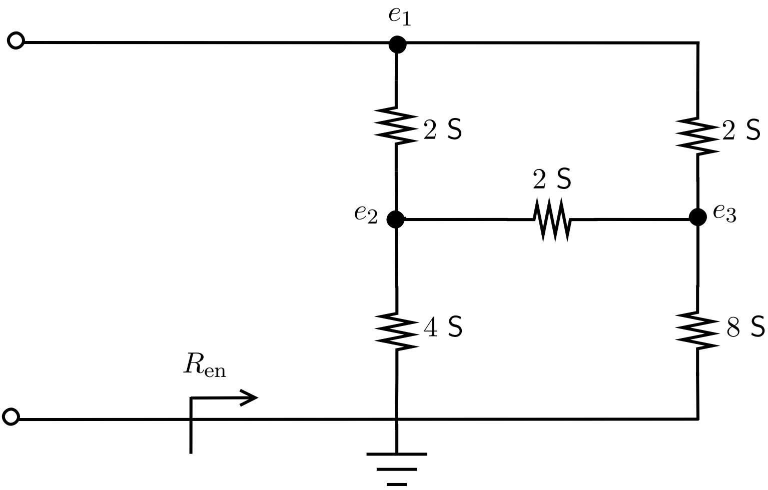


Observações

- Nem sempre é possível achar um bipolo equivalente por associações
- O bipolo equivalente depende dos terminais
- Em geral, calcula-se
  - resistência ou capacitância ou indutância de entrada

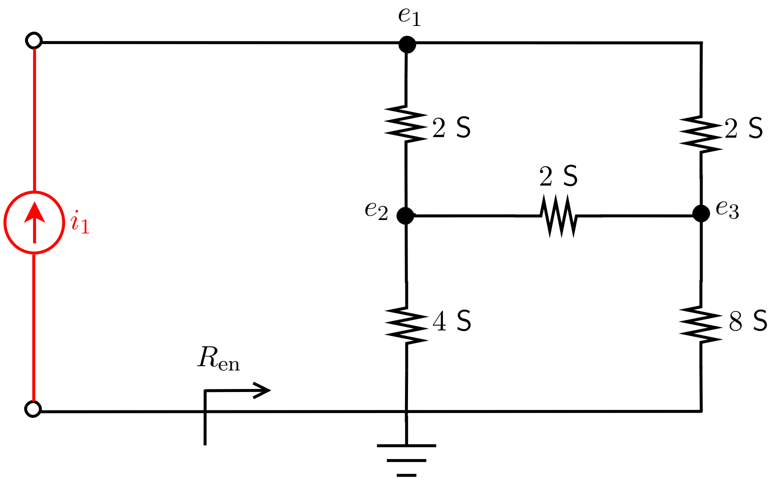
Exemplo 2

Calcule a resistência de entrada R_{en} do circuito



Exemplo 2

Vamos inserir um gerador de corrente e calcular e_1/i_1



Exemplo 2

Usando análise nodal

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

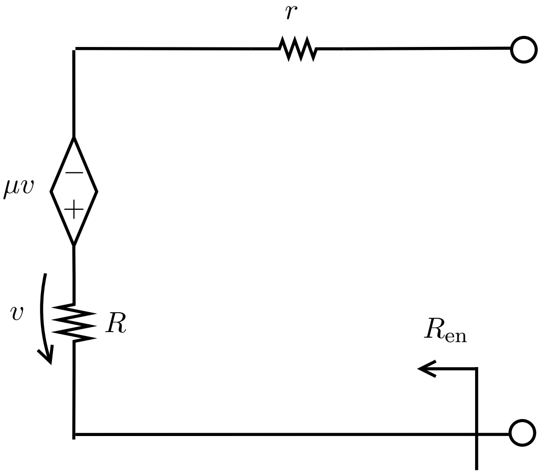
Resolvendo para e_1

$$e_1 = \frac{\begin{vmatrix} i_1 & -2 & -2 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 12 \end{vmatrix}} = \frac{23}{68} i_1$$

Assim,

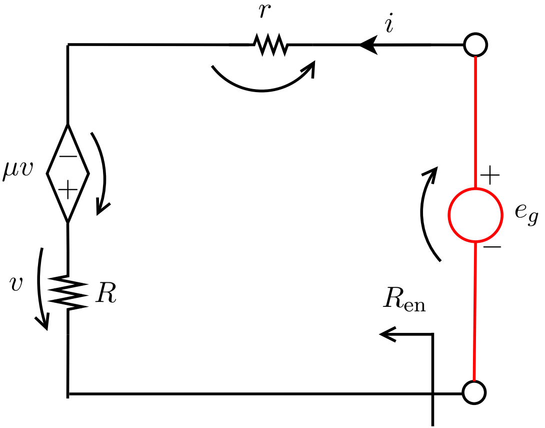
$$R_{\text{en}} = \frac{e_1}{i_1} = \frac{23}{68} = 0{,}3382\ \Omega$$

Exemplo 3 - Resistência de entrada com vinculado



Exemplo 3 - Resistência de entrada com vinculado

Vamos agora inserir um gerador de tensão e calcular e_g/i

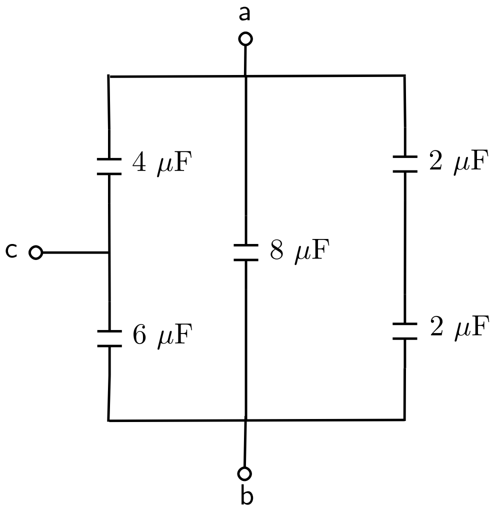


Exemplo 3 - Resistência de entrada com vinculado

Da $2^{\underline{a}}$ LK

$$
\begin{aligned}
&v + \mu v - ri + e_g = 0 \\
&e_g = r_i - (\mu + 1)v \\
&v = -Ri \quad \text{(convenção do gerador)} \\
&R_{\text{en}} = \frac{e_g}{i} = R(\mu + 1) + r
\end{aligned}
$$

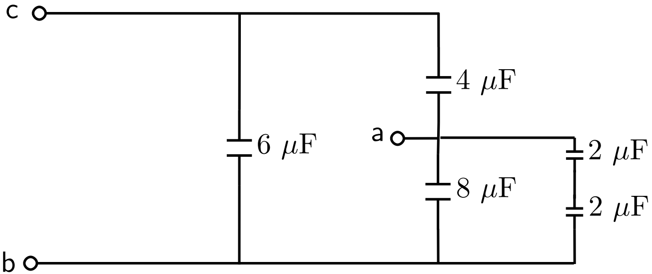
Exemplo 4 - O bipolo equivalente depende dos terminais



$$C_{\text{ab}} = \frac{2 \times 2}{2+2} + 8 + \frac{4 \times 6}{4+6} = 11{,}4\ \mu\text{F}$$

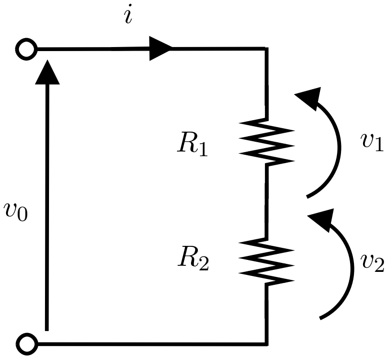
Exemplo 4 - O bipolo equivalente depende dos terminais

Redesenhando o circuito, temos



$$C_{\text{bc}} = \frac{(1+8)4}{1+8+4} + 6 = 8{,}7692\ \mu\text{F}$$

3 Divisor de Tensão

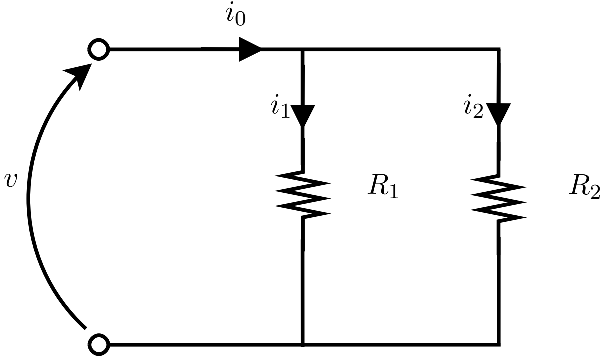


2º Lei de Kirchhoff: $v_0 = v_1 + v_2 = (R_1 + R_2)i$

$$\rightarrow i = \frac{v_0}{R_1 + R_2}$$

$$\rightarrow v_2 = R_2 i = \boxed{v_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

4 Divisor de Corrente

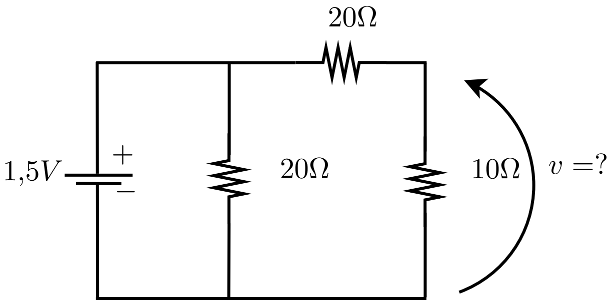


1° Lei de Kirchhoff: $i_0 = i_1 + i_2 = (G_1 + G_2)v$

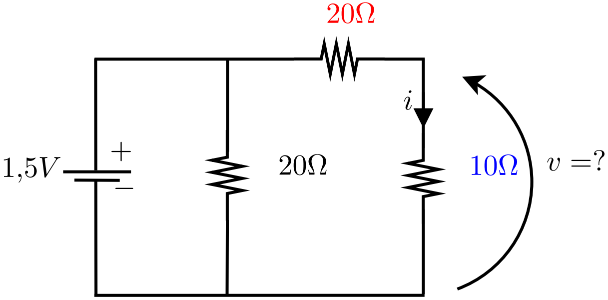
$$\rightarrow v = \frac{i}{G_1 + G_2}$$

$$\rightarrow i_2 = G_2 v = \boxed{i_0 \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2}}$$, ou ainda: $$\boxed{i_2 = i_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Exemplo 1



Exemplo 1

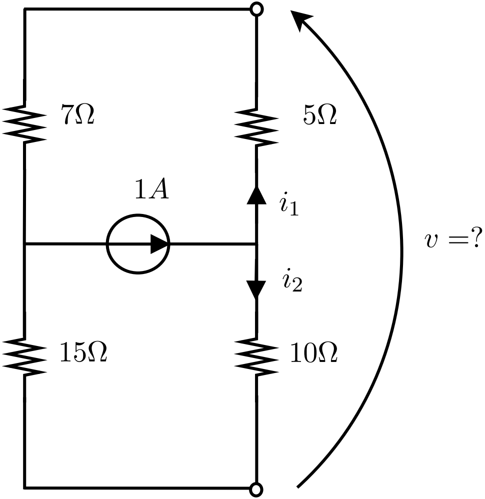


$$i = \frac{1{,}5}{20 + 10}$$

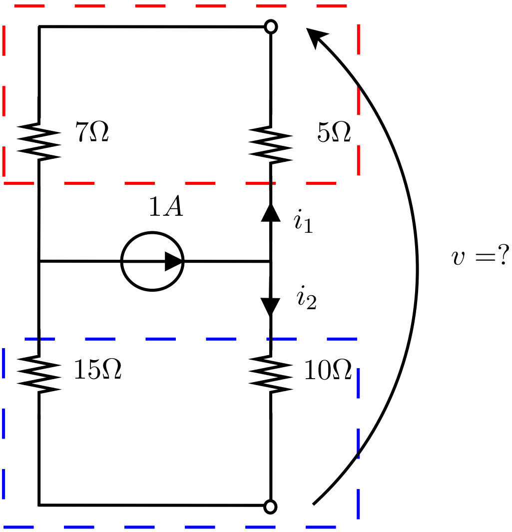
$$v = 10 \cdot i$$

$$\begin{aligned} \rightarrow v \quad &= 1{,}5 \cdot \frac{10}{10 + 20} \\ &= 0{,}5V \end{aligned}$$

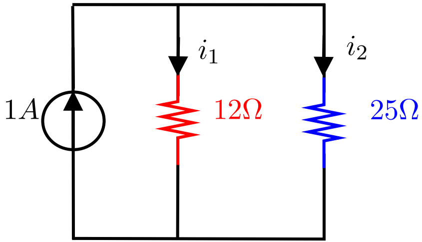
Exemplo 2



Exemplo 2



Exemplo 2

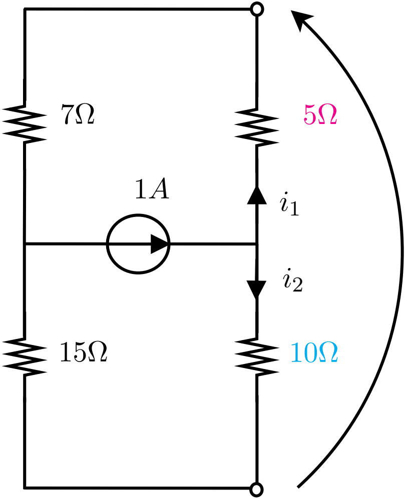


$$i_1 = 1 \cdot \frac{25}{25 + 12} = 0{,}6757A$$

$$i_2 = 1 \cdot \frac{12}{25 + 12} = 0{,}3243A$$

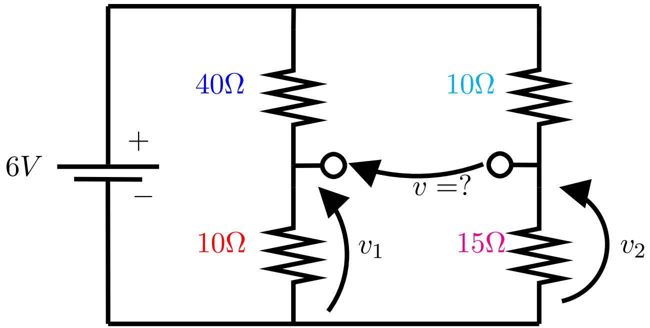
Exemplo 2

Voltando ao circuito original:



$$v = 10i_2 - 5i_1$$
$$= -0{,}1351V$$

Exemplo 3



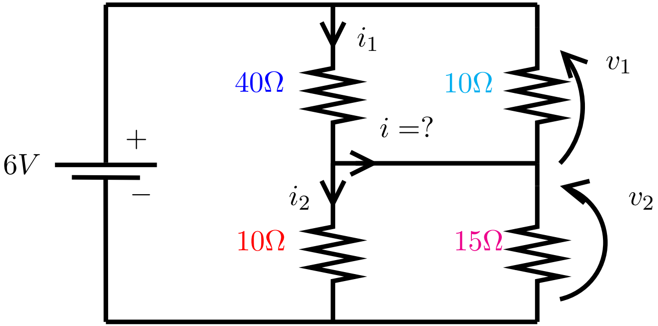
$$v = v_1 - v_2$$

$$v_1 = 6 \cdot \frac{10}{40 + 10} = \frac{6}{5}V$$

$$v_2 = 6 \cdot \frac{15}{10 + 15} = \frac{18}{5}V$$

$$v = \frac{6}{5} - \frac{18}{5} = -\frac{12}{5} = -2{,}4V$$

Ponte de Wheatstone



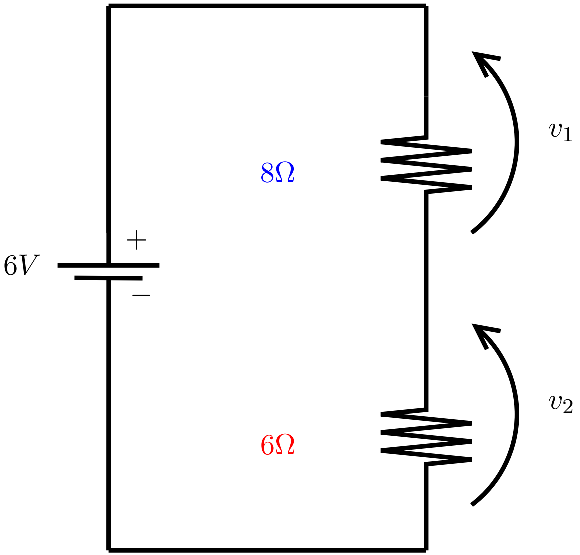
$$i = i_1 - i_2 = \frac{v_1}{40} - \frac{v_2}{10}$$

$$40//10 = 8\Omega$$

$$15//10 = 6\Omega$$

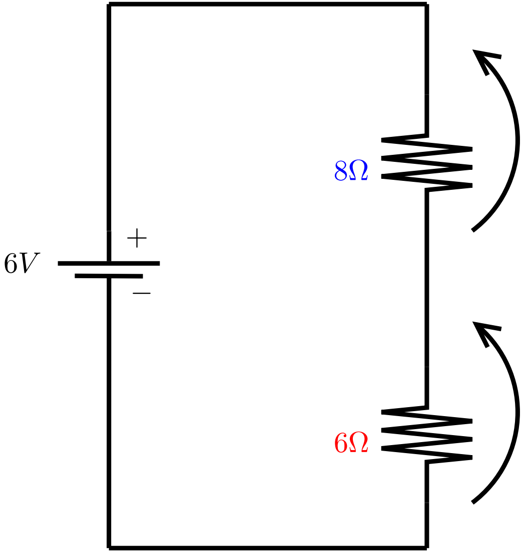
Ponte de Wheatstone

Simplificando:



Ponte de Wheatstone

Simplificando:

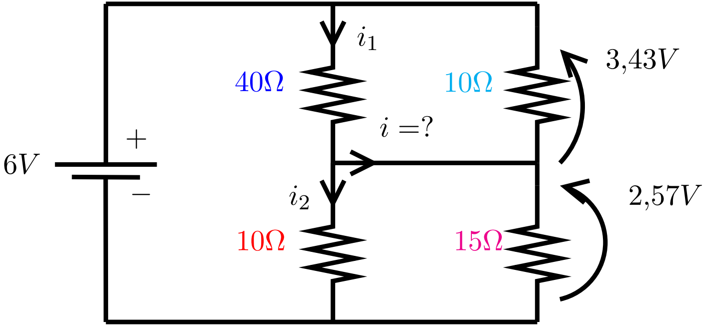


$$v_1 = 6 \cdot \frac{8}{8+6} = 3{,}43V$$

$$v_2 = 6 \cdot \frac{6}{8+6} = 2{,}57V$$

Ponte de Wheatstone

Voltando ao circuito anterior:

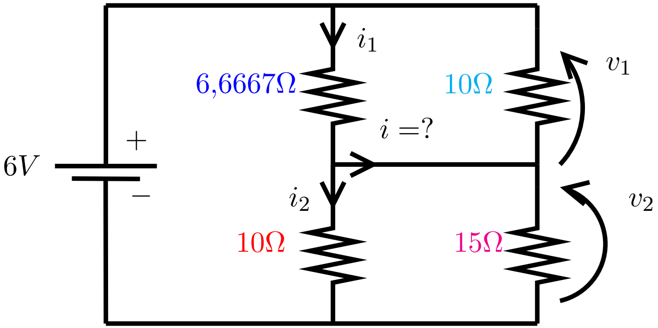


$$i_1 = \frac{3{,}43}{40}A \text{ e } i_1 = \frac{2{,}57}{10}A$$

$$\rightarrow i = -0{,}17A$$

Ponte de Wheatstone

Se em vez de 40Ω tivéssemos $6{,}6667\Omega$:



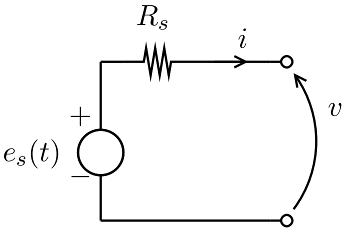
$6{,}6667 // 10 = 4\Omega$ e $10 // 10 = 6\Omega$

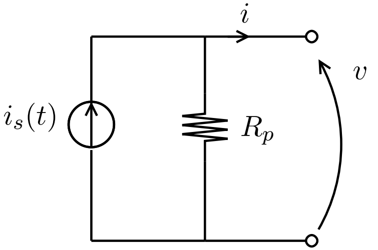
$\rightarrow v_1 = 2{,}4V$ e $v_2 = 3{,}6V$

$i_1 = i_2 = 0{,}36A \rightarrow \boxed{i = 0A}$

Ponte de Wheatstone Equilibrada!

5 Fontes Equivalentes



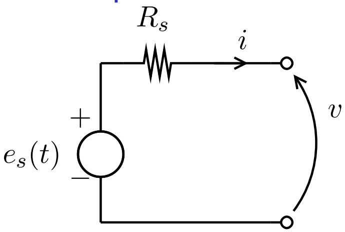


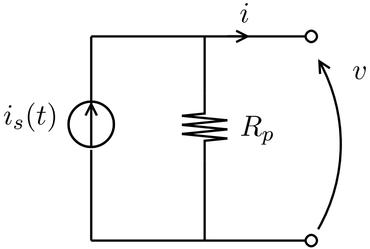
Geradores reais:

- Gerador ideal de tensão + resistência em série
- Gerador ideal de corrente + resistência em paralelo

$\boxed{\text{Condições de equivalência: } v \text{ e } i \text{ iguais para os dois casos}}$

5 Fontes Equivalentes





Condições de equivalência: v e i iguais para os dois casos

$$i = i_s - \frac{v}{R_p}$$

$$\boxed{v = e_s - R_s i}$$

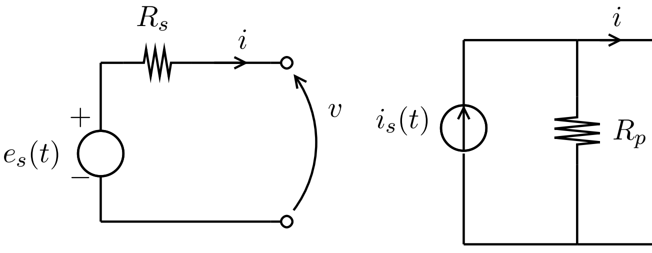
$$\rightarrow \boxed{v = R_p i_s - R_p i}$$

$$e_s - R_s i = R_p i_s - R_p i$$

$\therefore$ Para qualquer valor de v e i:

$$\boxed{\begin{cases} R_p = R_s \\ R_p i_s = e_s \end{cases}}$$

5 Fontes Equivalentes

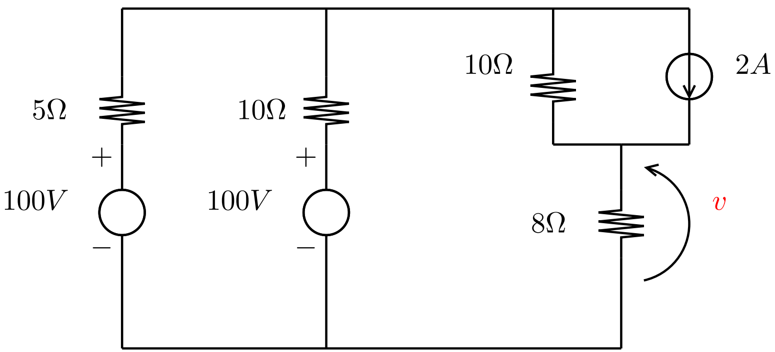


Para qualquer v e i:

$$\boxed{\begin{cases} R_p = R_s \\ R_p i_s = e_s \end{cases}}$$

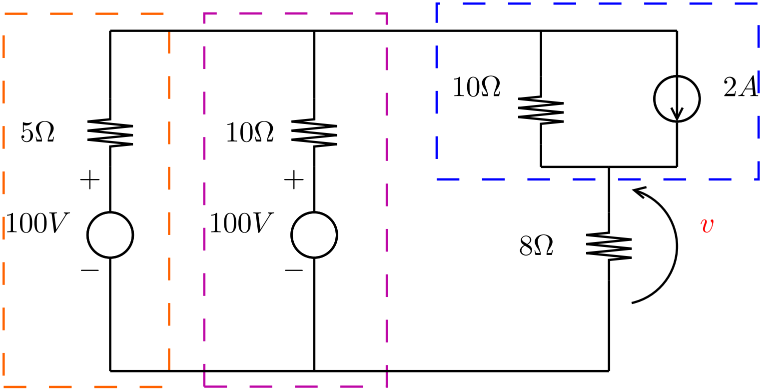
Atenção ao sentido das fontes!

Exemplo

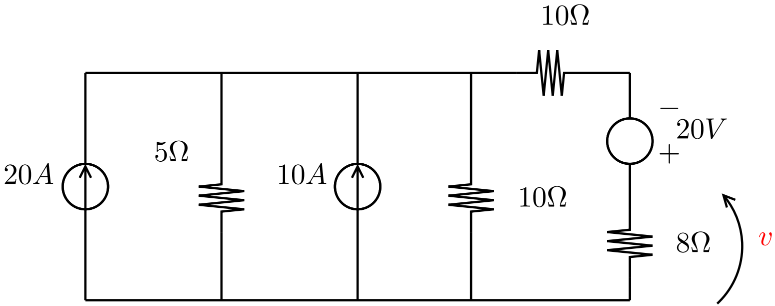


Exemplo

Podemos substituir as fontes em destaque por seus equivalentes:

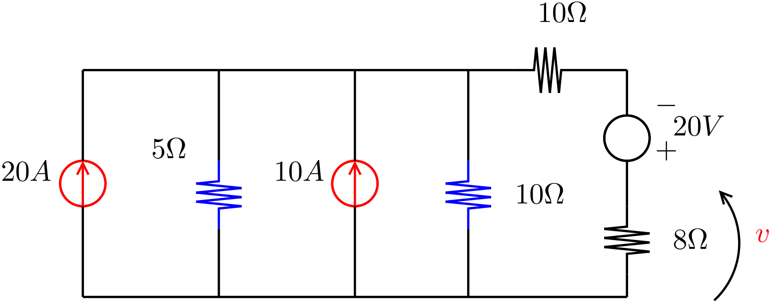


Exemplo

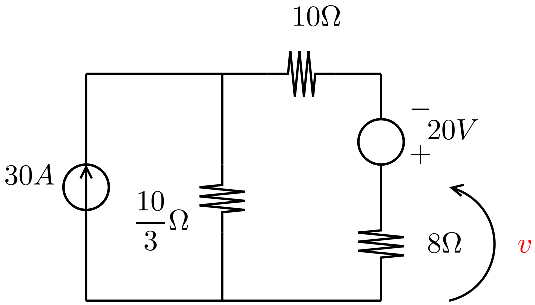


Exemplo

Podemos agrupar as fontes semelhantes e calcular a resistência em paralelo:

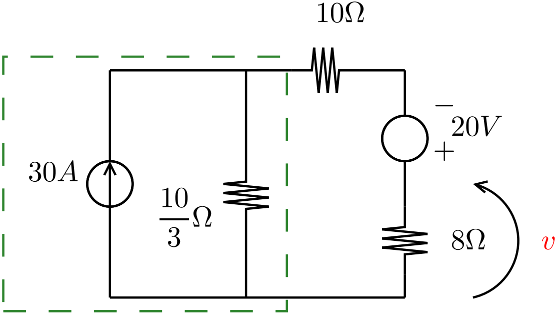


Exemplo



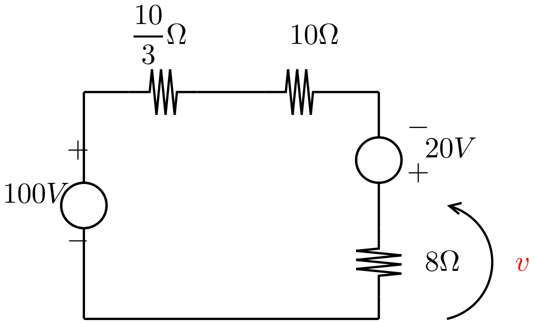
Exemplo

Podemos converter novamente a fonte em destaque para o seu equivalente:

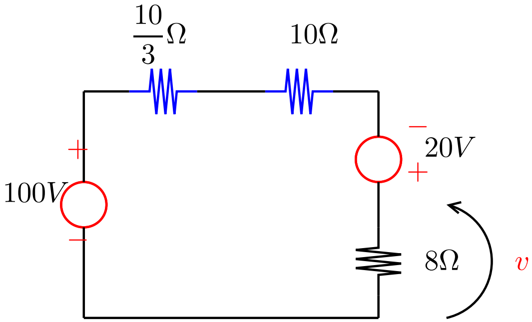


Exemplo

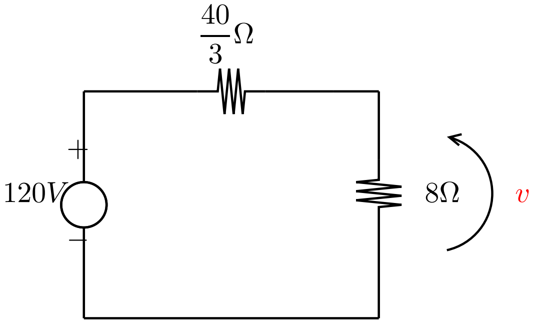
Agrupando as fontes semelhantes e as resistências em série:



Exemplo



Exemplo



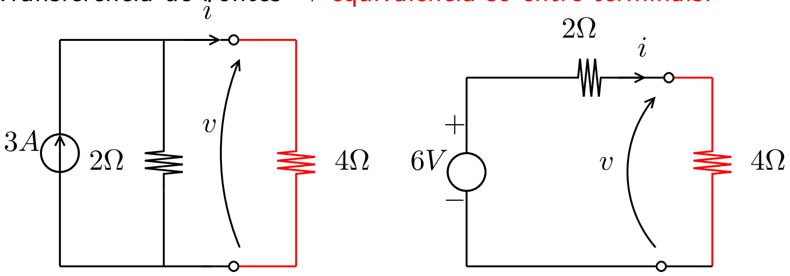
$$v = 120 \cdot \frac{8}{\frac{40}{3} + 8}$$

$$\boxed{v = 45V}$$

Útil para preparar o circuito para Análise Nodal!

Transferência de Fontes

Transferência de Fontes $\rightarrow$ equivalência só entre terminais!



$$i = \frac{3 \cdot 2}{6} = 1A \quad = \quad i = \frac{6}{6} = 1A$$

$$v = 4 \cdot 1 = 4V \quad = \quad v = 6 \cdot \frac{4}{6} = 4V$$

$$P_{4\Omega} = 4W \quad = \quad P_{4\Omega} = 4W$$

$$P_G = 3 \cdot 4 = 12W \quad \neq \quad P_G = 6 \cdot 1 = 6W$$

$$P_{2\Omega} = \frac{v^2}{R} = \frac{16}{2} = 8W \quad \neq \quad P_{2\Omega} = Ri^2 = 2W$$

Transferência de Fontes

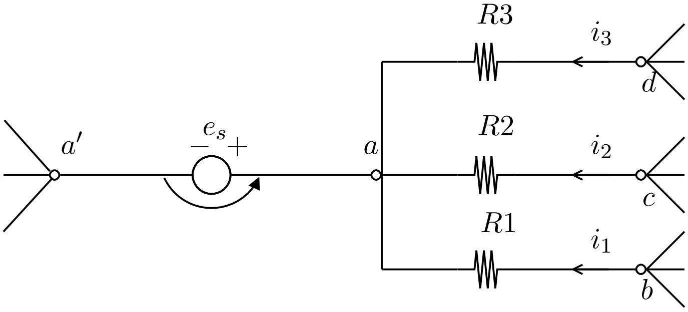
Não pode ser efetuada quando há na rede geradores ideais!
(Gerador de tensão sem R em série ou de corrente sem R em paralelo)

6 Deslocamento de Fontes Ideais

Usado quando:

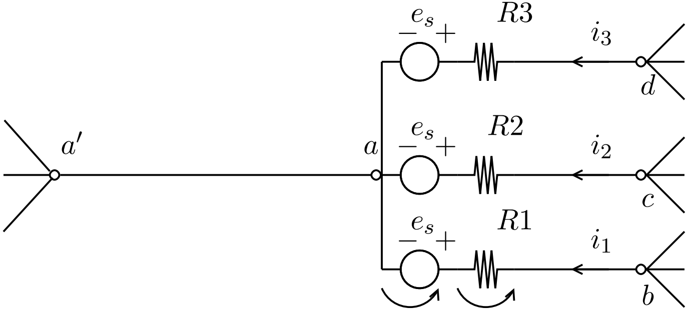
- **não** há R em série c/ gerador de tensão
- **não** há R em paralelo c/ gerador de corrente

Deslocamento de Fontes de Tensão



Potência fornecida pelo gerador: $-e_s(i_1 + i_2 + i_3)$

Deslocamento de Fontes de Tensão



$$v_{ba'} = R_1 i_1 + e_s$$

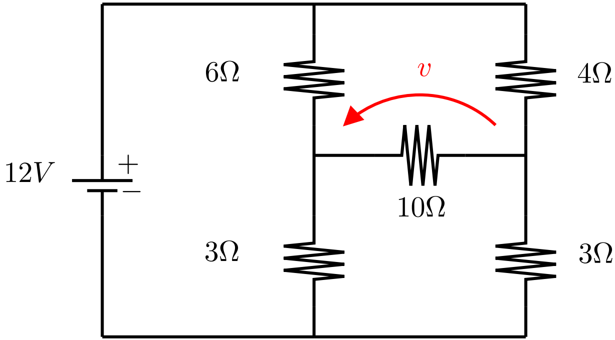
$$v_{ca'} = R_2 i_2 + e_s$$

$$v_{da'} = R_3 i_3 + e_s$$

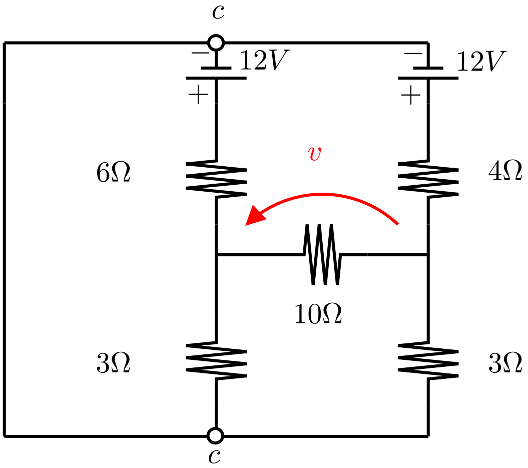
- $v_{ba'}$, $v_{ca'}$ e $v_{da'}$ não mudam
- a corrente injetada em $aa' = i_1 + i_2 + i_3$ não muda
- a potência fornecida por cada gerador é $-e_s i_1 - e_s i_1 - e_s i_1$

$\rightarrow$ Só muda a d.d.p. ente a e a'!

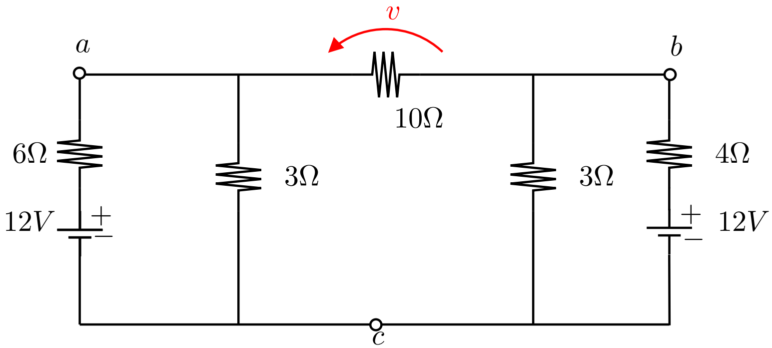
Exemplo



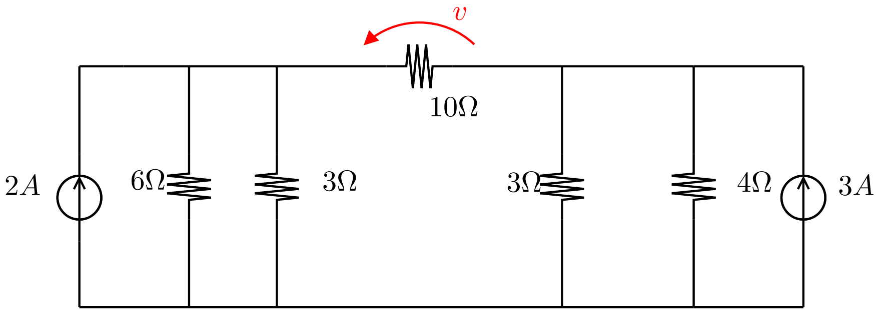
Exemplo



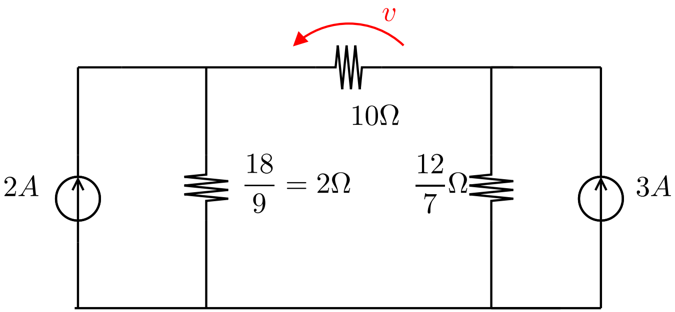
Exemplo



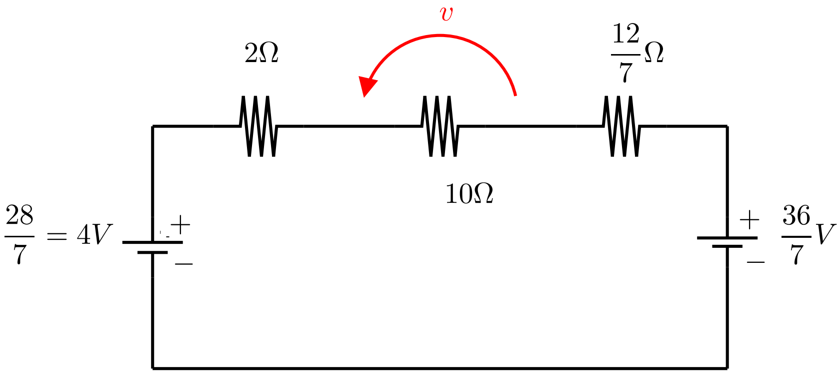
Exemplo



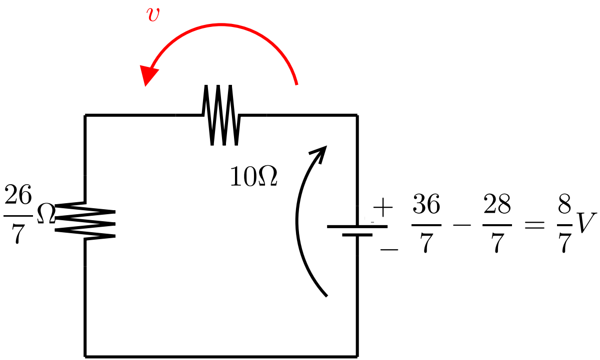
Exemplo



Exemplo



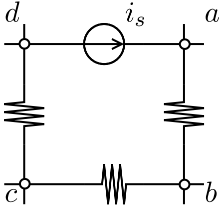
Exemplo



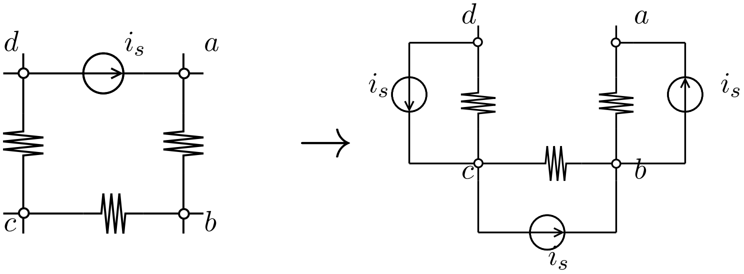
$$v = -\frac{8}{7} \cdot \frac{10}{10 + \frac{26}{7}}$$

$$\boxed{v = -0{,}833V}$$

Deslocamento de Fontes de Corrente



Deslocamento de Fontes de Corrente

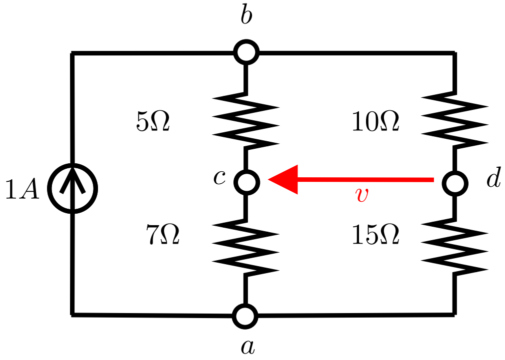


$i_s \;\rightarrow$ extrai corrente do nó d e injeta no nó a

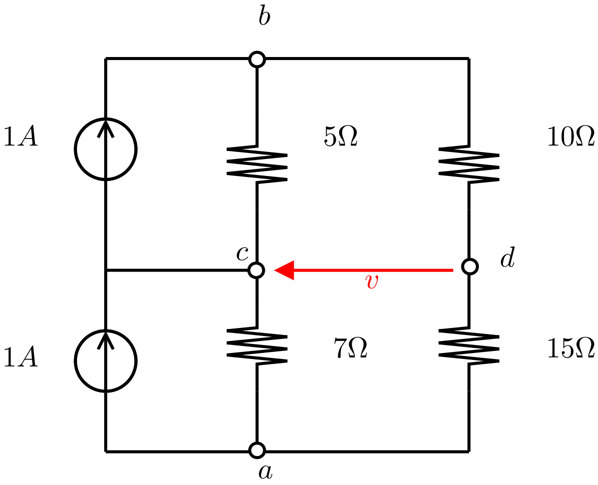
Outros nós $\rightarrow$ uma fonte anula a outra

Exemplo

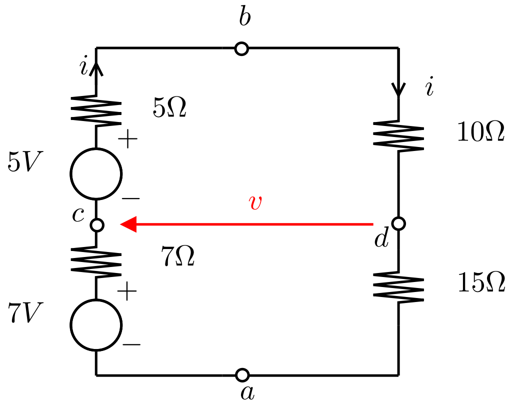
(Já resolvemos c/ divisor de tensão)



Exemplo



Exemplo



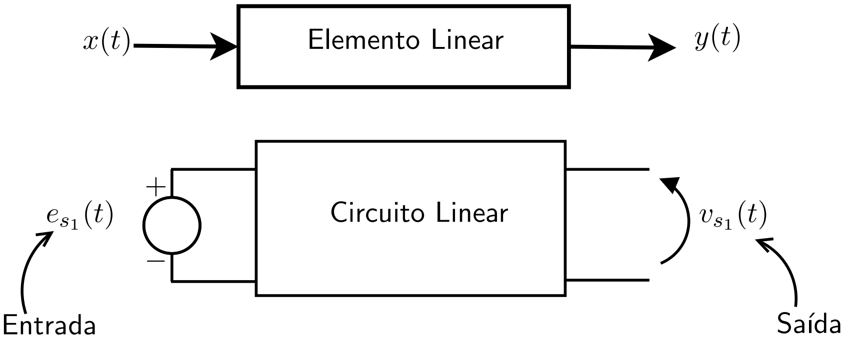
$$v = 15i - 5$$

$$(10 + 5 + 7 + 15)i = 12$$

$$\rightarrow i = \frac{12}{37} = 0{,}324A$$

$$\boxed{v = -0{,}135V}$$

7 Proporcionalidade e Superposição



$$e_{s_2}(t) \longrightarrow v_{s_2}(t)$$

$$2e_{s_1}(t) \longrightarrow 2v_{s_1}(t)$$

$$k_1 e_{s_1}(t) + k_2 e_{s_2}(t) \longrightarrow k_1 v_{s_1}(t) + k_2 v_{s_2}(t)$$

Proporcionalidade e Superposição

Características:

- Homogeneidade

$$kx(t) \longrightarrow ky(t)$$

- Aditividade

$$\text{se} \begin{cases} x_1 \longrightarrow y_1 \\ x_2 \longrightarrow y_2 \end{cases}, \qquad \text{então} \begin{cases} x_1 + x_2 \longrightarrow y_1 + y_2 \end{cases}$$

Consequências:

- Proporcionalidade entre excitação e resposta
- Superposição

$$\boxed{k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \longrightarrow k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)}$$

Circuitos Elétricos Lineares (R, L, C)

AN:

$$G_n \underset{\sim}{e} = i_{s_n}$$

$$G_n k \underset{\sim}{e} = k i_{s_n}$$

Excitações:

$$\underset{\sim}{i}_{s_1} \text{ e } \underset{\sim}{i}_{s_2}$$

$$G_n \underset{\sim}{e}_1 = \underset{\sim}{i}_{s_1}$$

$$\rightarrow G_n \left(\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2\right) = \underset{\sim}{i}_{s_1} + \underset{\sim}{i}_{s_2}$$

$$G_n \underset{\sim}{e}_2 = \underset{\sim}{i}_{s_2}$$

$$\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 = G_n^{-1} \left(\underset{\sim}{i}_{s_1} + \underset{\sim}{i}_{s_2}\right)$$

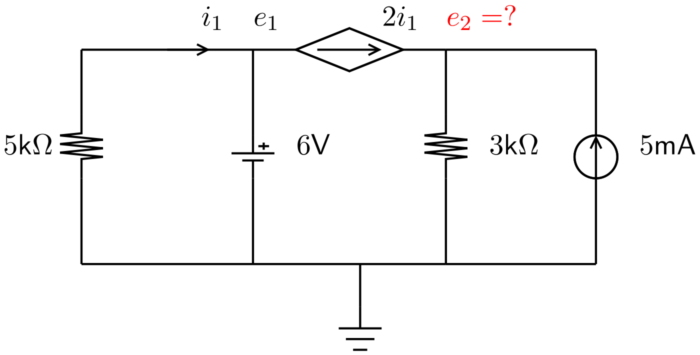
Circuitos Elétricos Lineares (R, L, C)

A resposta devido a uma soma de excitações pode ser determinada pela soma das respostas devidas separadamente a cada uma das excitações

Princípio da Superposição

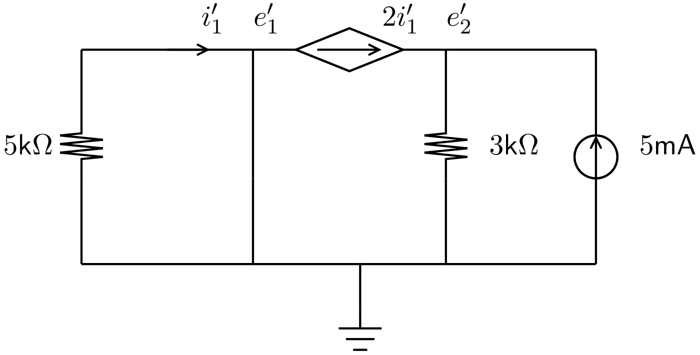
Fonte de tensão $\rightarrow$ curto circuito
Fonte de corrente $\rightarrow$ circuito aberto
Nunca inativar vinculado!

Exemplo



Exemplo

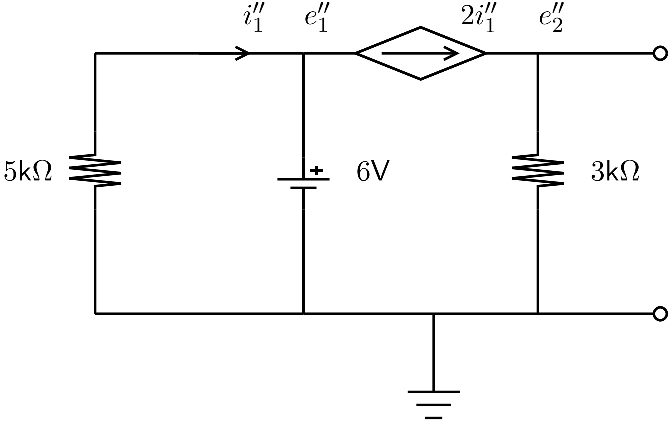
1) Vamos inativar o gerador de tensão independente



$$i_1' = 0 \quad e_1' = 0 \quad e_2' = 15V$$

Exemplo

2) Vamos inativar o gerador de corrente independente



$$i_1'' = -\frac{6}{5} = -1{,}2\text{mA}$$

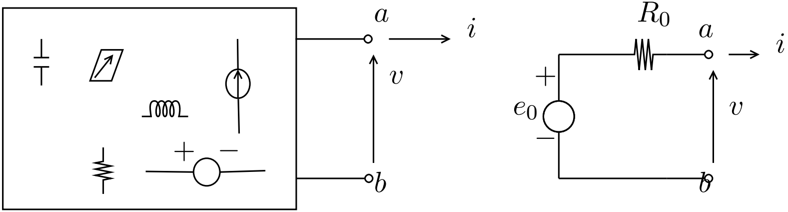
$$e_2'' = -3 \times 2 \times \frac{6}{5} = -\frac{36}{5} = -7{,}2V$$

Exemplo

3) Pelo princípio da superposição, temos:

$$e_2 = e_2' + e_2'' = 15 - 7{,}2 = 7{,}8V$$

8 Os geradores equivalentes de Thévenin e Norton

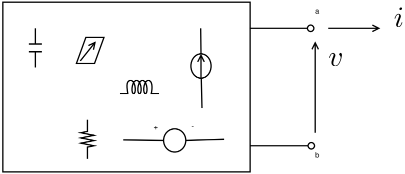


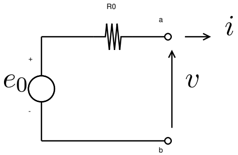
Determinar v e i que a rede A fornece a uma segunda rede sem determinar correntes e tensões na rede alimentadora

$e_0 \rightarrow$ gerador ideal de tensão (tensão entre a e b quando em aberto)

$R_0 \rightarrow$ resistência interna do gerador de Thévenin vista pelos terminais a e b, inativando os geradores independentes.

Norton (dual de Thévenin)



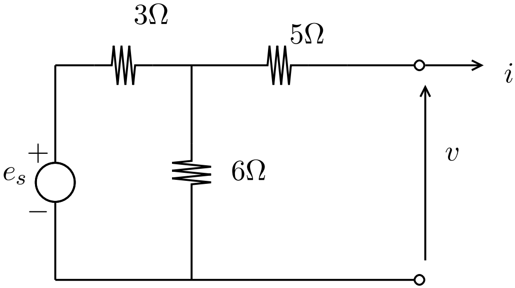


$i_0 \rightarrow$ obtida colocando os terminais em curto

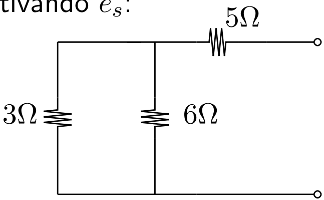
De fontes equivalentes:

$$\begin{cases} e_0 = \dfrac{i_0}{G_0} = R_0 i_0 \\ \\ R_0 = \dfrac{1}{G_0} \end{cases}$$

Exemplo



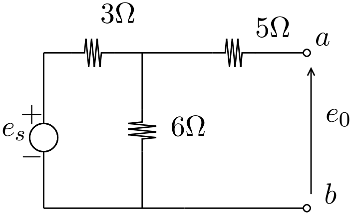
Inativando e_s:



$$R_0 = 3//6 + 5$$
$$= \frac{3 \times 6}{9} + 5 = 7\Omega$$

Exemplo

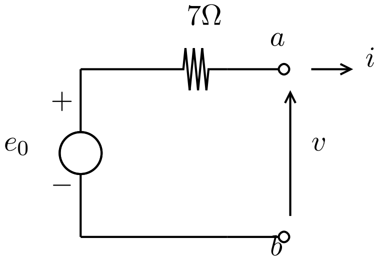
Tensão em aberto:



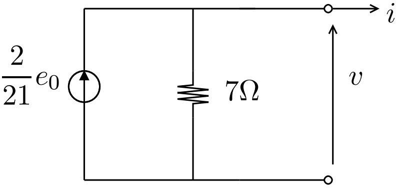
$$e_0 = \frac{6}{9} e_s = \frac{2}{3} e_s$$

Exemplo

Thévenin



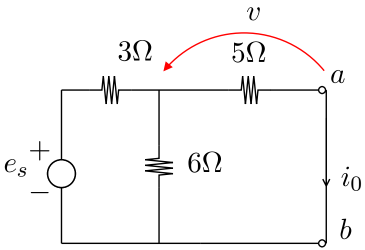
Norton

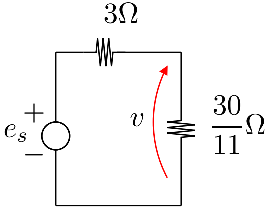


$$
\begin{aligned}
i_0 &= \frac{e_0}{R_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e_s}{7} \\
&= \frac{2}{21} e_s
\end{aligned}
$$

Exemplo

i_0 também pode ser obtida colocando a e b em curto:

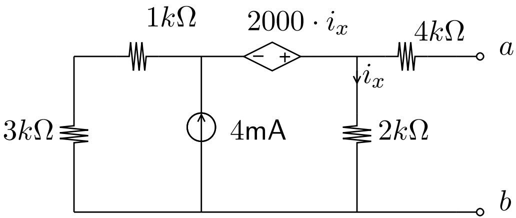


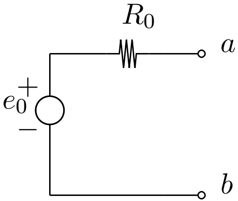


$$v = e_s \cdot \frac{30}{11} \cdot \frac{1}{\frac{33+30}{11}} = \frac{30}{63} \cdot e_s = \frac{10}{21} e_s$$

$$i_0 = \frac{v}{5} \rightarrow i_0 = \frac{e_s}{5} \cdot \frac{10}{21} = \frac{2}{21} \cdot e_s$$

Exemplo de Thévenin com vinculado

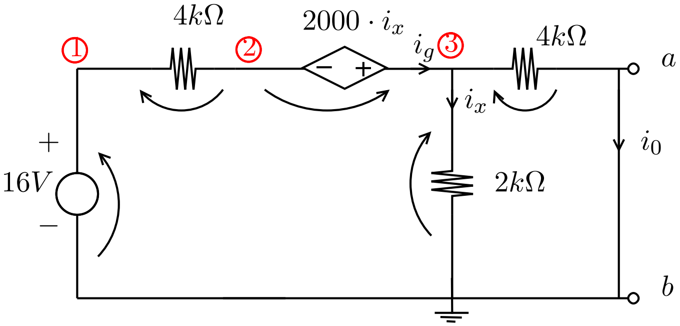




Vamos calcular a corrente de curto

Exemplo de Thévenin com vinculado

Vamos primeiramente fazer transferência de fontes



Análise nodal no nó e_2:

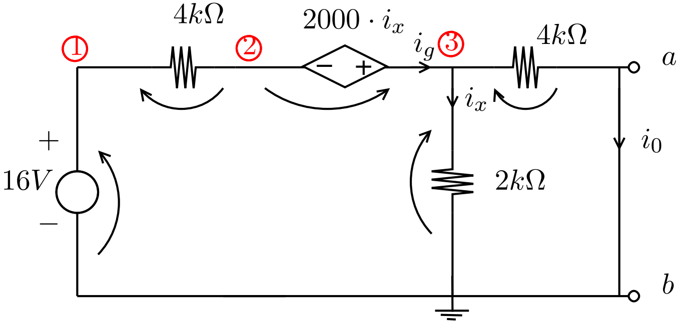
$$e_1 = 16V \;\rightarrow\; \frac{1}{4000}(e_2 - 16) + i_g = 0 \rightarrow e_2 + 4000 i_g = 16$$

No nó e_3:

$$\left(\frac{1}{4000} + \frac{1}{2000}\right) e_3 - i_g = 0 \;\rightarrow\; \left(\frac{4+2}{8000}\right) e_3 - i_g = 0$$

$$\rightarrow 6e_3 - 8000 i_g = 0$$

Exemplo de Thévenin com vinculado



Do vinculado, temos

$$e_3 - e_2 = 2000 i_x = \cancel{2000} \cdot \frac{1}{\cancel{2000}} \cdot e_3 \rightarrow \; e_2 = 0$$

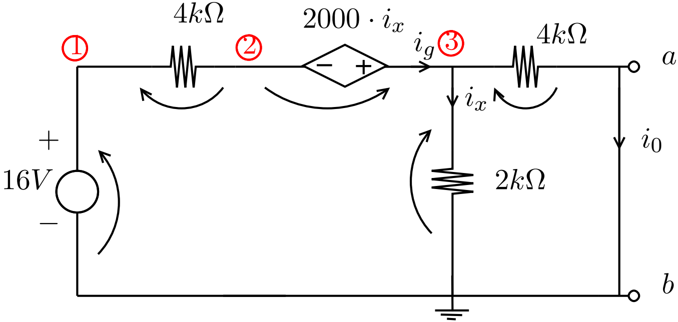
$\therefore$ da análise nodal no nó e_2, temos

$$\cancel{e_2} + 4000 i_g = 16 \rightarrow 4000 i_g = 16$$

Da equação do nó e_3, temos:

$$6e_3 - 8000 i_g = 0 \rightarrow e_3 = \frac{2 \times 16}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} V$$

Exemplo de Thévenin com vinculado

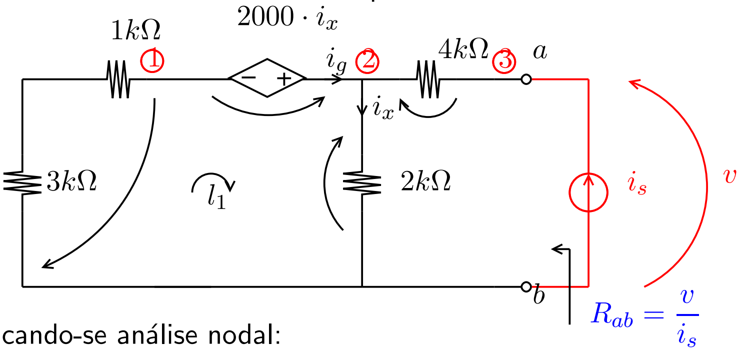


Como $i_0 = \dfrac{1}{4000} \cdot e_3$:

$$\boxed{i_0 = \frac{4}{3}\text{mA}}$$

Exemplo de Thévenin com vinculado

Vamos calcular a resistência vista pelos terminais a e b:

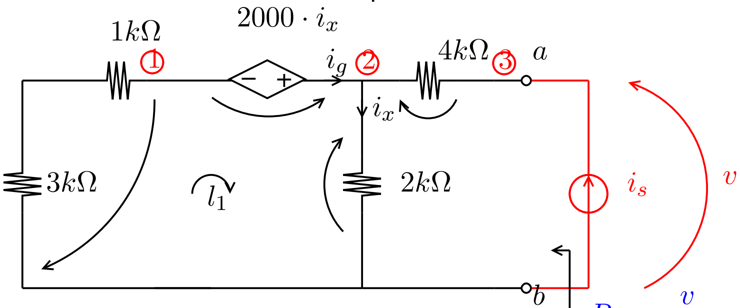


Aplicando-se análise nodal:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4000} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2000}+\frac{1}{4000} & -\frac{1}{4000} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4000} & \frac{1}{4000} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ i_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo de Thévenin com vinculado

Vamos calcular a resistência vista pelos terminais a e b:



$$R_{ab} = \frac{v}{i_s}$$

$$e_2 - e_1 = 2000 i_x = \frac{2000}{2000} e_2 \rightarrow e_1 = 0$$

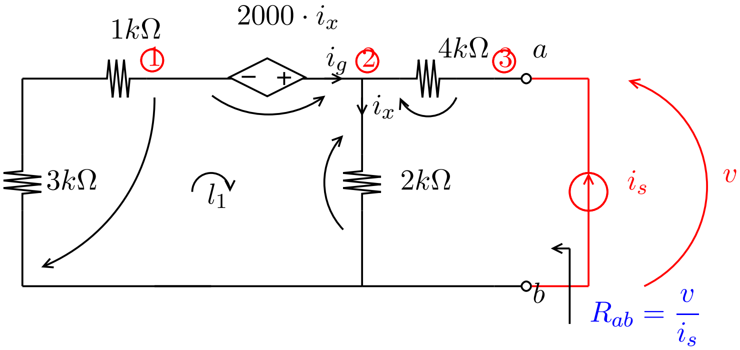
$$\rightarrow i_g = 0$$

$$\frac{6}{8000} e_2 - \frac{2}{8000} e_3 = 0 \rightarrow 3_2 = \frac{e_3}{3}$$

$$-\frac{1}{4000} e_2 + \frac{1}{4000} e_3 = i_s \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4000} e_3 = i_s$$

Exemplo de Thévenin com vinculado

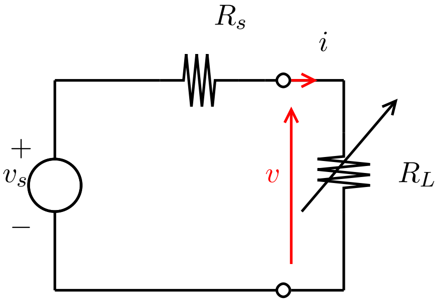
Vamos calcular a resistência vista pelos terminais a e b:



$$6000 i_s = e_3$$

$$\boxed{R_{ab} = 6k\Omega}$$

Teorema da máxima transferência de potência



$$p_L = \left[\frac{v_s R_L}{R_s + R_L}\right]^2 \frac{1}{R_L} = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2}$$

Determinar o valor de R_L para que p_L seja máxima!

Teorema da máxima transferência de potência

$$\frac{dp_L}{dR_L} = \frac{v_s^2(R_s + R_L)^2 - v_s^2 \cdot R_L \cdot 2(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

$$\rightarrow 2R_L \cancel{(R_s + R_L)} = (R_s + R_L)^{\cancel{2}}$$

$$\rightarrow 2R_L - R_L = R_s$$

$$\boxed{R_s = R_L}$$

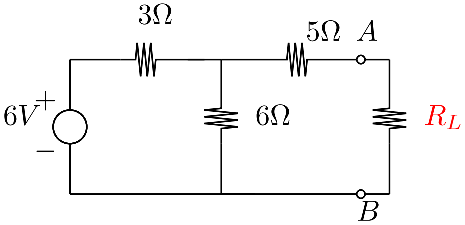
Neste caso, $p_L = \dfrac{v_s^2}{4R_s}$.

Teorema da máxima transferência de potência

Teorema: uma fonte de tensão independente em série com R_s ou uma fonte de corrente independente em $//$ com R_s fornece a máxima potência a um resistor de carga R_L se

$$\boxed{R_s = R_L}$$

Exemplo



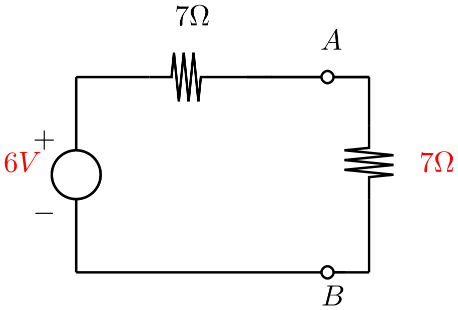
Qual o valor de R_L para que ocorra a máxima transferência de potência?

$$e_0 = 6 \times \frac{6}{9} = 4V$$

$$R_0 = 3//6 + 5 = 7\Omega$$

$$i_0 = \frac{e_0}{R_0} = \frac{4}{7}A$$

Exemplo



Condição de carga casada

Rendimento 50%

$$\eta = \frac{p_L}{p_{G_{th}}} = 0{,}5$$

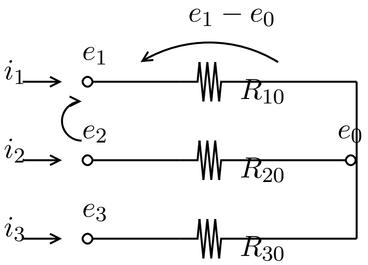
$\rightarrow$ Metade da potência é dissipada internamente na fonte equivalente.

9 Transformação estrela (Y) - triângulo (Δ)

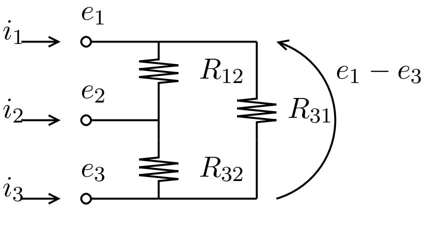
Equivalência de redes:

- mesmas tensões nodais
- mesmas correntes fornecidas pelo resto da rede

9 Transformação estrela (Y) - triângulo (Δ)



$\equiv$



$$i_1 = G_{10}(e_1 - e_0) \qquad i_1 = \frac{e_1 - e_3}{R_{31}} + \frac{e_1 - e_2}{R_{12}}$$

1-3 $R_{31}//(R_{12} + R_{32}) = R_{10} + R_{30}$

1-2 $R_{12}//(R_{31} + R_{32}) = R_{10} + R_{20}$

2-3 $R_{32}//(R_{31} + R_{12}) = R_{20} + R_{30}$

9 Transformação estrela (Y) - triângulo (Δ)

Desenvolvendo os cálculos:

$$\frac{R_{31}(R_{12}+R_{32})+R_{12}(R_{31}+R_{32})+R_{32}(R_{31}+R_{12})}{R_{12}+R_{32}+R_{31}} =$$

$$2(R_{10}+R_{30}+R_{20})$$

$$\rightarrow \frac{2(R_{12}R_{31}+R_{31}R_{32}+R_{12}R_{32})}{R_{12}+R_{32}+R_{31}} =$$

$$2(R_{10}+R_{30}+R_{20})$$

9 Transformação estrela (Y) - triângulo (Δ)

Calculando a soma apenas das duas primeiras parcelas:

$$\frac{R_{31}(R_{12}+R_{32})}{R_{12}+R_{32}+R_{31}} + \frac{R_{12}(R_{31}+R_{32})}{R_{12}+R_{32}+R_{31}} = 2R_{10} + R_{20} + R_{30}$$

$$\rightarrow \frac{R_{12}R_{31}+R_{31}R_{32}+R_{12}R_{32}+R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{32}+R_{31}} = R_{10}+R_{30}+R_{20}+R_{10}$$

$$\boxed{R_{10} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{32}+R_{31}}}$$

$$\rightarrow R_{\Delta} = R_{12}+R_{32}+R_{31}$$

9 Transformação estrela (Y) - triângulo (Δ)

Analogamente:

$$R_{20} = \frac{R_{12}R_{32}}{R_\Delta} \text{ e } R_{30} = \frac{R_{31}R_{32}}{R_\Delta}$$

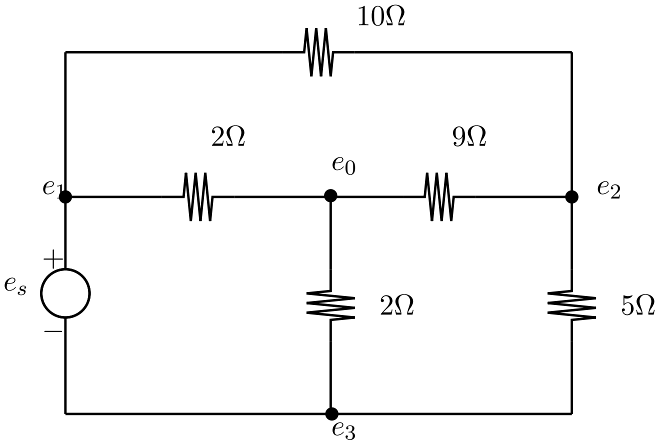
Para a transformação $Y - \Delta$ basta fazer o mesmo trabalhando com as condutâncias, o que leva a

$$G_{12} = \frac{G_{10}G_{20}}{G_Y} \; G_{32} = \frac{G_{20}G_{30}}{G_Y} \; G_{31} = \frac{G_{30}G_{10}}{G_Y},$$

com $G_Y = G_{10} + G_{20} + G_{30}$
Se as resistências de cada rede forem iguais:

$$R_Y = \frac{1}{3}R_\Delta$$

Exemplo 1



$$G_{31} = \frac{G_{30}G_{10}}{G_Y} \rightarrow R_{31} = \frac{G_Y}{G_{30}G_{10}}$$

$$G_Y = G_{10} + G_{20} + G_{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} = \frac{10}{9}S$$

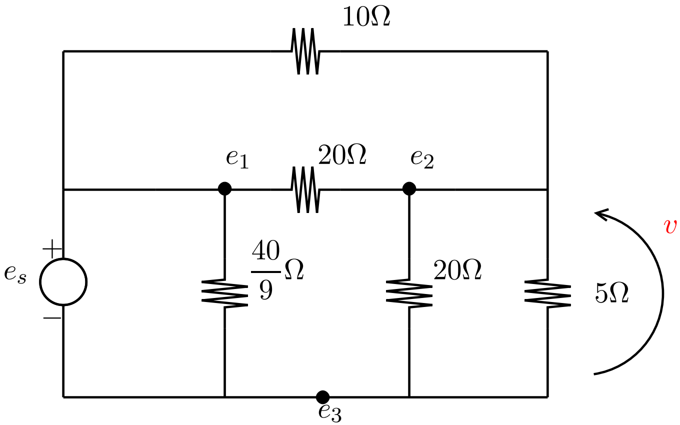
Exemplo 1

$$R_{31} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{40}{9}\Omega$$

$$R_{32} = \frac{G_Y}{G_{20}G_{30}} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}} = 20\Omega$$

$$R_{12} = \frac{G_Y}{G_{10}G_{20}} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}} = 20\Omega$$

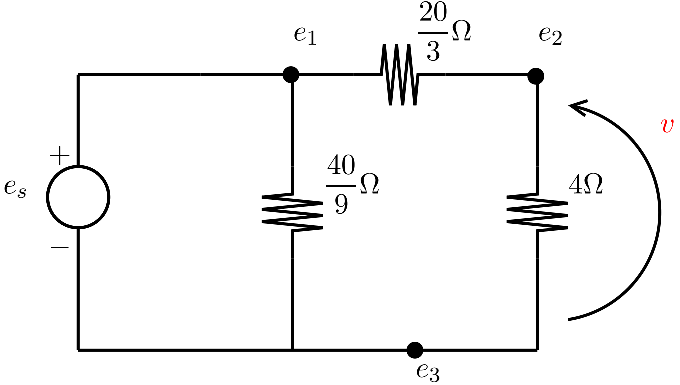
Exemplo 1



Fazendo associação dos resistores em paralelo:

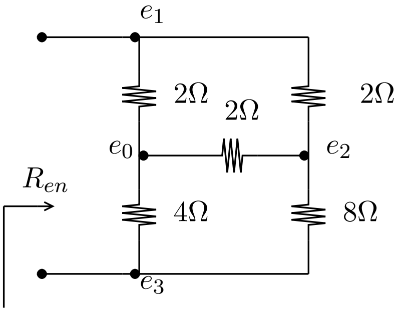
Exemplo 1

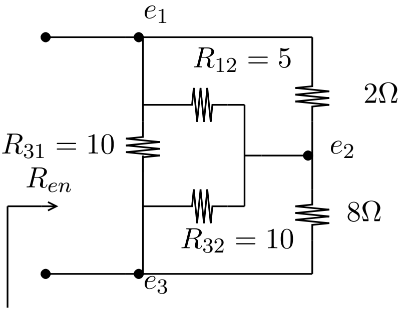
Fazendo associação dos resistores em paralelo:



$$v = e_s \cdot \frac{4}{\frac{20}{3} + 4} = 0{,}375 e_s$$

Exemplo 2



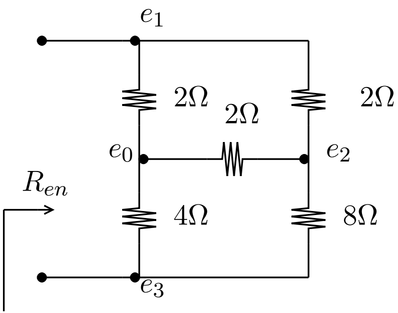


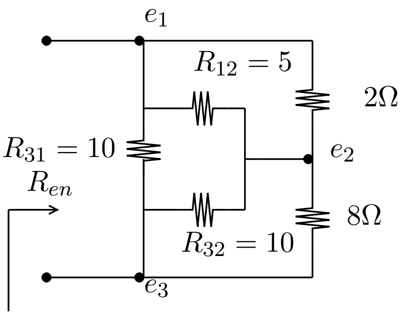
$$R_{12} = \frac{G_Y}{G_{10}G_{20}}$$

$$G_y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}S$$

$$\rightarrow R_{12} = \frac{5}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 5\Omega$$

Exemplo 2



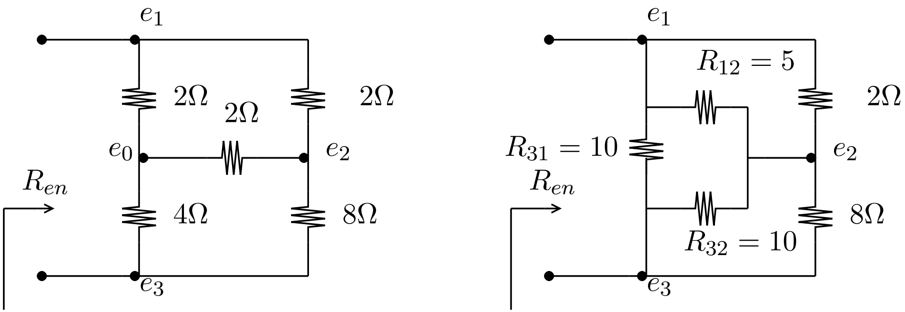


$$R_{12} = 5\Omega$$

$$R_{32} = \frac{G_Y}{G_{20}G_{30}} = \frac{5}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} = 10\Omega$$

$$R_{31} = R_{32} = 10\Omega$$

Exemplo 2



$$R_{12} = 5\Omega$$

$$R_{32} = 10\Omega$$

$$R_{31} = 10\Omega$$

$$\boxed{R_{eq} = 10//(5//2 + 8//10) = 3{,}7\Omega}$$