Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

PSI3211

Circuitos Elétricos I

Bloco 7

Redes de 2ª Ordem

Profª Denise Consonni

Redes de 2ª Ordem

Equação diferencial ordinária, linear, coeficientes constantes, 2ª ordem

Sistemas de 2 equações de 1ª ordem

Redes
- R , L , C   1 malha ou 1 par de nós
- R + 2C ,   R + 2L

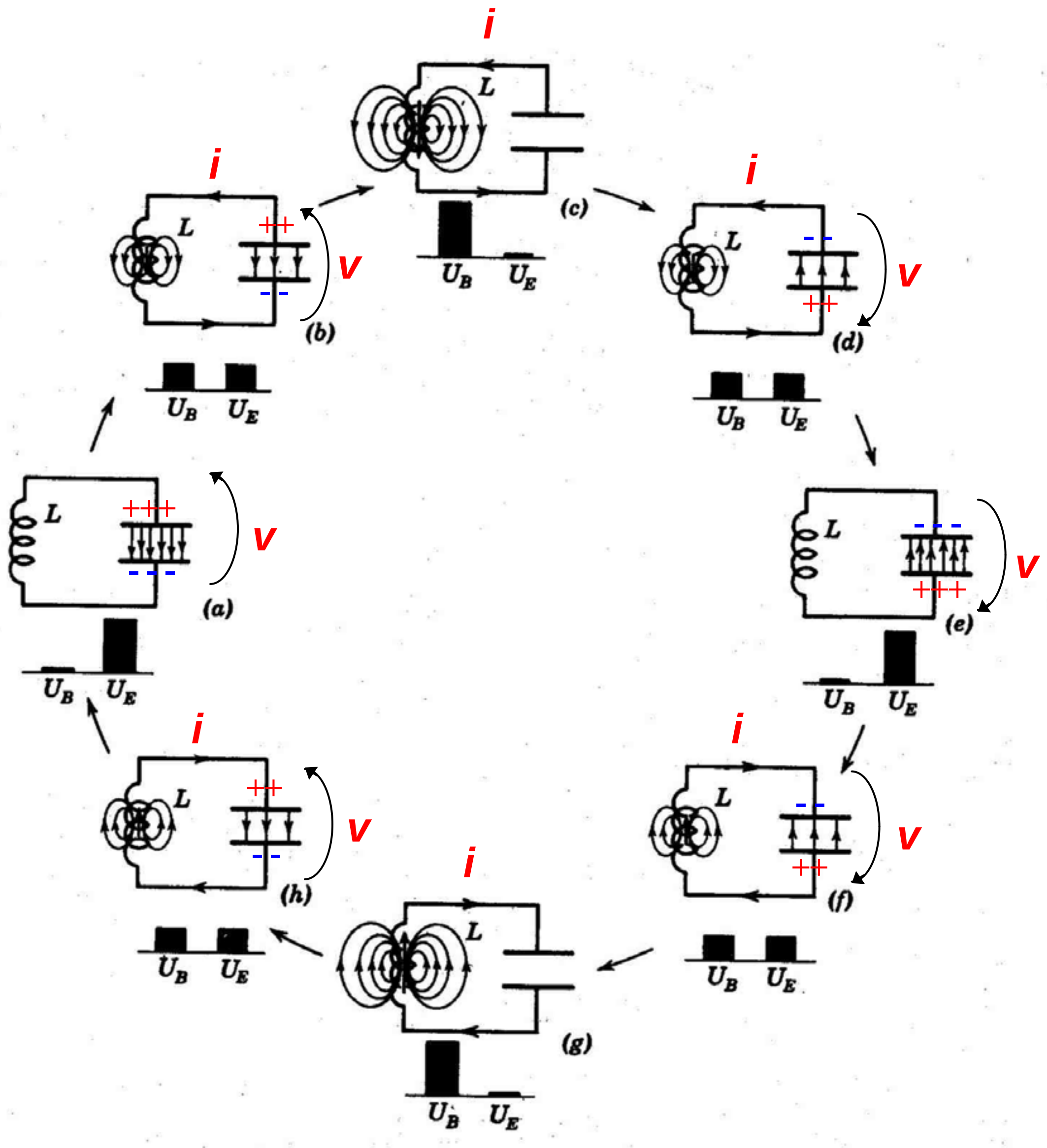
Duas condições iniciais

- v_0 resposta (t_0)
- i_0 derivada da resposta (t_0)

Aplicações :

Circuitos sintonizados
Filtros passa-banda
Modelos de circuitos reais

CIRCUITO LC IDEAL

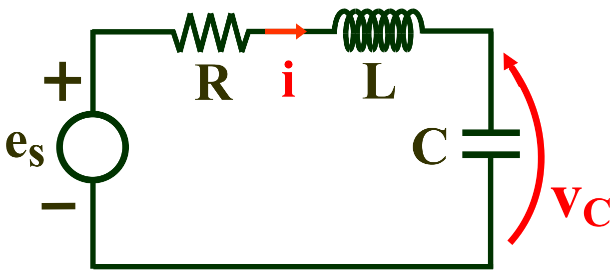


Ciclo de frequência:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Circuito R L C

Série

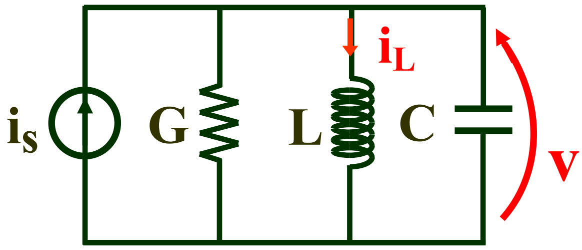


$2^{\underline{a}}$ L. K.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_s$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{de_s}{dt}$$

Paralelo



$1^{\underline{a}}$ L. K.

$$C\frac{dv}{dt} + Gv + \frac{1}{L}\int v\,dt = i_s$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{G}{C}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{1}{C}\frac{di_s}{dt}$$

Comportamento Livre

$e_s = 0$ $\qquad$ $i_s = 0$

Condições iniciais

$i(t_0)$, $v_C(t_0)$ $\qquad$ $v(t_0)$, $i_L(t_0)$

Equação característica

$$\boxed{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0}$$

$$\boxed{\alpha \triangleq R/2L}$$

$$\boxed{\omega_0^2 \triangleq 1/LC}$$

$$\boxed{s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0}$$

$$\boxed{\alpha \triangleq G/2C}$$

$$\boxed{\omega_0^2 \triangleq 1/LC}$$

Equação Característica

$$\boxed{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0}$$

$$\boxed{s_{1,\,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

raízes ou autovalores ou frequências complexas próprias

- $s_1 \neq s_2$ **Distintos**

$$A_1 e^{s_1 t} \quad , \qquad A_2 e^{s_2 t}$$

Solução geral : $\boxed{A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$

- $s_1 = s_2$ **Duplos**

$$A_1 e^{s_1 t} \quad , \qquad A_2\, t\, e^{s_1 t}$$

Solução geral : $\boxed{A_1 e^{s_1 t} + A_2\, t\, e^{s_1 t}}$

Circuito R L C série

Comportamento Livre

$$\begin{cases} i(t) = I_1 e^{s_1 t} + I_2 e^{s_2 t} \\ \text{ou} \\ i(t) = I_1 e^{s_1 t} + I_2 t e^{s_1 t} \end{cases}$$

Constantes de integração : para $s_1 \neq s_2$

1 $\boxed{i(0) = I_1 + I_2}$

2ª Lei K :

$$L \frac{d\, i(0)}{dt} + R\, i(0) + v(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\, i(0)}{dt} = \frac{-R}{L} i(0) - \frac{v(0)}{L}$$

2 $$\boxed{\frac{-R}{L} i(0) - \frac{v(0)}{L} = s_1 I_1 + s_2 I_2}$$

2 equações **2 incógnitas**

Circuito R L C série

cont.

Constantes de integração : para $s_1 = s_2$

$$\begin{cases} i(0) = I_1 & (1) \\ -\dfrac{R}{L}\, i(0) - \dfrac{v(0)}{L} = s_1 I_1 + I_2 & (2) \end{cases}$$

2 equações **2 incógnitas**

Soluções RLC Série

$$\boxed{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

1 – Circuito Superamortecido

$$\alpha^2 > \omega_0^2$$

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

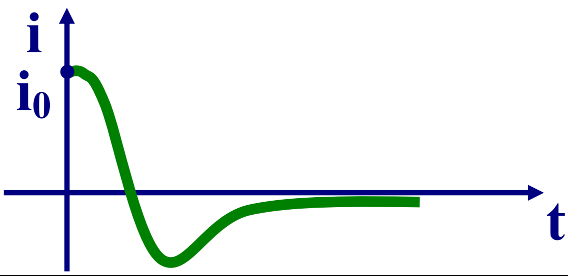
$$s_{1,2} = -\alpha \pm \beta$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Solução: $\sum$ 2 exponenciais decrescentes

$$i(t) = I_1 e^{s_1 t} + I_2 e^{s_2 t}$$

$$i(t) = e^{-\alpha t}\left[i_0\left(\cosh(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{senh}(\beta t)\right) - \frac{v_0}{\beta L}\operatorname{senh}(\beta t)\right]$$



Soluções RLC Série

cont.

$$\boxed{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

2 – Circuito Oscilatório

$$\boxed{\alpha^2 < \omega_0^2}$$ **ou** $$\boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm j\,\omega_d} \Rightarrow \boxed{\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

(complexos conjugados)

$$i(t) = I_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + I_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t}$$

$$\boxed{I_1 = I_2^*}$$

$$\boxed{i(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[I_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} \right]}$$

a) $i(t) = I_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \psi)$

$$\boxed{I_m = \sqrt{i_0^2 + \left(\frac{\alpha}{\omega_d} i_0 + \frac{1}{L\omega_d} v_0 \right)^2}}$$

$$\boxed{\psi = \mathrm{arctg}\left(\frac{v_0}{L\omega_d i_0} + \frac{\alpha}{\omega_d} \right)}$$

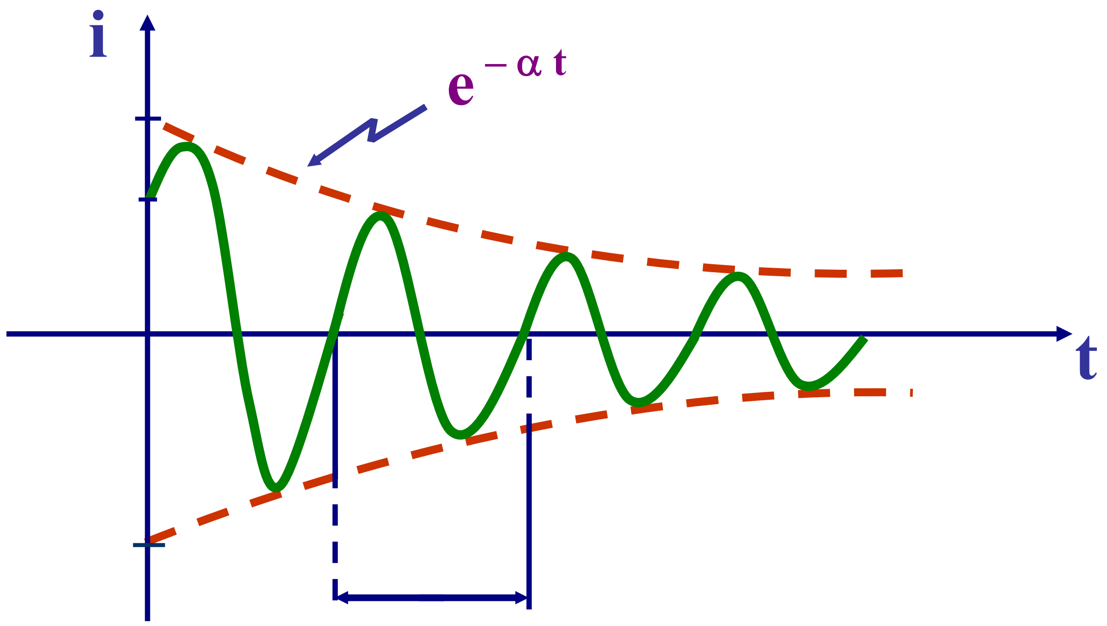
Soluções RLC Série

cont.

b) $i(t) = B_1\, e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2\, e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega_d t$

$$\boxed{B_1 = i_0}$$

$$\boxed{B_2 = -\frac{\alpha}{\omega_d}\, i_0 - \frac{v_0}{L\,\omega_d}}$$



$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\boxed{\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

Circuito Oscilatório

Casos Particulares

a) $\alpha = 0$ $\quad \omega_d = \omega_0$ $\quad$ LC ideal

$$i(t) = \sqrt{i_0^2 + \frac{C}{L} v_0^2}\ \cos(\omega_0 t + \psi)$$

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{C}{L}}\ \frac{v_0}{i_0}\right)$$

b) $\alpha <<< \omega_0 \quad \rightarrow \quad \omega_d \approx \omega_0$

circuito altamente oscilatório

$$i(t) \cong \sqrt{i_0^2 + \frac{C}{L} v_0^2}\ e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \psi)$$

Índice de Mérito : $Q_0 \triangleq \omega_0 L / R$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \Rightarrow \quad Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

$$Q \rightarrow \frac{\text{energia armazenada}}{\text{energia dissipada}}$$

Soluções RLC Série

cont.

$$\boxed{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

3 – Amortecimento crítico

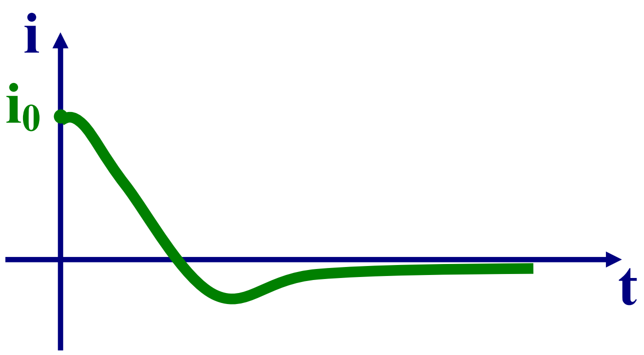
$\alpha = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = s_2 = -\alpha$

$$\boxed{R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

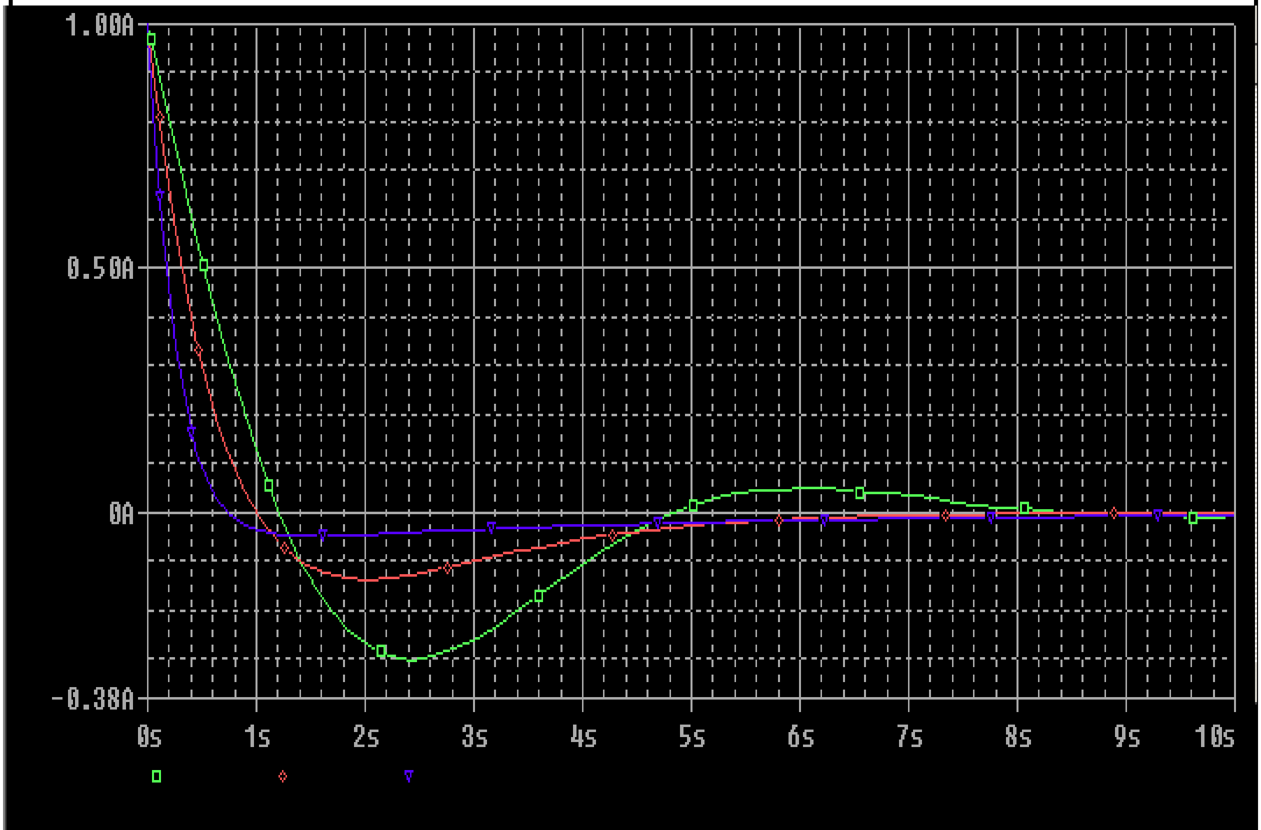
Solução : $i(t) = I_1 e^{-\alpha t} + I_2 t e^{-\alpha t}$

Impondo as condições iniciais :

$$\boxed{i(t) = \left[(1 - \alpha t) i_0 - \frac{1}{L} v_0 t \right] e^{-\alpha t}}$$



Comparação das respostas livres dos Circuitos de 2^a ordem



□ Oscilatório ou subamortecido

○ Amortecimento crítico

▽ Superamortecido

Circuito RLC - Comportamento Livre

- Resposta livre ⇨ F C P s_1 , s_2

- s_1 , s_2 reais ⇨ Pulso Bidirecional

Tempo de amortecimento: t_s

Superamortecido ⇨ t_s grande

- s_1 , s_2 complexos

Resposta oscilatória amortecida

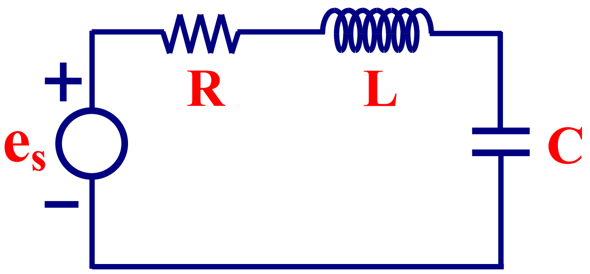
α → coeficiente de amortecimento

ω_d → frequência angular amortecida

ω_0 → frequência angular não amortecida

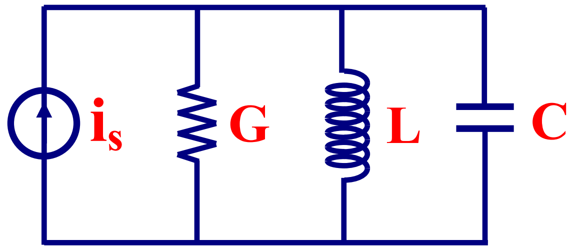
Circuito RLC

RLC Série



$$\alpha \triangleq R/2L$$
$$\omega_0^2 \triangleq 1/LC$$

RLC Paralelo



$$\alpha \triangleq G/2C$$
$$\omega_0^2 \triangleq 1/LC$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$
$$Q_0 = \omega_0 / 2\alpha$$

$$Q_0 = \omega_0 L / R$$

$$Q_0 = \omega_0 C / G$$
$$Q_0 = \omega_0 RC$$
$$Q_0 = R / \omega_0 L$$

1 – Superamortecido

$$R > 2\sqrt{L/C}$$

$$R < \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$$

2 – Amortecimento crítico

$$R = R_C = 2\sqrt{L/C}$$

$$R = R_C = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$$

3 – Oscilatório ou Subamortecido

$$R < R_C$$

$$R > R_C$$

Circuito RLC

Resposta Natural

1 – $$f(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

superamortecido

2 – $$f(t) = B_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \psi)$$

ou

$$(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \,\mathrm{sen}\, \omega_d t)\, e^{-\alpha t}$$

subamortecido / oscilatório

3 – $$f(t) = (D_1 t + D_2)\, e^{-\alpha t}$$

amortecimento crítico

$f(t) \rightarrow$ tensão ou corrente

Circuito RLC - Série

Resposta ao degrau $\quad e_s(t) = E\,H(t)$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{LC}\int i\,dt + \frac{1}{L} v_0 = \frac{E}{L}$$

ou $\quad t > 0$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{LC}\int i\,dt + \frac{1}{L}(v_0 - E) = 0$$

Como o circuito livre mas com condição inicial $= (v_0 - E)$

a) Superamortecido

$$i(t) = e^{-\alpha t}\left[i_0 \left(\cosh\beta t - \frac{\alpha}{b}\,\mathrm{senh}\,\beta t \right) - \frac{(v_0 - E)}{\beta L}\,\mathrm{senh}\,\beta t \right]$$

Se $\quad i_0 = v_0 = 0$

$$i(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha t}\,\mathrm{senh}\,\beta t$$

b) Oscilatório $\quad i_0 = v_0 = 0$

$$i(t) = \frac{E}{L\omega_d} e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}\,(\omega_d t)$$

c) Amortecimento crítico $\quad i_0 = v_0 = 0$

$$i(t) = \frac{E}{L}\, t\, e^{-\alpha t}$$

Circuito RLC

Resposta ao Degrau

1 – $$f(t) = f_p + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

superamortecimento

2 – $$f(t) = f_p + B_m\, e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \psi)\, e^{-\alpha t}$$

ou

$$f(t) = f_p + (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \,\mathrm{sen}\, \omega_d t)\, e^{-\alpha t}$$

oscilatório

3 – $$f(t) = f_p + (D_1 t + D_2)\, e^{-\alpha t}$$

amortecimento crítico

$f(t) \rightarrow$ tensão ou corrente

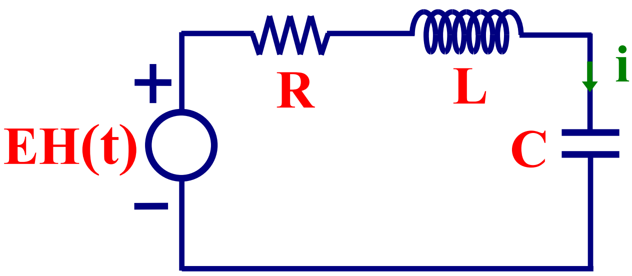
$f_p \rightarrow$ valor final da resposta desejada

Circuito RLC

Resposta ao Degrau

Resposta Permanente

RLC Série



$t \to \infty$

$v_C \to E$

$v_R \to 0$

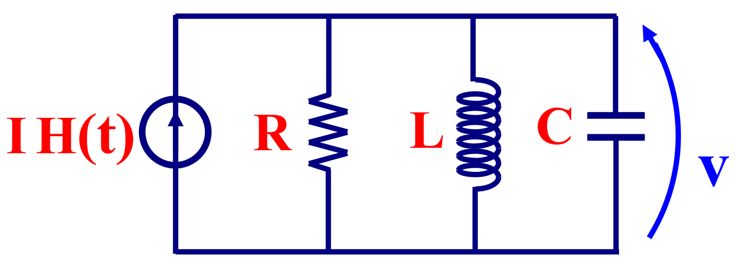
$v_L \to 0$

L curto

C aberto

$i \to 0$

RLC Paralelo



$t \to \infty$

$i_C \to 0$

$i_R \to 0$

$i_L \to I$

$v \to 0$

Circuito RLC

Resposta ao Impulso

RLC série

$e_s(t) = \psi\,\delta(t)$ ⇨ Degrau de corrente no indutor $= \psi/L$

RLC paralelo

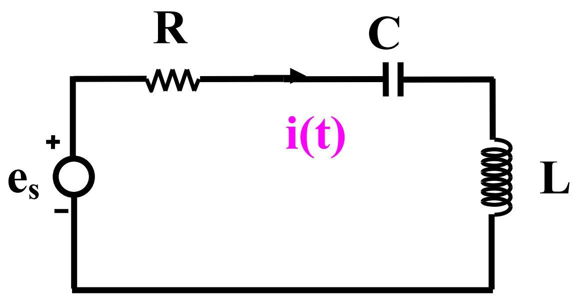
$i_s(t) = Q\,\delta(t)$ ⇨ Degrau de tensão no capacitor $= Q/C$

$t > 0 \rightarrow$ Comportamento livre

CIRCUITO RLC SÉRIE

Excitação Senoidal

$$\hat{E}_s = E \angle \theta$$



Resposta Completa : **Transitória** + **Permanente**

depende das FCP → Transitória

Fasores, Impedâncias → Permanente

$$Z(j\omega) = \frac{\hat{E}_s}{\hat{I}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$i_p(t) = \mathrm{Re}\,(\,\hat{I}\,e^{j\omega t}\,)$$

$$i(t) = A_1\, e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \left|\hat{I}\right| \cos(\omega t + \theta - \phi)$$

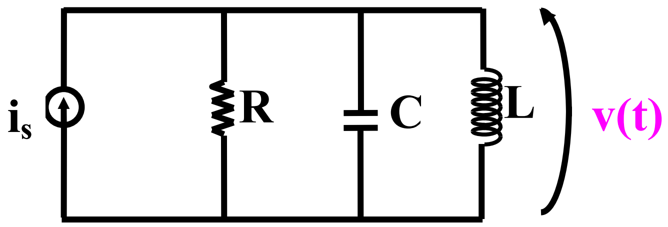
Oscilatórios :

$$i(t) = I_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta_1) + \left|\hat{I}\right| \cos(\omega t + \theta - \phi)$$

CIRCUITO RLC PARALELO

Excitação Senoidal

$$\hat{I}_s = I \angle \theta$$



<u>Resposta Completa</u> : **Transitória** **+** **Permanente**

depende das FCP — **Fasores, Admitâncias**

$$Y(j\omega) = \frac{\hat{I}_s}{\hat{V}} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$v_p(t) = \mathrm{Re}\,(\,\hat{V}\,e^{j\omega t}\,)$$

$$v(t) = A_1\,e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \left|\hat{V}\right| \cos(\omega t + \theta - \phi)$$

Oscilatórios :

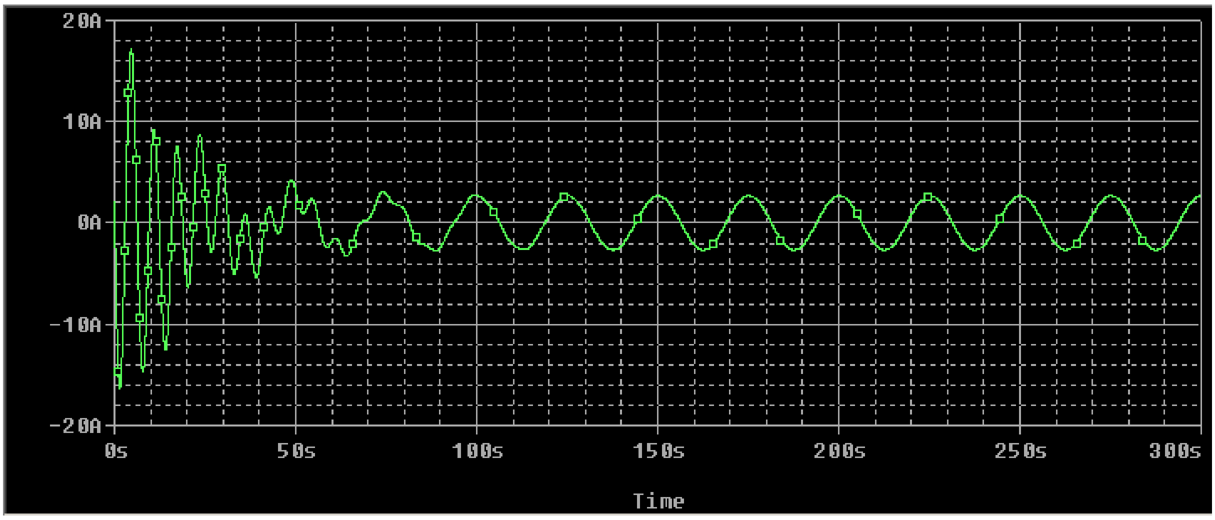
$$v(t) = V_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta_1) + \left|\hat{V}\right| \cos(\omega t + \theta - \phi)$$

Circuito RLC

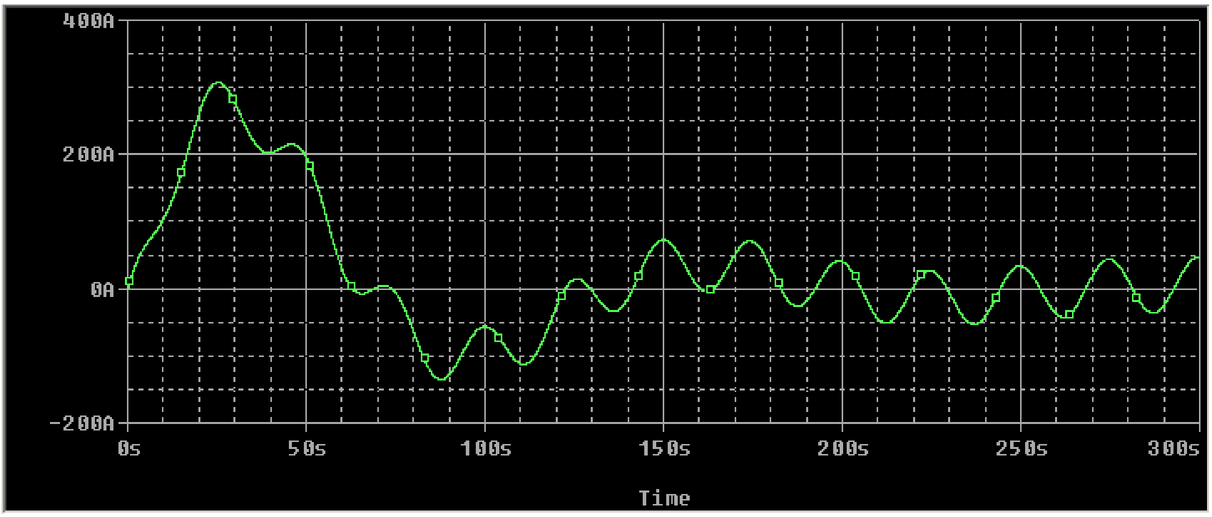
Transitório com excitação senoidal

Oscilatórios :

$$v(t) = \mathrm{V}_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d\ t+\theta_1) + \left|\hat{\mathrm{V}}\right|\cos(\omega\, t+\theta-\phi)$$



$$\omega_d \approx 4\omega$$

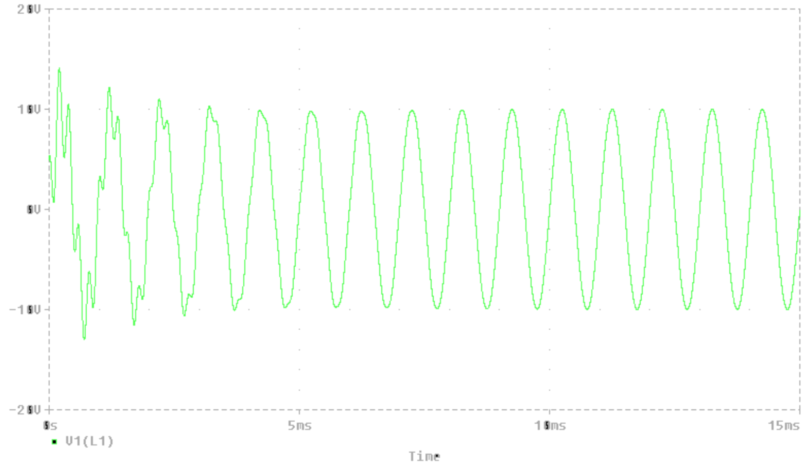


$$\omega_d \approx 0{,}2\omega$$

Circuito RLC

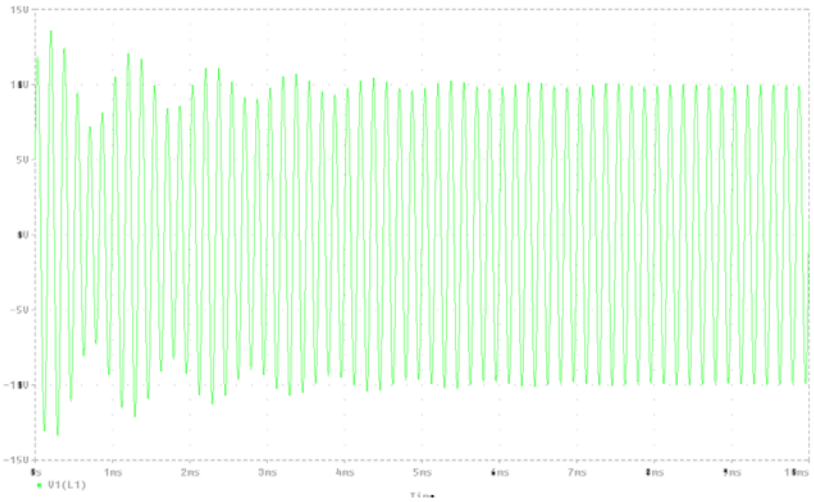
Transitório com Excitação Senoidal

$\omega < \omega_d$

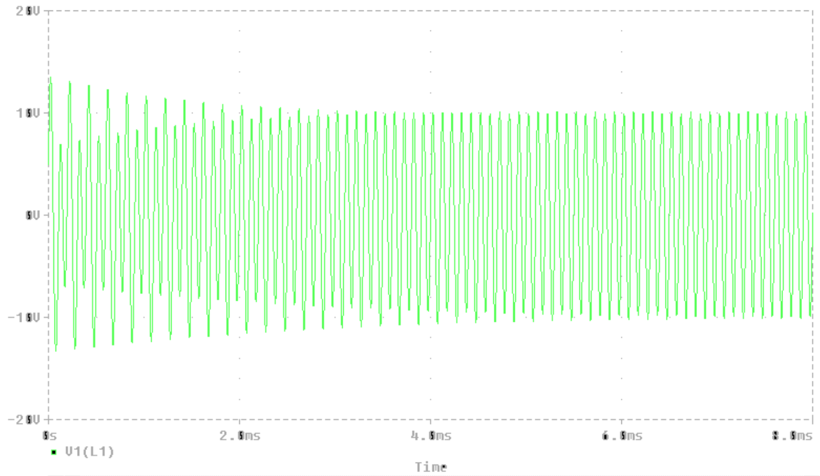


$\omega \approx \omega_d$

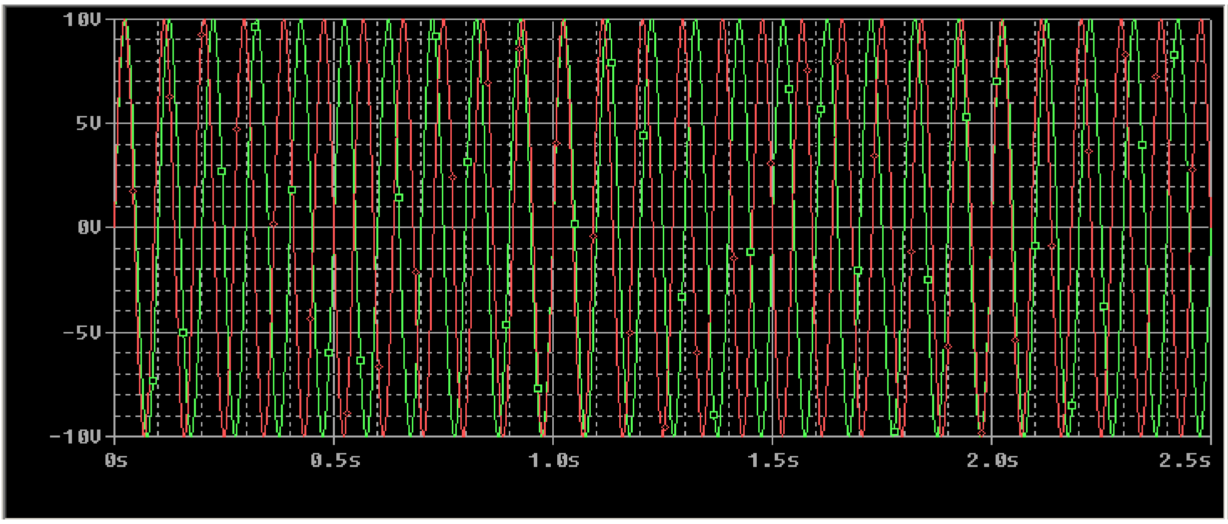
(batimento)



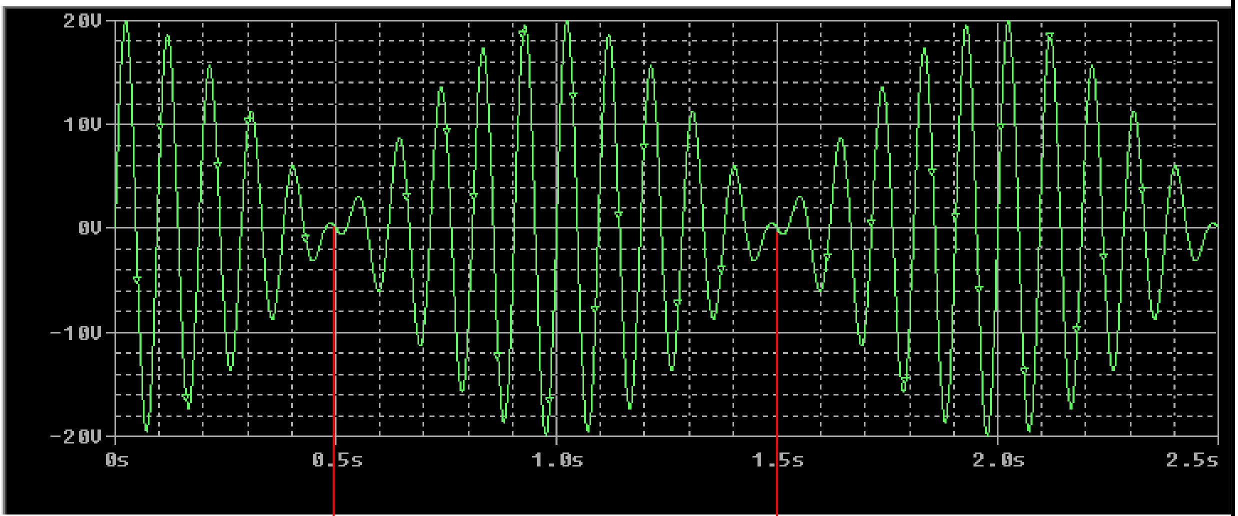
$\omega > \omega_d$



Batimento



soma de 2 senoides de frequências próximas: $\omega_1 \approx \omega_2$



Período do Batimento

Resultado: **Senoide de frequência** $\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

com Envoltória: Senoide de frequência $\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$

Frequência de Batimento: $\omega_1 - \omega_2$

Ressonância

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$\phi = \text{arctg}\,[\,(\omega L - 1/\omega C)\,/\,R\,]$$

Para $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

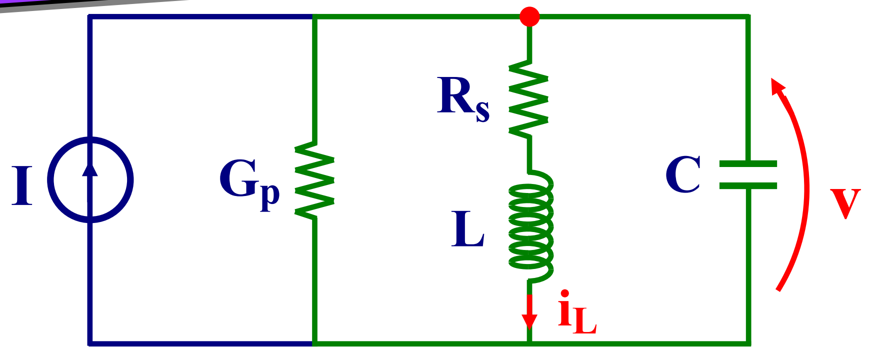
$\phi = 0 \rightarrow$ $\hat{I}$ **e** $\hat{V}$ **em fase**

$Z = R \rightarrow$ **impedância puramente resistiva**

$|\hat{I}|_{max} \rightarrow$ **resposta máxima permanente**

$$|\hat{I}| = \frac{|\hat{E}_s|}{|Z|}$$

Outros Circuitos de 2ª Ordem



Circuito Livre:

$$\begin{cases} 1^{\underline{a}}\ \text{LK}: \quad C\dfrac{dv}{dt} + G_p v + i_L = 0 \\[2ex] 2^{\underline{a}}\ \text{LK}: \quad L\dfrac{di_L}{dt} + R_s i_L = v \end{cases}$$

Equação Resultante :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \underbrace{\frac{L G_p + R_s C}{LC}}_{2\alpha}\frac{dv}{dt} + \underbrace{\frac{R_s G_p + 1}{LC}}_{\omega_0^2} v = 0$$

Condições iniciais :

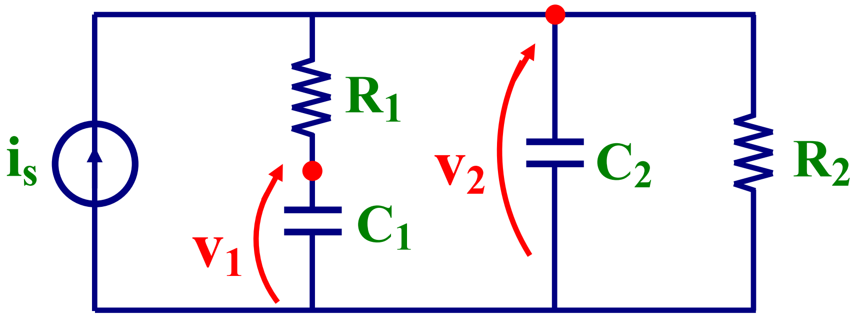
$$\boxed{v(t_0) = v_0 \qquad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t_0} = \frac{-1}{C}\left(i_{L0} + G_p v_0\right)}$$

Resposta Permanente : $v_p(t) = \dfrac{I R_p}{R_s + R_p} R_s$

Resposta Completa :

$$\boxed{v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + v_p(t)}$$

Outros Circuitos de 2ª Ordem



Circuito Livre:

$$\begin{cases} 1^{\underline{a}}\ \text{LK}: \ C_1 \dfrac{dv_1}{dt} = \dfrac{v_2 - v_1}{R_1} \\[2ex] 1^{\underline{a}}\ \text{LK}: \ C_2 \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{v_1 - v_2}{R_1} - \dfrac{v_2}{R_2} \end{cases}$$

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_1}{dt} + \omega_0^2 v_1 = 0$$

FCP reais negativas !

Para $i_s(t) = I\,H(t)$: resposta permanente:

$$v_{p1}(t) = I R_2$$

Resposta completa :

$$\boxed{v_1(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} + v_{p1}(t)}$$

CIRCUITOS DE 2ª ORDEM – TRATAMENTO GENERALIZADO

(Prof. Flávio A. M. Cipparrone)

Equação Diferencial Linear de Segunda Ordem

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega_0^2 x(t) = x_s(t)$$

Equação característica: $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

FCPs: $\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$ (1)

Dois casos

1. $s_1 \neq s_2$ => $x(t) = X_1 e^{s_1 t} + X_2 e^{s_2 t} + x_p(t)$
2. $s_1 = s_2$ => $x(t) = X_1 e^{s_1 t} + X_2 t e^{s_1 t} + x_p(t)$

Solução no caso de $s_1 \neq s_2$:

$$x(t) = X_1 e^{s_1 t} + X_2 e^{s_2 t} + x_p(t) \quad (2)$$

$$x'(t) = s_1 X_1 e^{s_1 t} + s_2 X_2 e^{s_2 t} + x_p'(t) \quad (3)$$

Ideia: Achar X_1 e X_2 a partir das condições iniciais **(em t= 0_+)**

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + x_p(0) &= x(0) \\ s_1 X_1 + s_2 X_2 + x'_p(0) &= x'(0) \end{aligned} \qquad (4)$$

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) - x_p(0) \\ x'(0) - x'_p(0) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Definindo:

$$\boxed{\begin{aligned} a &\equiv x(0) - x_p(0) \\ b &\equiv x'(0) - x'_p(0) \end{aligned}} \qquad (6)$$

Lembrando:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Resolvendo o sistema (5):

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s_2 - s_1} \begin{bmatrix} s_2 & -1 \\ -s_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s_2 - s_1} \begin{bmatrix} s_2 a - b \\ -s_1 a + b \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$x(t) = \frac{s_2 a - b}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{-s_1 a + b}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} + x_p(t) \tag{9}$$

Caso $s_{1,2}$ reais (superamortecimento) $\Rightarrow$ resolvido

Solução no caso complexo:

$s_{1,2}$ complexos conjugados (subamortecimento)

Definindo:

$$\omega_d \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Fica: $s_1 = -\alpha + j\omega_d \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d$ (10)

Calculando X_1 e X_2 por (8) com os $s_{1,2}$ dados por (10)

$\Rightarrow$ X_1 e X_2 são complexos conjugados.

Ainda: $(e^{zt})' = e^{z't}$ e $(z_1 z_2)' = z_1' z_2'$

Resulta: $X_1 e^{s_1 t}$ e $X_2 e^{s_2 t}$ são conjugados $\Rightarrow$ (9) fica:

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{ \left[\frac{(-\alpha - j\omega_d)a - b}{-2j\omega_d} \right] e^{(-\alpha + j\omega_d)t} \right\} + x_p(t)$$

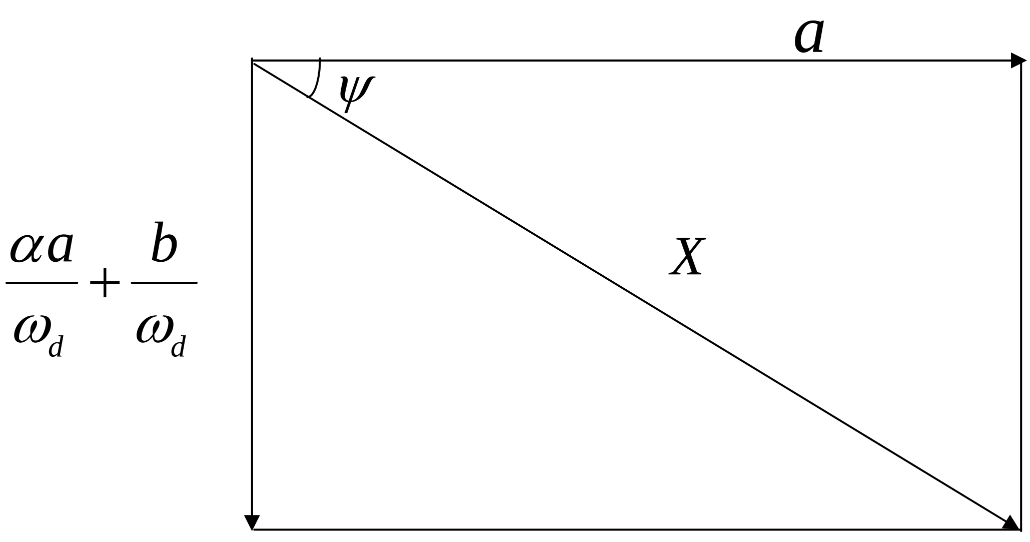
$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{\left[a - j\left(\frac{\alpha a}{\omega_d} + \frac{b}{\omega_d}\right)\right] e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_d t + j\mathrm{sen}\,\omega_d t\right)\right\} + x_p(t)$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[a\cos\omega_d t + \left(\frac{\alpha a}{\omega_d} + \frac{b}{\omega_d}\right)\mathrm{sen}\,\omega_d t\right] + x_p(t) \qquad (11)$$

Lembrando que $\mathrm{sen}\,\omega_d t = \cos(\omega_d t - 90^\circ)$ e que podemos somar duas cossenoides de mesma frequência empregando fasores:

$$\boxed{x(t) = Xe^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \psi) + x_p(t)} \qquad (12)$$

Pelo diagrama abaixo:



$$\boxed{\begin{aligned} X &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{\alpha a}{\omega_d} + \frac{b}{\omega_d}\right)^2} \\ \psi &= \mathrm{atan2}\left(-\left(\frac{\alpha a}{\omega_d} + \frac{b}{\omega_d}\right), a\right) \end{aligned}} \qquad (13)$$

Solução no caso de $s_1 = s_2$:

amortecimento crítico

$$x(t) = X_1 e^{-\alpha t} + X_2 t e^{-\alpha t} + x_p(t) \qquad (14)$$

$$x'(t) = -\alpha X_1 e^{-\alpha t} + X_2 e^{-\alpha t} - \alpha X_2 t e^{-\alpha t} + x_p'(t) \qquad (15)$$

Impondo t=0,vem:

$$\begin{aligned} X_1 + x_p(0) &= x(0) \\ -\alpha X_1 + X_2 + x_p'(0) &= x'(0) \end{aligned} \qquad (16)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} X_1 &= x(0) - x_p(0) = a \\ X_2 &= x'(0) - x_p'(0) + \alpha X_1 = b + \alpha a \end{aligned} \qquad (17)$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b + \alpha a \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{x(t) = a e^{-\alpha t} + (b + \alpha a) t e^{-\alpha t} + x_p(t)} \qquad (18)$$