



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

PSI3211

Circuitos Elétricos I

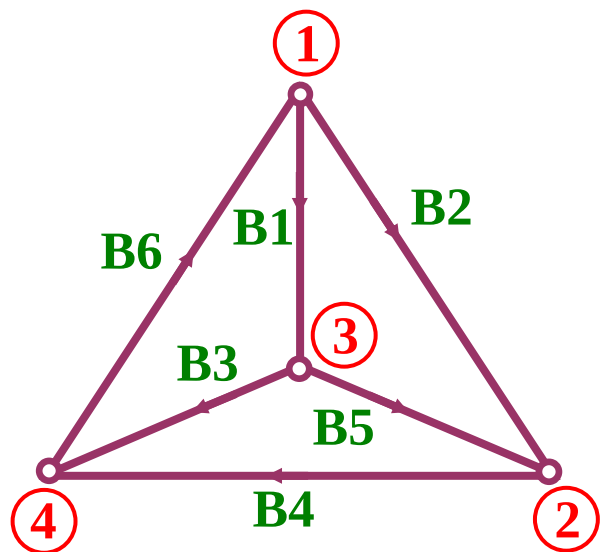
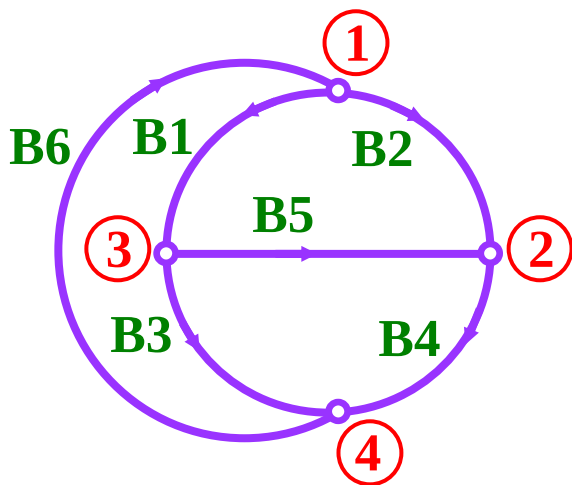
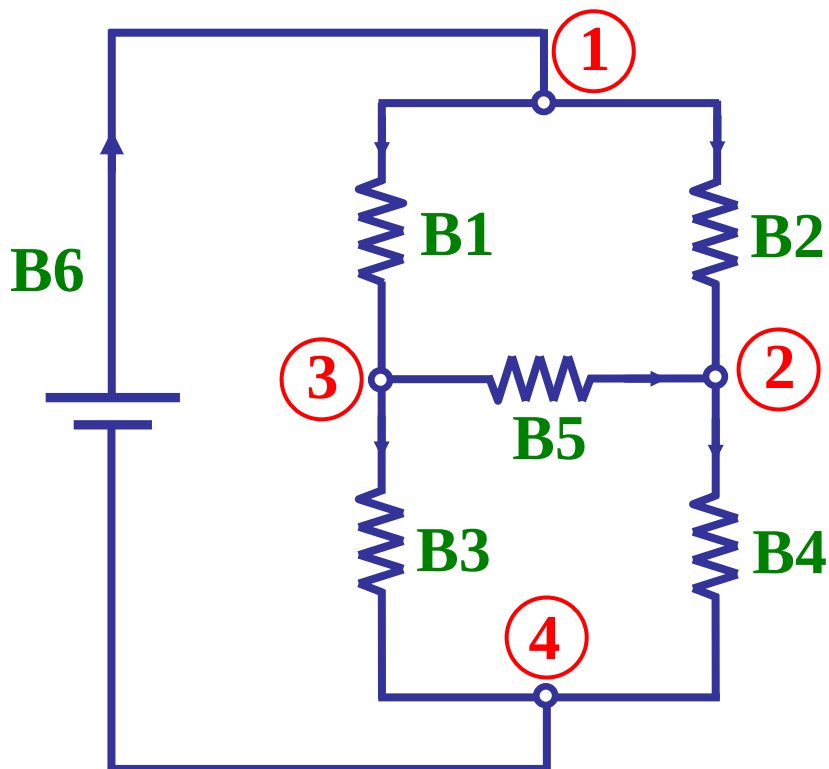
Bloco 3

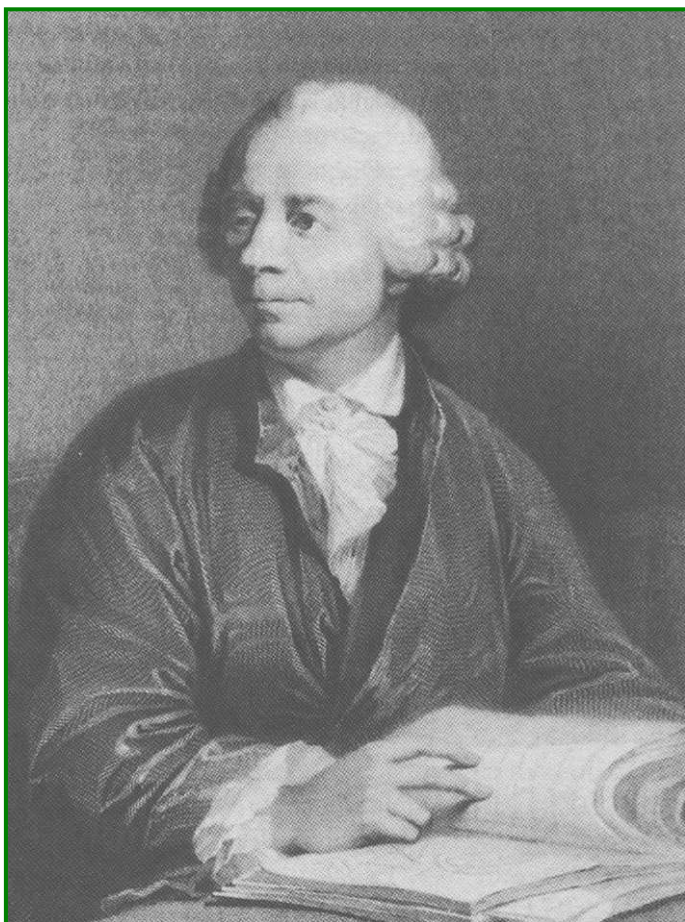
Gráficos, Leis de Kirchhoff

Prof^a Denise Consonni

Circuito em Ponte e Gráficos Associados

→ Topologia do Circuito

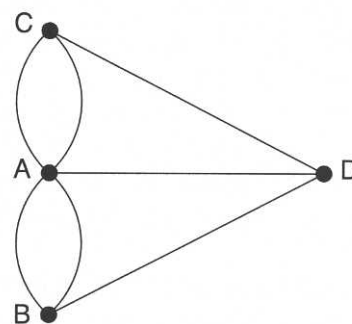
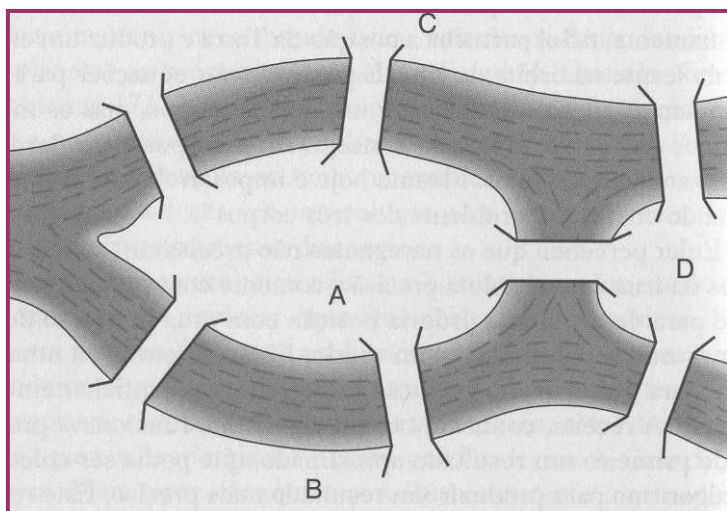




Leonard Euler (1707-1783)

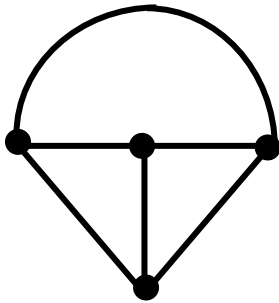
Matemático suíço, produziu cerca de 900 monografias em matemática, música, astronomia, mecânica, ótica, etc...Viveu muito tempo em São Petesburgo (Rússia), protegido pela czarina Catarina, a Grande. Perdeu um olho, e sofreu de cegueira crescente.

Problema da Ponte de Königsberg (1736)



Topologia

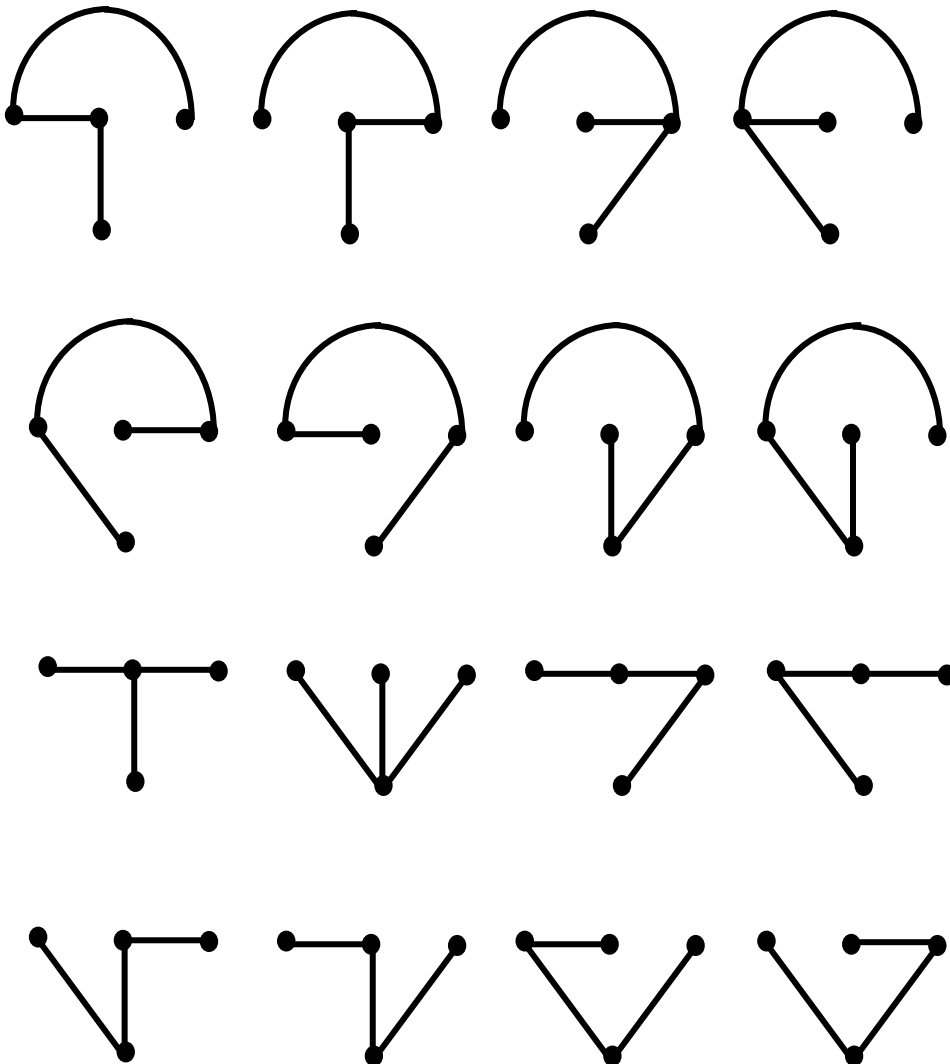
GRÁFICOS



Número de nós = $n_t = 4$
 Número de ramos = $r = 6$
 Ramos de árvore = 3
 Ramos de ligação = 3

Número de árvores =

$$n_t^{(nt-2)} = 16$$



DEFINIÇÕES DE SUBGRÁFICO

- **ÁRVORE** (de gráfico conexo) : subgráfico conexo que contém todos os nós + conjunto de ramos suficiente para interligar os nós $\Rightarrow$ nenhum percurso fechado.
- **LAÇO** : qualquer subgráfico conexo tal que 2 e apenas 2 ramos incidem em cada nó; 2 nós pertencem a cada ramo $\Rightarrow$ trajetória fechada.
- **CORTE** (ou conjunto de corte) (de gráfico conexo) : conjunto de ramos tal que se todos são removidos, o gráfico fica dividido em 2 partes; se todos são removidos menos 1, o gráfico se mantém conexo.

TEOREMA BÁSICO DAS ÁRVORES

Gráfico Conexo: n_t nós e r ramos

- Há um caminho único entre qualquer par de nós em uma árvore

- $n = n_t - 1$ Ramos de árvores

$$\ell = r - n_t + 1 \text{ Ramos de ligação}$$

- cada ramo de ligação $\Rightarrow$ um único laço fundamental

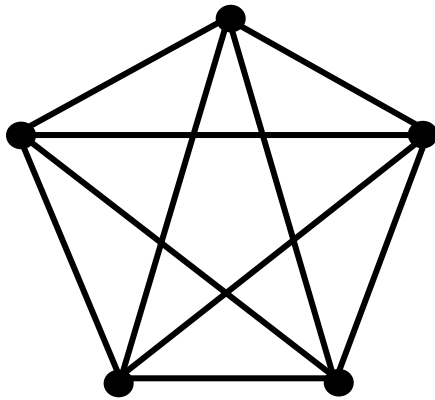
ℓ laços fundamentais

- Cada ramo de árvore $\Rightarrow$ um único corte fundamental

n cortes fundamentais

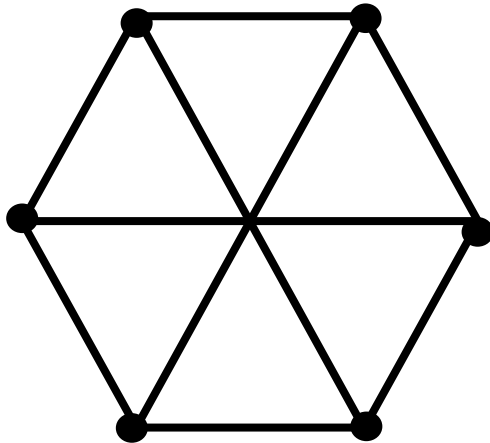
GRÁFICOS DE KURATOVSKY

(não planares)



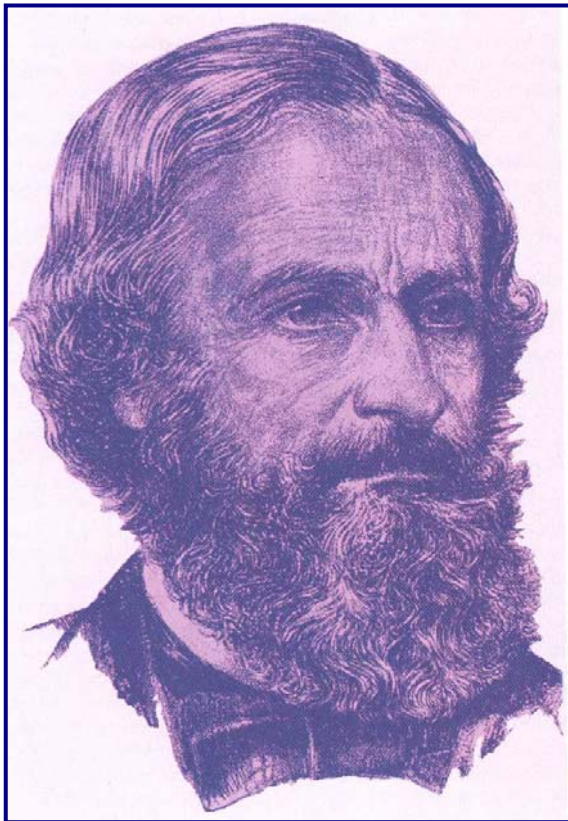
5 nós

10 ramos



6 nós

9 ramos



Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

Físico alemão, publicou seu trabalho sobre correntes e tensões elétricas em 1847. Realizou pesquisas com Robert Bunsen, que resultaram na descoberta do cézio e do rubídio.

1ª. Lei : **Correntes** (nós e cortes)

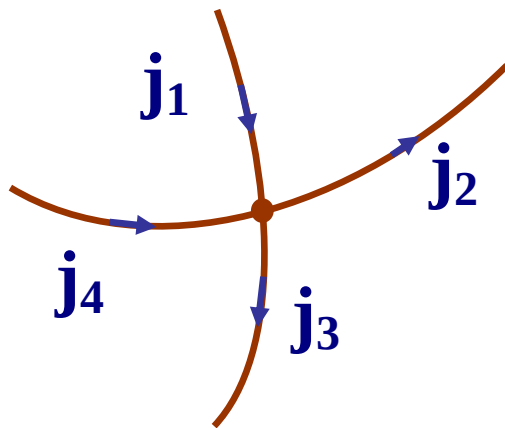
$$\sum_k \pm j_k(t) = 0$$

2ª. Lei : **Tensões** (laços e malhas)

$$\sum_k \pm v_k(t) = 0$$

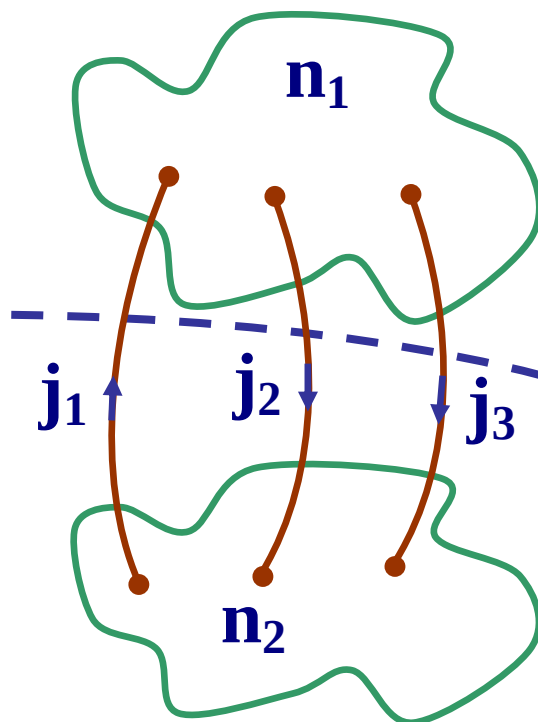
1ª Lei de Kirchhoff

– Aplicada a um nó:



$$-j_1 + j_2 + j_3 - j_4 = 0$$

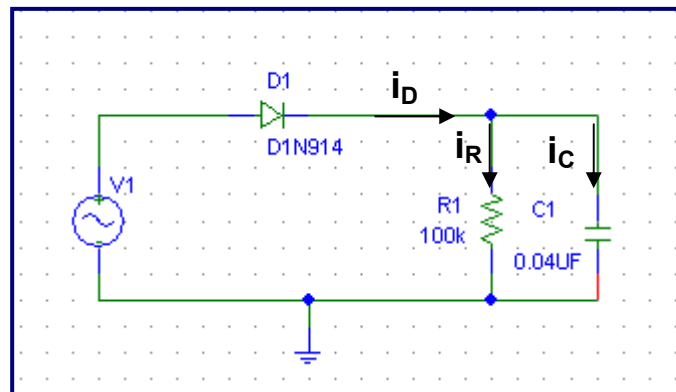
– Aplicada a um corte:



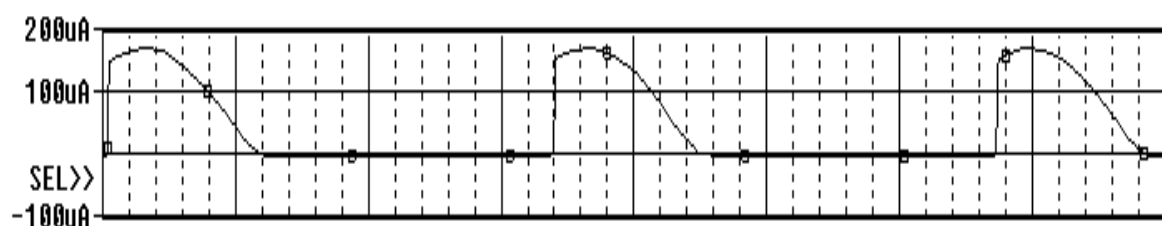
$$j_1 - j_2 - j_3 = 0$$

orientação do
corte

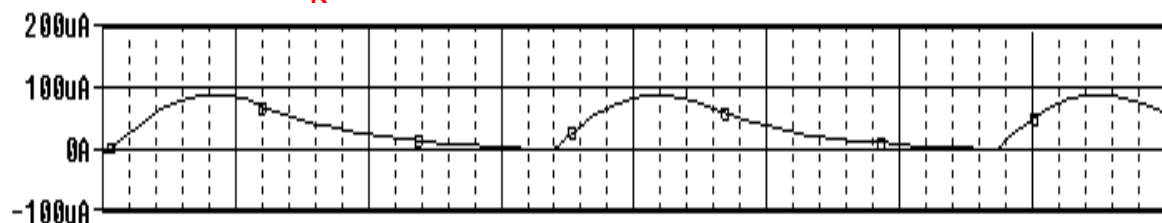
Circuito com Diodo



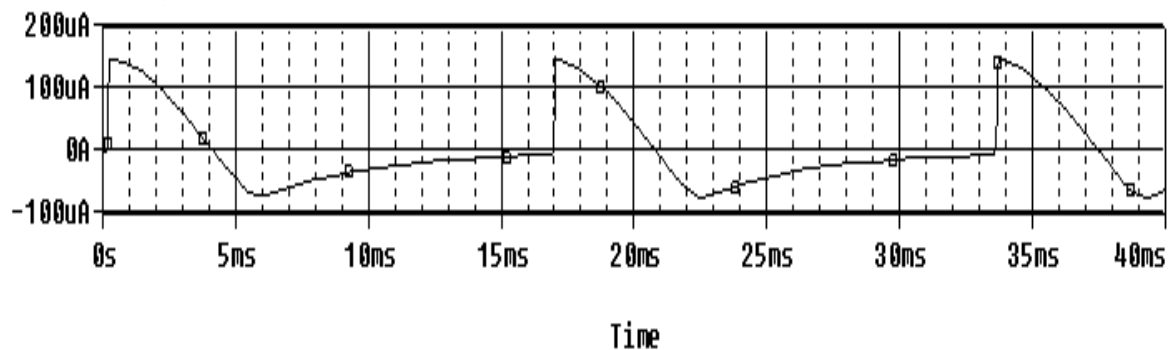
i_D



i_R

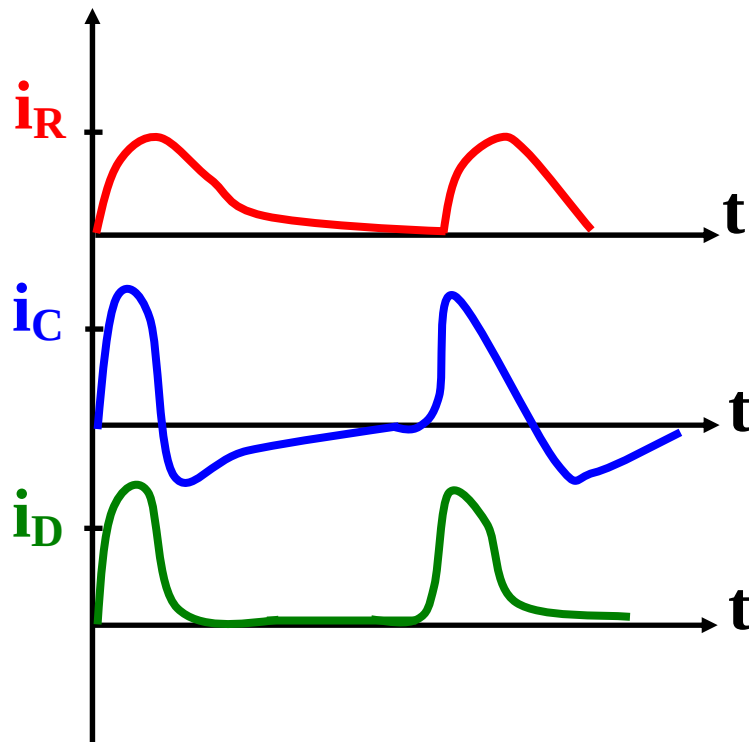
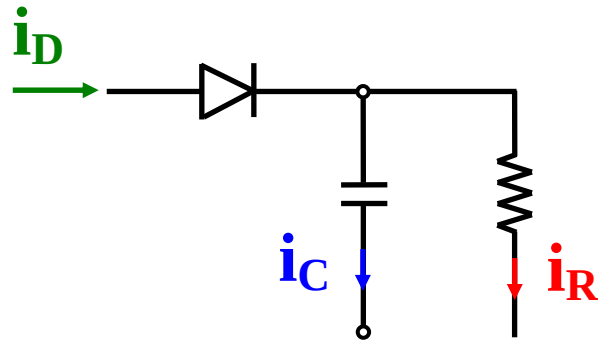


i_C



Simulação com o PSpice

1ª Lei de Kirchhoff



$$i_C + i_R - i_D = 0$$

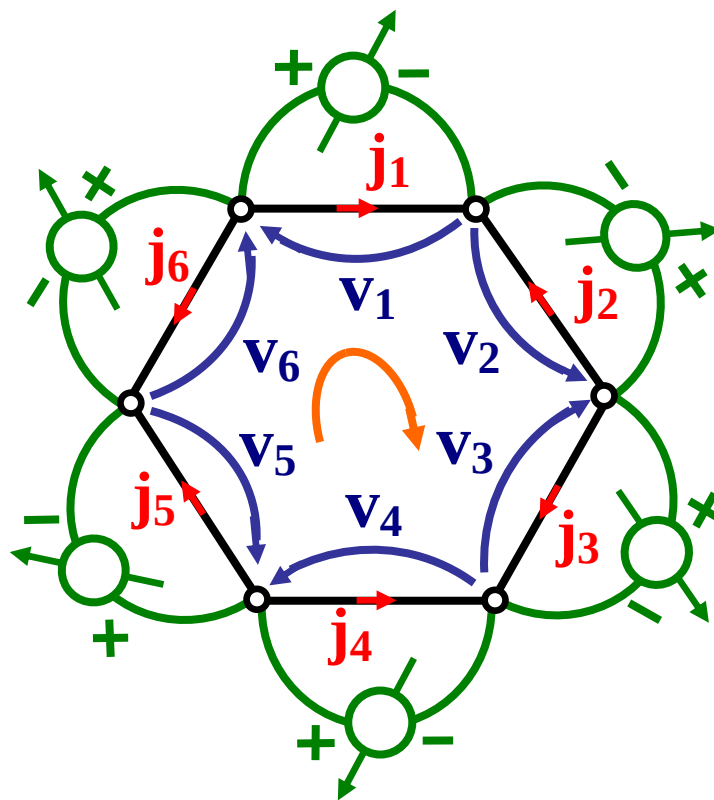
$$i_D = i_C + i_R$$

2ª Lei de Kirchhoff

Aplicada a laços :

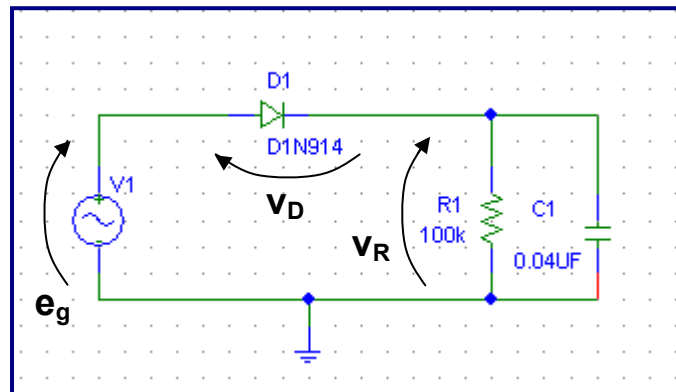
$$\sum_{i=1}^{\ell} \left[\pm v_i(t) \right] = 0 \quad \forall t$$

$\ell = \text{n}^\circ \text{ de ramos no laço}$

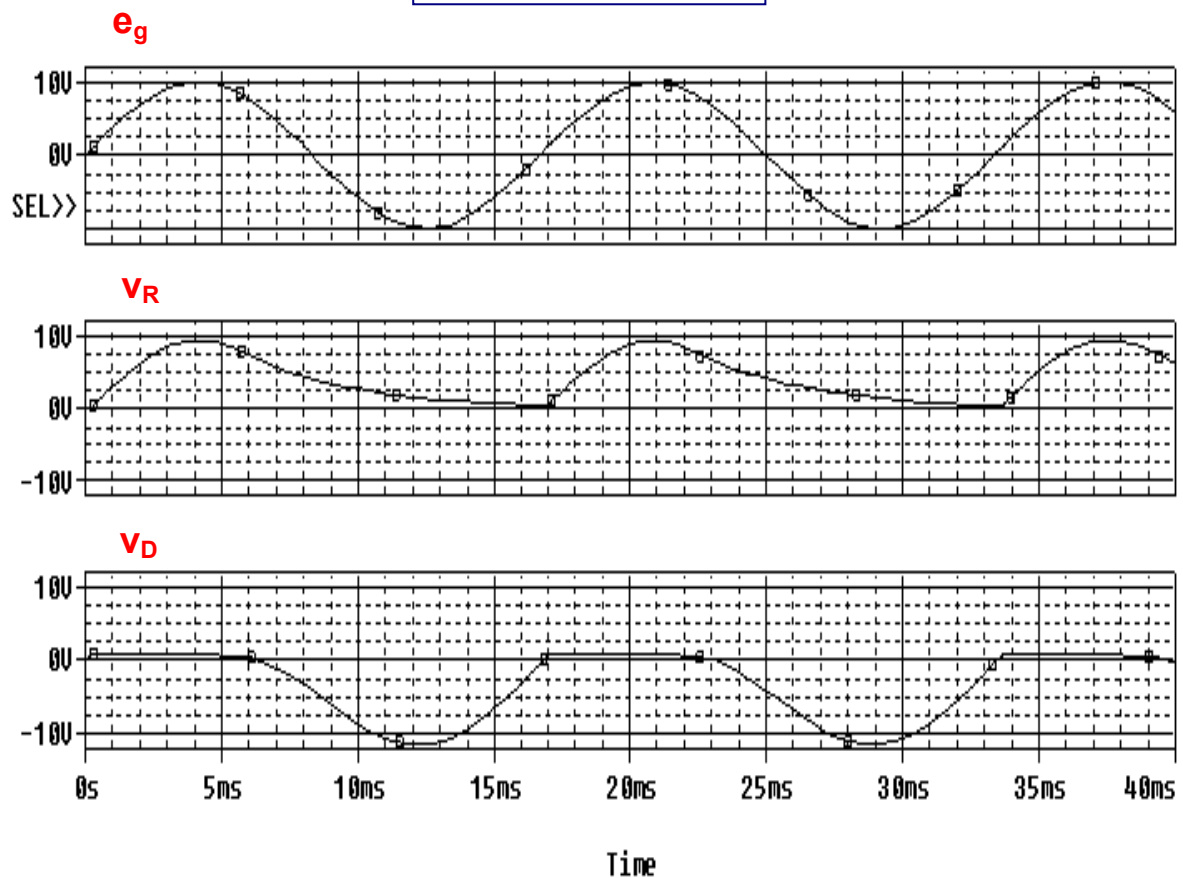


$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_6 = 0$$

Circuito com Diodo



$$e_g = V_R + V_D$$



Simulação com o PSpice

FASORES

$$A_m \cos(\omega t + \theta) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\hat{A}_m e^{j\omega t} + \hat{A}_m^* e^{-j\omega t} \right) \\ \text{Re} \left[\hat{A}_m e^{j\omega t} \right] \end{cases}$$

Valor instantâneo do sinal →

Domínio do tempo →

$$s(t) = A_m \cos(\omega t + \theta)$$

Fasor associado a sinal senoidal:

$$\hat{S} = A_m e^{j\theta} = A_m \angle \theta$$

Forma Fasorial das Leis de Kirchhoff

1ª Lei K.:

$$\sum_k \pm \hat{\mathbf{J}}_k = 0$$

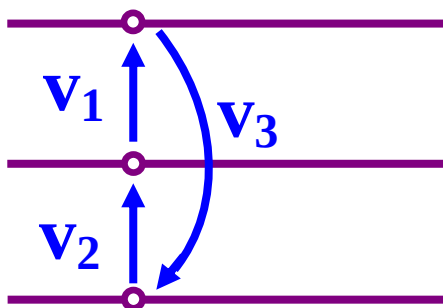
em cada nó

2ª Lei K.:

$$\sum_k \pm \hat{\mathbf{V}}_k = 0$$

em um laço

Exemplo: Linha Trifásica



$$\mathbf{v}_1(t) = V_m \cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$\mathbf{v}_2(t) = V_m \cos(\omega t + 150^\circ)$$

$$\mathbf{v}_3(t) = V_m \cos(\omega t + 30^\circ)$$

$$\hat{\mathbf{V}}_1 + \hat{\mathbf{V}}_2 + \hat{\mathbf{V}}_3 = 0$$

Propriedade Trigonométrica

$$a \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t = c \cos (\omega t + \theta)$$

$$= c \cos \omega t \cos \theta - c \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \theta$$

$$a = -c \operatorname{sen} \theta$$

$$b = c \cos \theta$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{-a}{b} \right)$$

Propriedade Importante

$$s(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega t + \theta_2) \\ + \dots + A_n \cos(\omega t + \theta_n)$$

$$\hat{A}_1 = A_1 \angle \theta_1$$

$$\hat{A}_2 = A_2 \angle \theta_2$$

⋮

$$\hat{A}_n = A_n \angle \theta_n$$

Então:

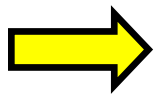
$$\hat{S} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_n$$

Fasores

Propriedade Importante:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \dots + s_n(t)$$

$s_i(t)$ senoidais
mesma frequência



$$\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \dots + \hat{S}_n$$

Cuidado !!!

Se $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$

$$\hat{S} \neq \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$$

Fasores

Se:

$$s(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1) \cdot A_2 \cos(\omega t + \theta_2)$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= A_1 \angle \theta_1 \\ \hat{A}_2 &= A_2 \angle \theta_2\end{aligned}$$

Então:

$$\hat{S} \neq \hat{A}_1 \cdot \hat{A}_2$$

Lembrar que:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cos(a - b) + \frac{1}{2} \cos(a + b)$$