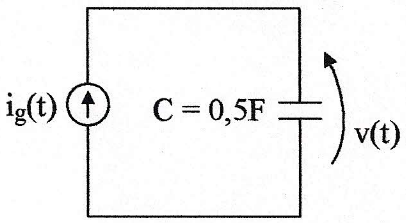
PSI.3211 – CIRCUITOS ELÉTRICOS I
1ª Prova Semestral – 01/04/19

1ª Questão: (1,0 ponto) GABARITO

Considere o circuito da Figura 1 em que $i_g(t)$ é a corrente do gerador mostrada na Figura 2.



condição inicial
v (0) = – 10V

Figura 1

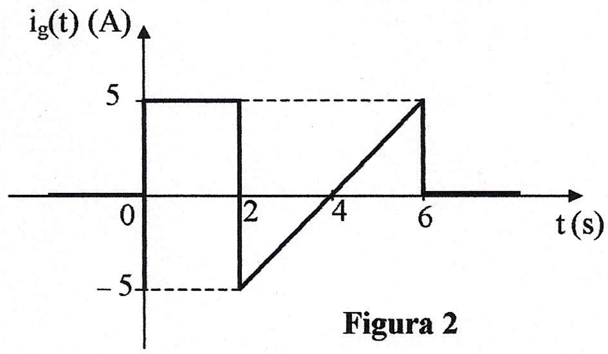
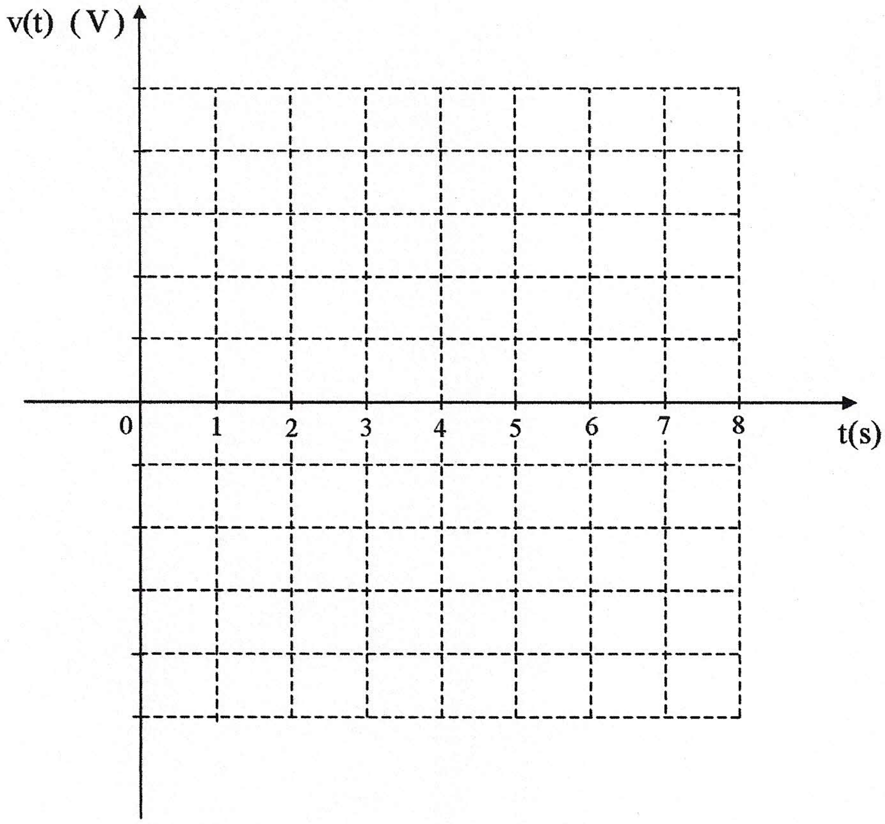


Figura 2

(0,8) **a)** Escreva a expressão analítica da tensão v(t) para $t \geq 0$ utilizando a função de Heavide H(t).

(0,2) **b)** Faça um esboço de v(t) no intervalo [0, 8s].



2ª Questão: (2,0 pontos)

Considere o circuito da Figura 3 e o grafo orientado correspondente da Figura 4.

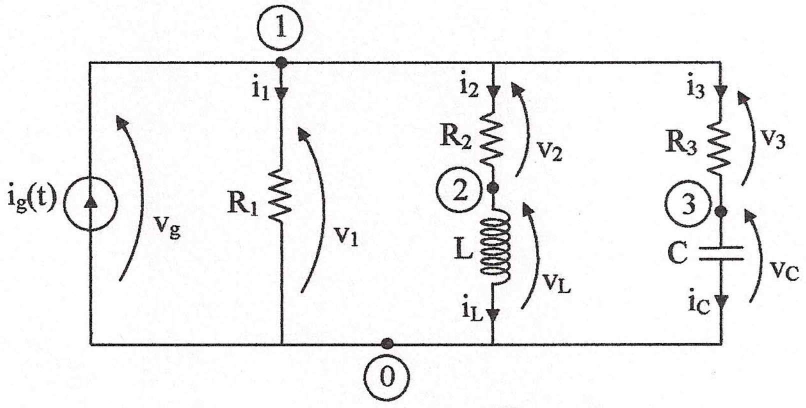


Figura 3

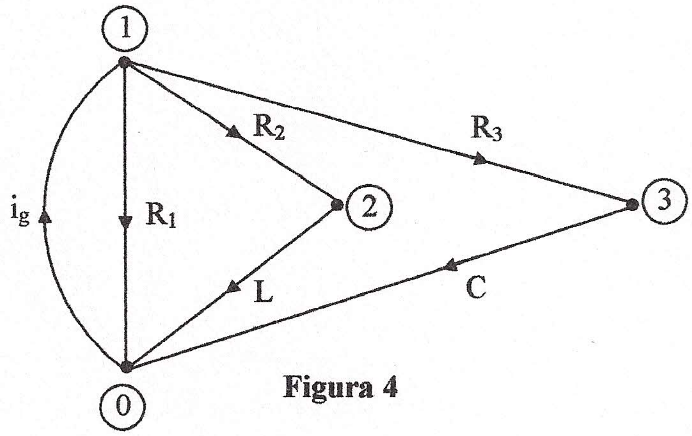


Figura 4

Dada a árvore formada pelos ramos { R_2 , i_g , C }, pede-se:

(0,5) **a)** Escreva as equações da 1ª Lei de Kirchhoff nos cortes fundamentais.

(0,5) **b)** Escreva as equações da 2ª Lei de Kirchhoff nos laços fundamentais.

(1,0) **c)** Excitando-se o circuito com uma corrente senoidal obteve-se em regime permanente:

$$i_3(t) = \cos(10\,t + 60^\circ),\ (A,\ s) \qquad v_g(t) = 5\sqrt{2}\ \cos\left(10\,t + 15^\circ\right),\ (V,\ s)$$

sabendo-se que $R_3 = 5\Omega$, determine o valor de C.

3ª Questão: (1,0 ponto)

A resposta em frequência do circuito da Figura 5 é dada por $G(j\omega) = \dfrac{\hat{I}_L}{\hat{I}_g}$

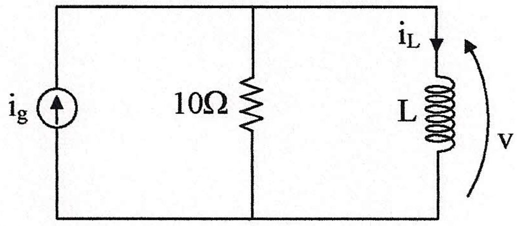


Figura 5

O módulo de $G(j\omega)$ está mostrado na Figura 6. Determine o valor de L.

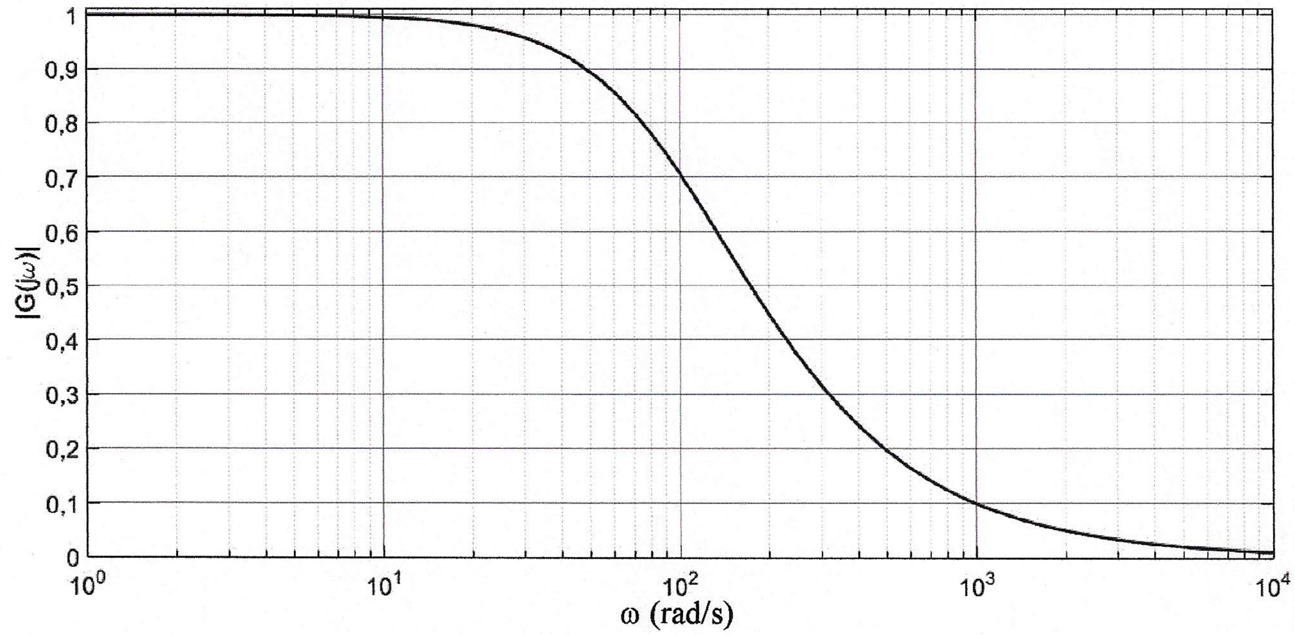


Figura 6

PSI3211 – Gabarito das Questões da P1 – 2019

Questão 1

a) O capacitor está na convenção do receptor. Assim

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0).$$

Primeiramente, vamos calcular a expressão da tensão no intervalo [0, 2 s], ou seja,

$$v(t) = \frac{5}{0{,}5}\tau\Big|_0^t - 10 = 10t - 10 = 10(t-1) \qquad (\mathrm{V},\mathrm{s}).$$

Vamos agora calcular a expressão da tensão no intervalo [2, 6] s. Nesse intervalo a corrente é dada por

$$i(t) = \frac{5}{2}(t-4).$$

Assim,

$$v(t) = \frac{1}{0{,}5}\,\frac{5}{2}\left(\frac{\tau^2}{2} - 4\tau\right)\Bigg|_2^t + \underbrace{v(2)}_{10} = 5\left(\frac{t^2}{2} - 4t\right) - (-30) + 10.$$

ou seja,

$$v(t) = \frac{5}{2}t^2 - 20t + 40 \qquad (\mathrm{V},\mathrm{s}).$$

Por fim, para $t > 6$ s, a tensão do capacitor permanece constante e vale

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C}\,(\text{área do retângulo} + \text{áreas dos triângulos}) + v(0) \\ &= 2\left(2\times 5 - \frac{2\times 5}{2} + \frac{2\times 5}{2}\right) - 10 = 10\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

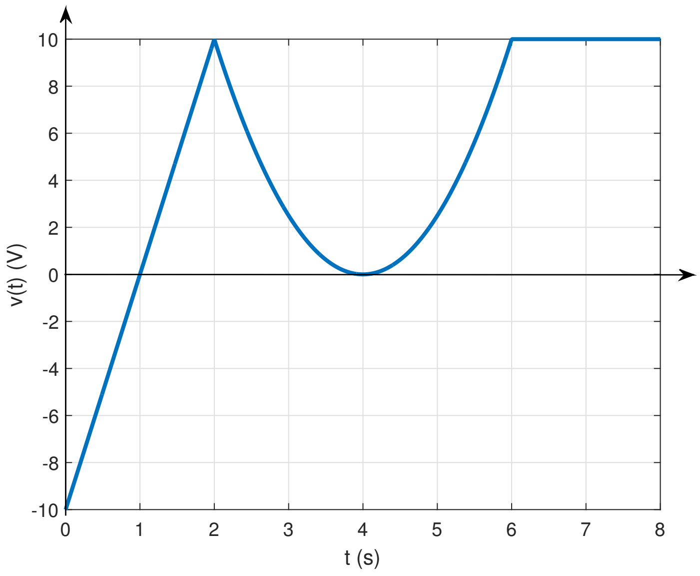
A expressão analítica da tensão em (V,s) utilizando a função de Heaviside é

$$\boxed{v(t) = 10(t-1)\,[H(t) - H(t-2)] + \left(\frac{5}{2}t^2 - 20t + 40\right)[H(t-2) - H(t-6)] + 10H(t-6)}$$

ou

$$\boxed{v(t) = 10(t-1)H(t) + \left(\frac{5}{2}t^2 - 30t + 50\right)H(t-2) - \left(\frac{5}{2}t^2 - 20t + 30\right)H(t-6).}$$

b) O gráfico da tensão no intervalo [0, 8 s] está mostrado na figura a seguir.



Questão 2

a) Dada a árvore formada pelos ramos $\{R_2, i_g, C\}$, os cortes fundamentais e as respectivas equações da 1ª LK são:

◊ $\{R_2, L\}$

$$\boxed{-i_2 + i_L = 0} \tag{1}$$

◊ $\{i_g, R_1, L, R_3\}$

$$\boxed{+i_g - i_1 - i_L - i_3 = 0} \tag{2}$$

◊ $\{C, R_3\}$

$$\boxed{-i_3 + i_C = 0} \tag{3}$$

b) Dada a árvore formada pelos ramos $\{R_2, i_g, C\}$, os laços fundamentais e as respectivas equações da 2ª LK são:

◊ $\{i_g, R1\}$

$$\boxed{-v_g + v_1 = 0} \tag{4}$$

◊ $\{i_g, R_2, L\}$

$$\boxed{-v_g + v_2 + v_L = 0} \tag{5}$$

◊ $\{i_g, R_3, C\}$

$$\boxed{-v_g + v_3 + v_C = 0} \tag{6}$$

c) Do enunciado sabe-se que $\widehat{I}_3 = \mathrm{e}^{j60^{\circ}}$ e $\widehat{V}_g = 5\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j15^{\circ}}$. Da 2ª LK fasorial, temos que

$$\widehat{V}_g = \widehat{V}_3 + \widehat{V}_C$$

e das relações fasoriais

$$\widehat{V}_3 = R_3\widehat{I}_3 = 5\ \mathrm{e}^{j60^o}$$

$$\widehat{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\widehat{I}_3 = \frac{1}{j10C}\ \mathrm{e}^{j60^o} = \frac{1}{10C}\ \mathrm{e}^{-j30^o}.$$

Substituindo essas relações na 2ª LK, temos

$$5\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{j15^o} = 5\ \mathrm{e}^{j60^o} + \frac{1}{10C}\ \mathrm{e}^{-j30^o}$$

ou seja,

$$\frac{1}{10C}\ \mathrm{e}^{-j30^o} = 5\ \mathrm{e}^{-j30^o} \Rightarrow C = \frac{1}{50}\ \mathrm{F}$$

$$\boxed{C = 0{,}02\ \mathrm{F} = 20\ \mathrm{mF}}$$

Questão 3

Da 1ª LK fasorial, sabemos que

$$\widehat{I}_g = \widehat{I}_R + \widehat{I}_L.$$

Substituindo as relações fasoriais nessa equação, temos

$$\widehat{I}_g = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right)\widehat{V} = \frac{R + j\omega L}{j\omega LR}\widehat{V} \Rightarrow \widehat{V} = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}\widehat{I}_g.$$

Lembrando que

$$\widehat{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\widehat{V},$$

temos

$$G(j\omega) = \frac{\widehat{I}_L}{\widehat{I}_g} = \frac{R}{R + j\omega L}.$$

Do gráfico sabe-se que para $\omega = 100$, $|G(j100)| = 0{,}7$. Assim

$$0{,}7^2 = \frac{100}{100 + 10000L^2} \Rightarrow 49(1 + 100L^2) = 100 \Rightarrow L = \sqrt{\frac{1}{100}\left(\frac{100}{49} - 1\right)} \approx 0.1\ \mathrm{H}$$

$$\boxed{L \approx 0{,}1\ \mathrm{H} = 100\ \mathrm{mH}}$$

Atenção: Preencher a folha ótica com seu nome, número USP e opções escolhidas para cada teste.

1 – A corrente que atravessa um capacitor de 1 μF é dada por $i(t) = 10^{-4} e^{-10t}$ (A, s) para $t \geq 0$. Sabendo-se que o capacitor está descarregado inicialmente, a expressão da potência p(t) recebida por este é dada por: **(unidades S.I.)**

a) $10^{-2} e^{-10t}$

b) $5 . 10^{-3} e^{-2t}$

c) $2 [e^{-20t} - e^{-40t}]$

d) $10^{-3} [e^{-10t} - e^{-20t}]$

e) 10^{-2}

2 – Um capacitor variante no tempo tem $C(t) = k (1 + \text{sen}\, \omega t)$ sendo k uma constante. Quando aplicarmos uma tensão V constante a esse capacitor, a corrente i(t) neste, (em convenção do receptor) é dada por:

a) $V k \omega \, \text{sen}\, \omega t$

b) $V k \omega \cos \omega t$

c) ωkC

d) Vk

e) 0

3 – Considere o circuito da Figura 7. Sabe-se que em um determinado instante T, $v_C(T) = V$ e $i_L(T) = I$. Então a tensão v_1 vale:

a) $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} (V - R_1 I)$

b) 0

c) $\dfrac{R_1}{R_2} (V - R_1 I)$

d) $\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} (V + R_2 I)$

e) $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} (V + R_2 I)$

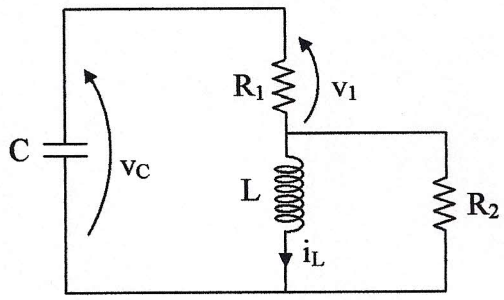


Figura 7

4 – Um circuito contém apenas um resistor R, um indutor de $L = 1H$ e um capacitor de $C = 2F$. Sabe-se que o indutor tem corrente inicial nula ($i_L(0) = 0$) e que a tensão inicial do capacitor vale $v_C(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ V. Além disso, sabe-se que o resistor dissipou a metade da energia inicialmente armazenada no circuito no instante T. Nesse mesmo instante, observou-se que o capacitor e o indutor têm o mesmo valor de energia armazenada.

Diante disso, pode-se afirmar que:

a) $v_C^2(T) = \frac{1}{8}\ V^2$

b) $i_L(T) = \frac{1}{4}$ A

c) $v_C(T) = \frac{1}{4}$ V

d) $i_L^2(T) = \frac{1}{2}\ A^2$

e) $|v_C(T)| = \frac{1}{4}$ V

Gab:

1)
$$v(t) = v_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = \frac{1}{1\mu}\int_0^t 10^{-4} e^{-10\tau}\,d\tau = \frac{10^{-4}}{1\mu}\,\frac{e^{-10\tau}}{-10}\Big|_0^t =$$

$$10\left(1 - e^{-10t}\right)$$

$$p(t) = 10 \cdot 10^{-4}\left(1 - e^{-10t}\right) \cdot e^{-10t} = 10^{-3}\left(e^{-10t} - e^{-20t}\right)$$

2)
$$i = C(t)\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{0} + \frac{dC(t)}{dt} \cdot v(t) = k\omega\cos(\omega t) \cdot V.$$

3)
$$i_1 = i_L + i_2 \quad (1^a\ LK)$$
$$R_2 i_2 + R_1 i_1 = v_C \quad (2^a\ LK)$$
$$\longrightarrow R_2(i_1 - i_L) + R_1 i_1 = v_C$$

$$(R_1 + R_2)\,i_1 = v_C + R_2 i_L \longrightarrow i_1 = \frac{V + R_2 I}{R_1 + R_2}$$

$$v_1 = R_1 i_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot (V + R_2 I)$$

4)
$$E_i = \frac{C v_C^2}{2} + \cancel{\frac{L i_L^2}{2}}^{\,0} = \frac{1}{2}$$

$$E_f = \frac{C v_C^2}{2} + \frac{L i_L^2}{2} = \frac{1}{4} \longrightarrow C v_C^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow v_C^2 = \frac{1}{4C}$$

$$L i_L^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow i_L^2 = \frac{1}{4L}$$

5 – O fasor $\hat{I}_0$ no circuito da Figura 8 em ampère é:

a) $4\,\angle 0^\circ$

b) $0{,}6\,\angle 90^\circ$

c) -1

d) $2{,}4\,\angle -90^\circ$

e) $2\,\angle -90^\circ$

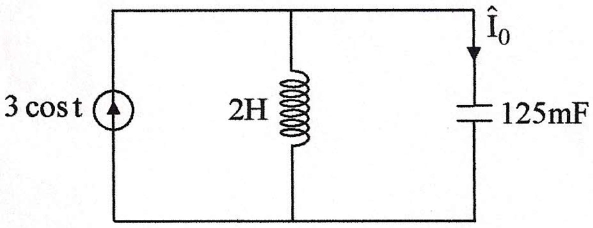


Figura 8

6 – A tensão entre os pontos "a" e "b" ou seja $\hat{V}_{ab}$ no circuito da Figura 9 é:

a) $18{,}97\,\angle -88{,}45^\circ$

b) $18{,}97\,\angle -51{,}57^\circ$

c) $21{,}21\,\angle -88{,}45^\circ$

d) $21{,}21\,\angle -51{,}57^\circ$

e) $18{,}97\,\angle -88{,}45^\circ$

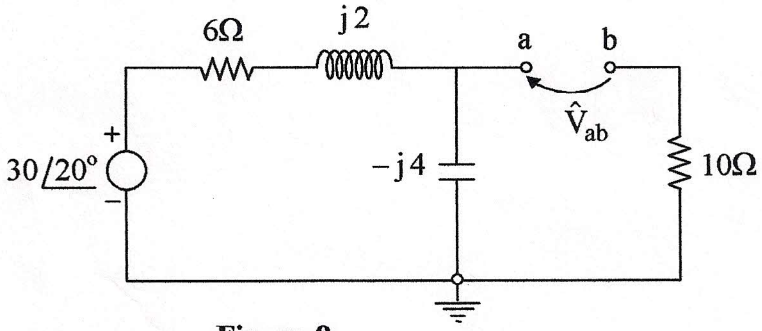


Figura 9

7 – Considere o circuito da Figura 10 com a fonte $e_s(t)$ senoidal mas de fase desconhecida. Qual é a diferença de fase $\measuredangle \hat{V}_0 - \measuredangle \hat{E}_s$ para a frequência na qual $\left|\hat{V}_0\right| = \dfrac{|E_s|}{\sqrt{2}}$?

a) $+45^\circ$

b) $+135^\circ$

c) -90°

d) -45°

e) 90°

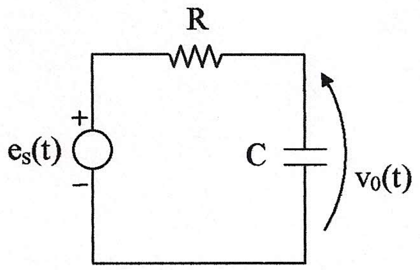
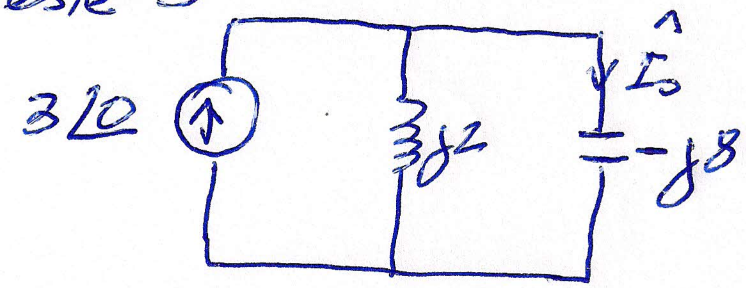


Figura 10

Teste 5



$$I_o = \frac{3\angle 0 \cdot j2}{-j6} = -1 \quad \text{ou} \quad 1\angle 180°$$

Teste 6

$$\hat{V}_a = \frac{-j4 \cdot 30\angle 20°}{6-j2} = \frac{120\angle -70°}{6{,}3245\angle -18{,}4349°}$$

$$= 18{,}97\angle -51{,}57°$$

$$\hat{V}_o = 0$$

Teste 7

$$\hat{V}_o = \frac{\frac{1}{j\omega C}\hat{E}_s}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\hat{E}_s}{1 + j\omega RC}$$

$$\frac{|\hat{V}_o|}{|\hat{E}_s|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_o RC)^2}} \Rightarrow \omega_o RC = 1$$

$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

$$\measuredangle \hat{V}_o = \measuredangle \hat{E}_s - \text{arctg}\, \omega RC$$

$$\measuredangle \hat{V}_o - \measuredangle \hat{E}_s = -\text{arctg}\, 1 = -45°$$

8 – A resposta de um circuito linear é dada pela seguinte equação

$$4i + 8\int i\,dt - \frac{3di}{dt} = 50\cos\left(2t + 75^\circ\right).$$

A resposta do circuito $i(t)$ em regime permanente senoidal é (em A):

Dica: Escreva $i(t) = \mathcal{R}e\left\{\hat{I}e^{j\omega t}\right\}$ e use fasores.

a) $5{,}263\ \text{sen}\,(2t - 64{,}5^\circ)$

b) $3{,}282\ \text{sen}\,(2t - 6{,}8^\circ)$

c) $3{,}282\cos\,(t + 6{,}8^\circ)$

d) $4{,}642\ \text{sen}\,(2t - 126{,}8^\circ)$

e) $4{,}642\cos\,(2t + 143{,}2^\circ)$

$$4\,Re\{\hat{I}e^{j\omega t}\} + 8\int Re[\hat{I}e^{j\omega t}]dt - 3\frac{d}{dt}[Re\{\hat{I}e^{j\omega t}\}]$$

$$4\hat{I} + \frac{8\hat{I}}{j\omega} - 3j\omega\hat{I} = 50\angle 75^\circ \quad = Re[50\angle 75^\circ e^{j\omega t}]$$

note que $e^{j\omega t}$ aparece em todas as parcelas e pode ser cancelado.

mas $\omega = 2$, então

$$\hat{I}(4 - j4 - j6) = 50\angle 75^\circ$$

$$\hat{I} = \frac{50\angle 75^\circ}{4 - j10} = \frac{50\angle 75^\circ}{10{,}77\angle -68{,}2^\circ} = 4{,}642\angle 143{,}2^\circ$$

Logo $i(t) = 4{,}642\cos(2t + 143{,}2^\circ)$

O grafo de corrente (Figura 11) e de tensão (Figura 12) de um circuito dados abaixo são usados nos **testes de 9 a 12**.

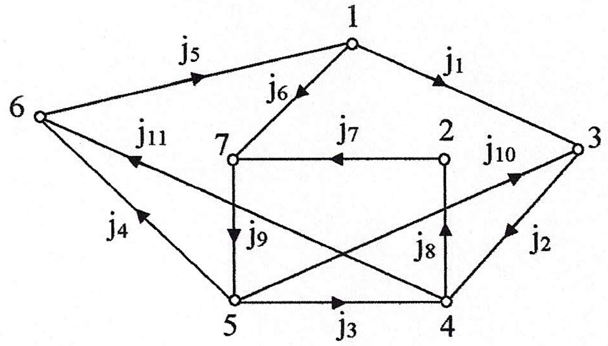


Figura 11

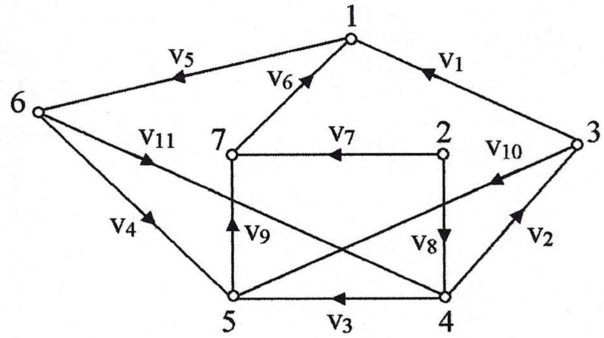


Figura 12

9 – Sabendo-se que $j_1 = 1A$, $j_8 = -1A$, $j_9 = 4A$ e $j_{10} = 2A$, o valor de j_6 (em A) é

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

10 – Sabendo-se que $v_1 = 5V$, $v_2 = -2V$ e $v_3 = 3V$. O valor de v_{10} (em V) é:

a) 1
b) 3
c) 5
d) −5
e) −3

11 – Com a árvore $\{ j_1 , j_3 , j_5 , j_6 , j_8 , j_9 \}$, o conjunto de ramos que não é corte fundamental é:

a) $\{ j_1 , j_2 , j_{10} \}$
b) $\{ j_6 , j_8 , j_9 \}$
c) $\{ j_2 , j_3 , j_7 , j_{11} \}$
d) $\{ j_4 , j_5 , j_{11} \}$
e) $\{ j_2 , j_4 , j_6 , j_{10} , j_{11} \}$

12 – Com a arvóre $\{ v_1 , v_3 , v_5 , v_6 , v_8 , v_9 \}$, o conjunto de ramos que não é laço fundamental é:

a) $\{ v_3 , v_7 , v_8 , v_9 \}$
b) $\{ v_1 , v_2 , v_3 , v_6 , v_9 \}$
c) $\{ v_4 , v_5 , v_6 , v_9 \}$
d) $\{ v_2 , v_3 , v_{10} \}$
e) $\{ v_1 , v_6 , v_9 , v_{10} \}$

Gabarito

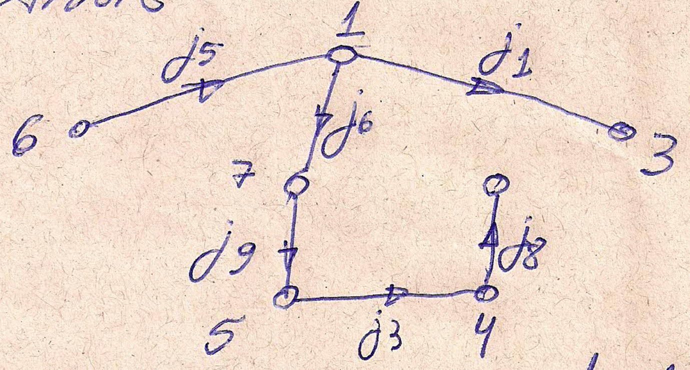
9) Notamos que o conjunto de corte $\{j_6, j_8, j_9\}$ separa o ramo j_7 do resto do circuito. Assim, podemos aplicar a 1ª Lei de Kirchhoff a esse conjunto de corte, obtendo

$$-j_6 + j_9 - j_8 = 0 \to j_6 = j_9 - j_8$$
$$= 4 - (-1)\,(A) \to j_6 = 5A$$

10) Notamos que o conjunto $\{v_{10}, v_2, v_3\}$ constitui um laço, ao qual aplicamos a 2ª Lei de Kirchhoff

$$v_{10} - v_3 + v_2 = 0 \to v_{10} = v_3 - v_2$$
$$= 3 - (-2)\,(V) \to v_{10} = 5V$$

11) Árvore



Observamos que o conjunto de corte $\{j_6, j_8, j_{10}\}$ não é um conjunto de corte fundamental porque é constituído apenas por ramos de árvore.

12) Observamos que o laço $\{v_2, v_3, v_{10}\}$ não é um laço fundamental porque tem como elementos dois ramos de ligação, que são v_2 e v_{10}.