

PSI.3211 – CIRCUITOS ELÉTRICOS I

2ª Prova Semestral – 13/05/19

GABARITO

1ª Questão: (4,0 pontos)

Considere o circuito mostrado na Figura 1.

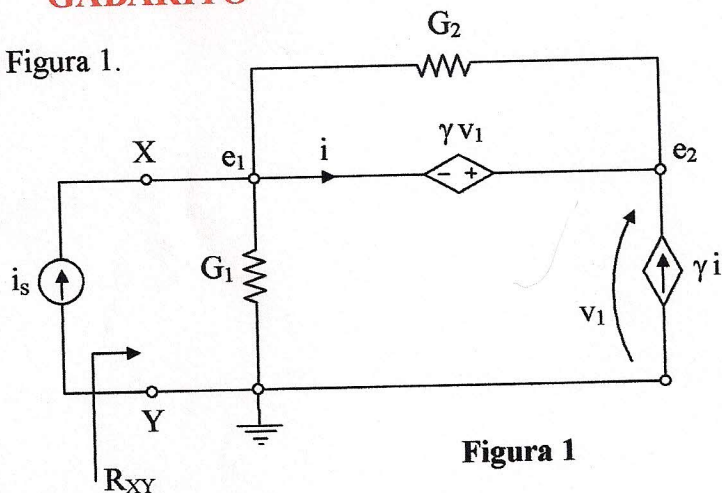


Figura 1

OBS.: Responda às questões nos espaços reservados.

(1,0) a) Escrevendo as equações de Análise Nodal para este circuito nas incógnitas e_1 , e_2 e i

obteve-se
$$\begin{bmatrix} A & -G_2 & 1 \\ B & G_2 & -5 \\ 1 & 3 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtenha os valores de A, B, C e D em função de G_1 , G_2 e i_s .

As equações de Análise Nodal são:

$$(e_1) \quad i_s = e_1 G_1 + (e_1 - e_2) G_2 + i$$

$$(e_2) \quad i = -\gamma i + (e_2 - e_1) G_2$$

$$(i) \quad e_2 - e_1 = \gamma e_2$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 1 \\ -G_2 & G_2 & -(\gamma + 1) \\ 1 & \gamma - 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A = $G_1 + G_2$ B = $-G_2$ C = 0 D = i_s

(1,0) b) Nas mesmas condições do item 1 determine o valor de γ

$$\begin{cases} \gamma + 1 = 5 \\ \gamma - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \gamma = 4$$

$\gamma = \underline{\quad 4 \quad}$

(1,0) c) Para $v_1(t) = 3 \cos 4t$ (A,s) e certos valores dos parâmetros do circuito a matriz das

imitâncias nodais obtida foi $G_n = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Obtenha a expressão de $v_1(t)$ nessas condições.

$$v_1(t) = e_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}} \cos 4t$$

$$= -0,3131 \cos 4t$$

$$v_1(t) = \underline{0,3131 \cos(4t + 180^\circ)}$$

(1,0) d) Considerando que a matriz das imitâncias nodais para certos valores dos parâmetros é

$$G_n = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule a resistência vista pelo gerador de corrente (R_{xy}) e o correspondente valor de γ .

Supondo $I_3 = 1$, $R_{xy} = e_1$

$$e_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\det[G_n]} = 0,48 \Omega$$

$$\begin{cases} -\gamma + 1 = -6 \\ \gamma + 1 = 4 \end{cases} \quad \gamma = 5$$

$$R_{xy} = \underline{0,48 \Omega}$$

$$\gamma = \underline{5}$$

Atenção: Preencher a folha ótica com seu nome, número USP e opções escolhidas para cada teste.

Para os testes de 1 a 3, considere o circuito da Figura 2 que opera em regime permanente senoidal e α é um ganho de corrente positivo.

1 – Qual é a expressão da tensão $\hat{E}_0$ de Thévenin ?

a) $\frac{\alpha}{\alpha + j}$

b) $\frac{(1+\alpha)}{(1+\alpha)+j}$

c) $2(1-\alpha)$

☒ d) $\frac{2(1+\alpha)}{(1+\alpha)-j}$

e) $\frac{(4-\alpha)}{(1+\alpha)+j}$

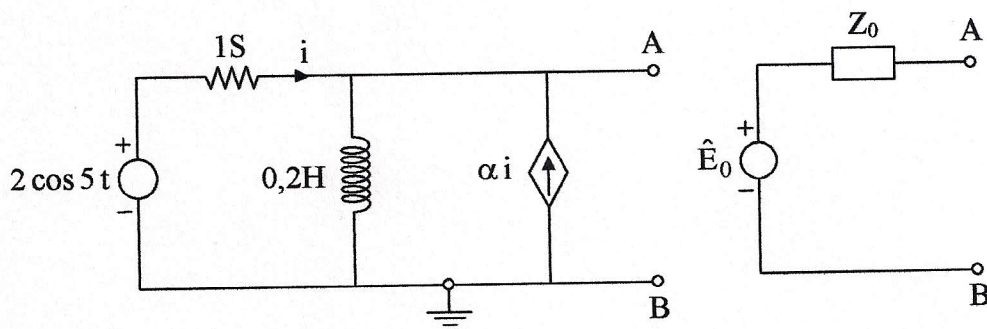


Figura 2

2 – Qual é a expressão da corrente $\hat{I}_0$ de A para B, quando esses terminais estão em curto (corrente do gerador de Norton)?

☒ a) $2(1+\alpha)$

b) $4(1-\alpha)$

c) $1+3\alpha$

d) $(1-\alpha)$

e) $\alpha+j$

3 – Qual é a expressão da impedância Z_0 de Thévenin ?

a) $\frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \cdot (\alpha+j)$

☒ b) $\frac{1}{1-j+\alpha}$

c) $\frac{1}{2[(1+\alpha)+j]}$

d) $\frac{\alpha}{2(1-\alpha)(\alpha+j)}$

e) $\frac{\alpha}{(\alpha+j)^2}$

4 – Considere o circuito da Figura 3 com $\beta = 1 - \frac{1}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$.

Qual é o valor da resistência R_0 do gerador de Thévenin com terminais A e B ?

- a) 0
- b) $R/4$
- c) $R/2$**
- d) $2R$
- e) R

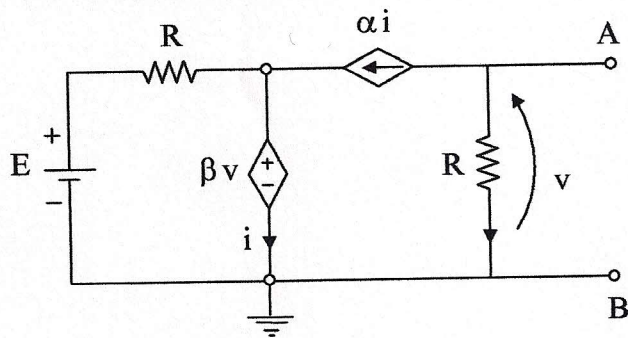
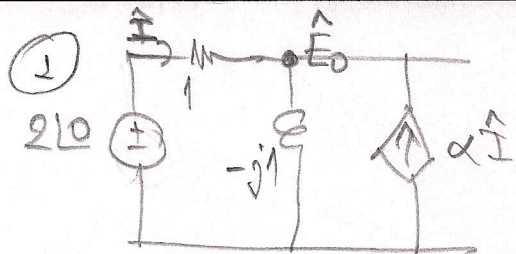


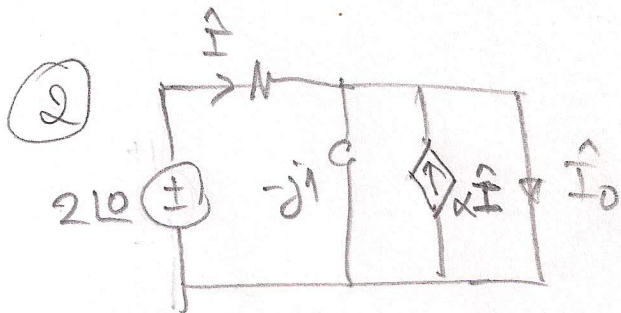
Figura 3



$$\hat{E}_0 (\hat{E}_0 - 2) - j1 \hat{E}_0 - \alpha (2 - \hat{E}_0) = 0$$

$$\hat{E}_0 (1 - j + \alpha) = 2 + 2\alpha$$

$$\hat{E}_0 = \frac{2(1 + \alpha)}{(1 + \alpha) - j}$$



A tensão no indutor é 0 $\Rightarrow$
a corrente é $-j1 \cdot 0 = 0$

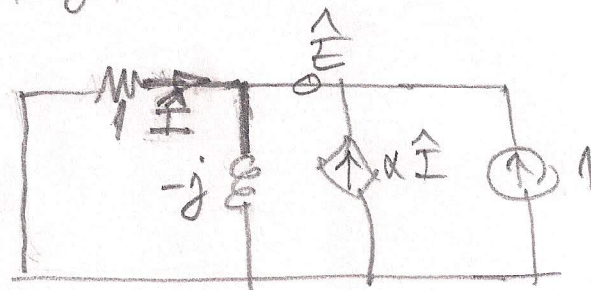
$$\hat{I}_0 = \hat{I} + \alpha \hat{I} = (1 + \alpha) \hat{I} = 2(1 + \alpha)$$

$\downarrow$
 $1 \cdot 2 \angle 0$

③

$$Z_0 = \hat{E}_0 / \hat{I}_0 = \frac{1}{1 - j + \alpha}$$

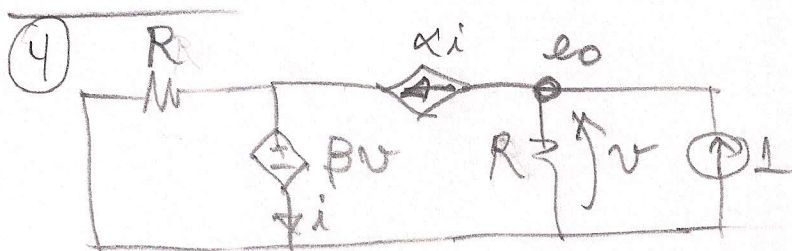
Directamente:



④

$$\hat{E} - j\hat{E} - \alpha(-\hat{E}) - 1 = 0 \Rightarrow \hat{E}(1 - j + \alpha) = 1$$

$$Z_0 = \frac{\hat{E}}{1} = \frac{1}{1 + \alpha - j}$$



I

$$\frac{\beta V}{R} + i - \alpha i = 0$$

II

$$\alpha i + \frac{e_0}{R} - 1 = 0$$

Isolando i de I e substituindo em II:

$$\alpha \left[\frac{\beta e_0}{R(\alpha - 1)} \right] + \frac{e_0}{R} - 1 = 0$$

$$e_0 \left[\frac{\alpha \beta}{R(\alpha - 1)} + \frac{1}{R} \right] = 1 \text{ mas } \beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \Rightarrow R_0 = \frac{e_0}{1} = \frac{R}{2}$$

5 – No circuito da Figura 4, os valores mais próximos de i e v , em A e V, respectivamente são:

- a) 1,00 e 1,00
- b) 1,00 e 1,41
- c) 1,41 e 2,14
- d) 2,14 e 6,00**
- e) 2,14 e 5,00

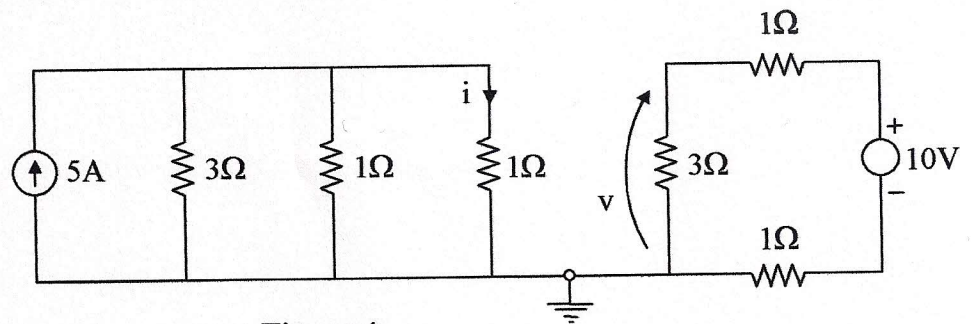


Figura 4

6 – Considere os circuitos das Figuras 5a e 5b.

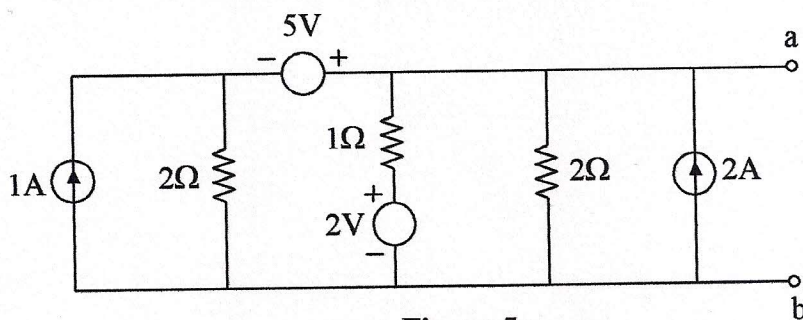


Figura 5a

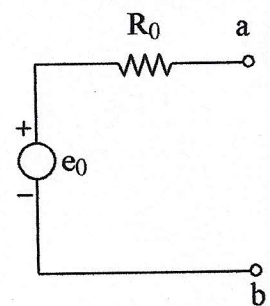


Figura 5b

Os valores mais próximos de e_0 e R_0 em V e Ω , são:

- a) 4,00 e 0
- b) 4,00 e 0,50
- c) 3,00 e 1,00
- d) 3,50 e 0,75
- e) 3,75 e 0,50**

Considere o circuito da Figura 6a para os testes 7 e 8.

7 – Na Figura 6a, converteu-se o triângulo acd em estrela. O acesso ab do circuito da Figura 6a é equivalente ao acesso ab do circuito da Figura 6b. A opção com os possíveis valores mais próximos de R_{a0} , R_{b0} e R_{b1} , em Ω , respectivamente são:

- a) 1, 5 e 3
- b) 2, 4 e 5
- c) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{4}$**
- d) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$
- e) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$ e $\frac{3}{4}$

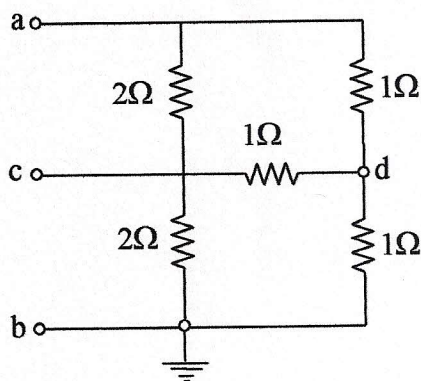


Figura 6a

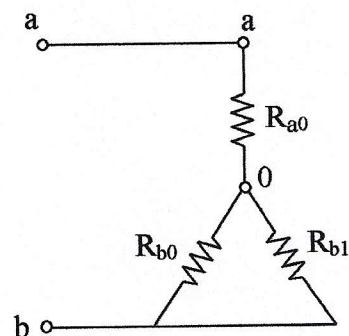


Figura 6b

8 – O acesso ab do circuito da Figura 6a é equivalente ao acesso ab do circuito da Figura 6c. A opção com os valores mais próximos de R_{ac} , R_{bc} e R_{ab} , em Ω , respectivamente são:

- a) $\frac{6}{5}$, $\frac{6}{5}$ e 3**
- b) $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$ e 3
- c) $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}$ e 6
- d) 2, 4 e 5
- e) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{2}$

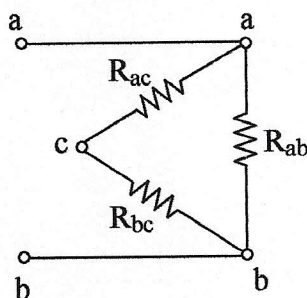


Figura 6c

Gabrito

5) Por divisão de corrente, temos

$$j = \frac{15 \cdot 5A}{\frac{1}{3}S + 1S + 1S}$$

$$= \frac{5}{\frac{1}{3} + 3 + 3} A \rightarrow j = \frac{15}{7} A$$

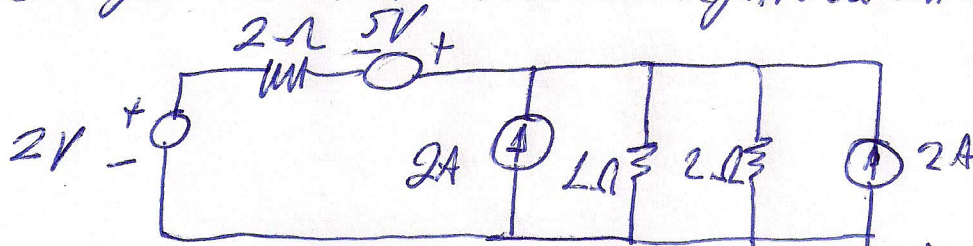
$$= 2,1429 A$$

Por divisão de tensão, temos

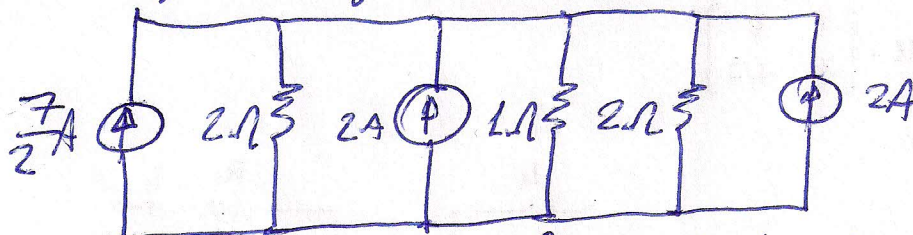
$$V = \frac{3\Omega}{3\Omega + 1\Omega + 1\Omega} \cdot 10V$$

$$= \frac{3}{5} \cdot 10V \rightarrow V = 6V$$

6) Transformamos a fonte de corrente à esquerda em fonte de tensão e a fonte de tensão no meio em fonte de corrente



Movemos em série as fontes de tensão à esquerda e convertemos a corrente em fonte de corrente



Agrupamos em paralelo as fontes de corrente e

$$i_{eq} = \frac{7}{2} A + 2A + 2A = \frac{15}{2} A$$

Agrupamos em paralelo os resistores e

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{2}S + 1S + \frac{1}{2}S} \rightarrow R_{eq} = \frac{1}{2} \Omega$$

Finalmente

$$V_{eq} = R_{eq} \cdot i_{eq} \rightarrow V_{eq} = \frac{15}{4} V$$

$$= 3,75V$$

7) Convertamos o Δacd na $Yacd$:

$$R_D = 2\Omega + 1\Omega + 1\Omega \rightarrow R_D = 4\Omega$$

$$G_{a0} = \frac{R_D}{R_{ac} \cdot R_{ad}} = \frac{4}{2 \times 1} S = 2S \rightarrow \boxed{R_{a0} = \frac{1}{2} \Omega}$$

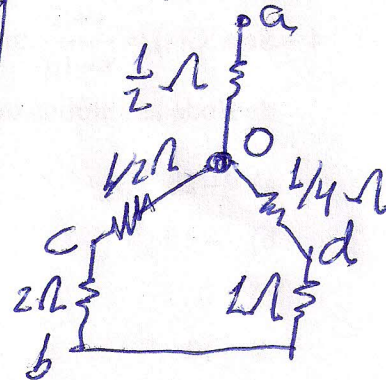
$$G_{c0} = \frac{R_D}{R_{ac} \cdot R_{cd}} = \frac{4}{2 \times 1} S = 2S \rightarrow R_{c0} = \frac{1}{2} \Omega$$

$$G_{d0} = \frac{R_D}{R_{cd} \cdot R_{ad}} = \frac{4}{1 \times 1} S = 4S \rightarrow R_{d0} = \frac{1}{4} \Omega$$

Fazendo as associações em série nos ramos inferiores, obtemos

$$R_{b0} = \frac{1}{2} \Omega + 2\Omega \rightarrow \boxed{R_{b0} = \frac{5}{2} \Omega}$$

$$R_{b1} = \frac{1}{4} \Omega + 1\Omega \rightarrow \boxed{R_{b1} = \frac{5}{4} \Omega}$$



8) Convertamos a $Yacb$ no Δacb :

$$G_Y = 1S + 1S + 1S \rightarrow G_Y = 3S$$

$$R_{Yac} = \frac{G_Y}{G_{ad} \cdot G_{cd}} = \frac{3}{1 \cdot 1} \Omega \rightarrow R_{Yac} = 3\Omega$$

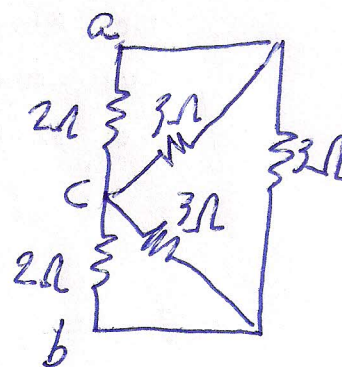
$$R_{Ybc} = \frac{G_Y}{G_{cd} \cdot G_{bd}} = \frac{3}{1 \cdot 1} \Omega \rightarrow R_{Ybc} = 3\Omega$$

$$R_{ab} = \frac{G_Y}{G_{ad} \cdot G_{bd}} = \frac{3}{1 \cdot 1} \Omega \rightarrow \boxed{R_{ab} = 3\Omega}$$

Fazendo as associações em paralelo à esquerda, obtemos

$$R_{ac} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \Omega \rightarrow \boxed{R_{ac} = \frac{6}{5} \Omega}$$

$$R_{bc} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \Omega \rightarrow \boxed{R_{bc} = \frac{6}{5} \Omega}$$



9 – O circuito da Figura 7 opera em R.P.S. (regime permanente senoidal) sua equação de

análise nodal é dada por
$$\begin{bmatrix} 0,02 - j90 & +j90 \\ +j90 & 10^{-3} - j90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A frequência ω (em rad/s) do gerador de corrente vale:

- a) 1
- b) 10**
- c) 377
- d) 235
- e) 100

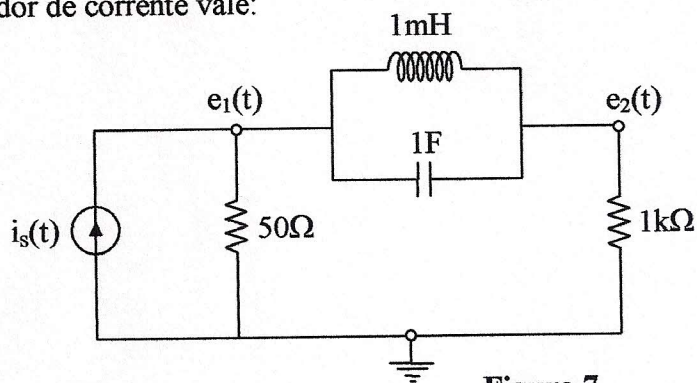


Figura 7

10 – O circuito da Figura 8 opera em regime permanente com

$$e_1(t) = \sqrt{2} \cos(t + 15^\circ), \text{ (V, s)}$$

$$e_2(t) = \sqrt{2} \cos(0,5t + 90^\circ), \text{ (V, s)}$$

A expressão que mais se aproxima de $v(t)$ em (V, s) é dada por

- a) $\cos(t + 30^\circ) + \cos(0,5t - 15^\circ)$
- b) $5 \cos(t + 30^\circ) + 3 \cos(0,5t - 45^\circ)$
- c) $\sqrt{2} \cos(t + 45^\circ) + \cos(0,5t + 60^\circ)$
- d) $\cos(t - 30^\circ) + 2 \cos(0,5t + 45^\circ)$**
- e) $2\sqrt{2} \cos(t + 60^\circ) + 4 \cos(0,5t + 30^\circ)$

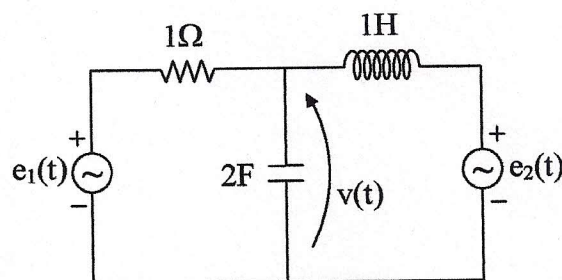


Figura 8

O circuito da Figura 9 opera em regime permanente senoidal (RPS). Considere esse circuito para os testes 11 e 12.

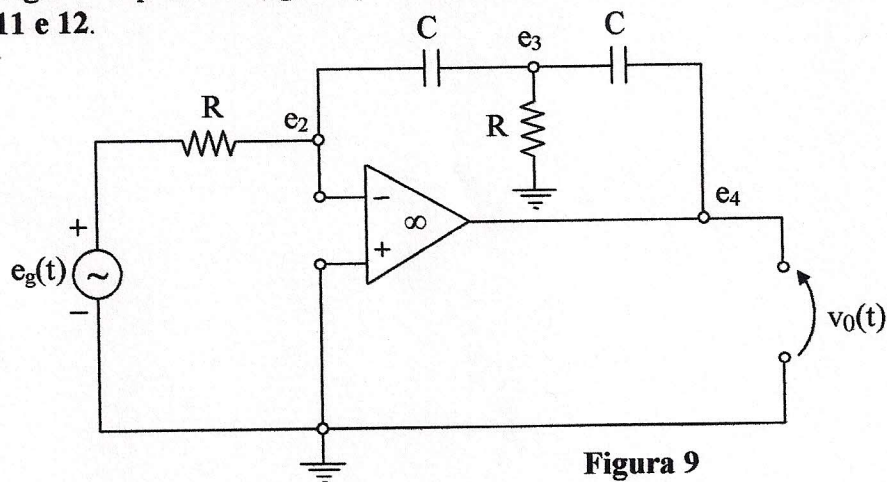


Figura 9

11 – A equação de análise nodal no nó 3 é

- a) $-\frac{1}{R} \hat{E}_2 + 2j\omega C \hat{E}_3 + \frac{1}{R} (\hat{E}_3 - \hat{E}_4) = 0$
- b) $-j\omega C \hat{E}_2 + \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) \hat{E}_3 - j\omega C \hat{E}_4 = 0$
- c) $-\frac{1}{R} (\hat{E}_2 - \hat{E}_3) + j\omega C \hat{E}_3 + j\omega C (\hat{E}_3 - \hat{E}_4) = 0$
- d) $-j\omega C (\hat{E}_2 - \hat{E}_3) - \frac{\hat{E}_3}{R} + j\omega C (\hat{E}_3 - \hat{E}_4) = 0$
- ☒ e) $-j\omega C \hat{E}_2 + \left(\frac{1}{R} + 2j\omega C\right) \hat{E}_3 - j\omega C \hat{E}_4 = 0$

12 – A expressão da resposta em frequência $F(j\omega) = \frac{\hat{V}_0}{\hat{E}_g}$ é dada por

- ☒ a) $\frac{-1}{j\omega RC} \left(2 + \frac{1}{j\omega RC}\right)$
- b) $\frac{-3}{j\omega RC}$
- c) $\frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}$
- d) $-\left(\frac{2}{j\omega RC} + \frac{1}{j\omega RC}\right)$
- e) $\frac{-1}{j\omega RC} (1 - j\omega RC)$

9) A equação de análise nodal do Nó 2 é dada por

$$-Y_{LC}\hat{E}_1 + (G + Y_{LC})\hat{E}_2 = 0$$

em que

$$Y_{LC} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}.$$

Substituindo os valores dos componentes e comparando com a equação fornecida, temos

$$\frac{1}{j\omega 10^{-3}} + j\omega \cdot 1 = -j90$$

ou ainda

$$\left(\frac{1000}{\omega} - \omega\right) = 90,$$

$$\omega^2 + 90\omega - 1000 = 0.$$

As raízes dessa equação são $\omega_1 = -100$ e $\omega_2 = 10$. Como a frequência angular do gerador deve ser positiva, chega-se a

$$\boxed{\omega = 10 \text{ rad/s}}$$

10) Devemos usar superposição.

a) Inativando o gerador de tensão $e_2(t)$ e mantendo $e_1(t)$ [$\omega = 1 \text{ rad/s}$], o fasor da tensão do capacitor é igual a

$$\hat{V}' = \hat{E}_1 \frac{Z_{LC}}{R + Z_{LC}}$$

em que

$$Z_{LC} = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{j2 - j} = -j.$$

Assim,

$$\hat{V}' = \sqrt{2} e^{j15^\circ} \frac{-j}{1 - j} = e^{-j30^\circ}$$

e

$$v'(t) = \cos(t - 30^\circ).$$

- b) Inativando o gerador de tensão $e_1(t)$ e mantendo $e_2(t)$ [$\omega = 0,5 \text{ rad/s}$], o fasor da tensão do capacitor é

$$\widehat{V}'' = \widehat{E}_2 \frac{Z_{RC}}{j\omega L + Z_{RC}}$$

em que

$$Z_{RC} = \frac{1}{G + j\omega C} = \frac{1}{1 + j} = 0,5 - j0,5.$$

Assim,

$$\widehat{V}'' = \sqrt{2} e^{j90^\circ} \frac{0,5 - j0,5}{j0,5 + 0,5 - j0,5} = \sqrt{2} e^{j90^\circ} \sqrt{2} e^{-j45^\circ} = 2e^{j45^\circ}$$

e

$$v''(t) = 2 \cos(0,5t + 45^\circ).$$

- c) Usando o princípio da superposição de efeitos, temos $v(t) = v'(t) + v''(t)$, ou seja,

$$\boxed{v(t) = \cos(t - 30^\circ) + 2 \cos(0,5t + 45^\circ)}.$$

- 11) A 1ª LK aplicada ao nodal do Nó 3 leva a

$$-j\omega C(\widehat{E}_2 - \widehat{E}_3) + \frac{1}{R}\widehat{E}_3 + j\omega C(\widehat{E}_3 - \widehat{E}_4) = 0$$

ou ainda

$$\boxed{-j\omega C\widehat{E}_2 + \left(\frac{1}{R} + j2\omega C\right)\widehat{E}_3 - j\omega C\widehat{E}_4 = 0}.$$

- 12) Aplicando a 1ª LK ao nodal do Nó 2 e lembrando que não cai tensão na entrada do amp-op ideal e que as correntes em seus terminais de entrada são nulas, chega-se a

$$\frac{1}{R}\widehat{E}_g = j\omega C(\widehat{E}_2 - \widehat{E}_3).$$

Sabe-se que $\widehat{E}_2 = 0$ (terra virtual), assim

$$\widehat{E}_3 = -\frac{\widehat{E}_g}{j\omega RC}.$$

Usando esses resultados na equação do Nó 3, obtida no item anterior, chega-se a

$$\underbrace{\widehat{E}_4}_{\widehat{V}_0} = \frac{1}{j\omega C} \left(\frac{1}{R} + j2\omega C \right) \frac{-\widehat{E}_g}{j\omega RC}.$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{\widehat{V}_0}{\widehat{E}_g} = -\frac{1}{j\omega RC} \left(2 + \frac{1}{j\omega RC} \right)}.$$