ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Elementos de Máquinas para Automação

PMR 3307 - A03

Composição de tensões
e Círculo de Mohr

2020.2

Cronograma de aulas

Dia	S	Aula	Tópico	Prof.
18.08	3ª	A1	**Introdução a disciplina** Modelagem, carregamento e equilíbrio	RS
21.08	6ª	A2	Comportamento mecânico dos materiais	RS
25.08	3ª	A3	Composição de tensões Estado plano de tensões – Círculo de Mohr	RS
28.08	6ª	A4	Teorias de Falha: 1) Falha por deformação excessiva; fundamentos	RS
01.09	3ª	A5	Teorias de Falha: 2) Falha por deformação permanente: von Mises, Tresca, Coulomb-Mohr;	RS
04.09	6ª	A6	Teorias de Falha: 3) Falha por fadiga: Parte - 1	RS
08.09	3ª	A7	Teorias de Falha: 3) Falha por fadiga: Parte - 2	RS
11.09	6ª	A8	Teorias de Falha: 4) Falha por instabilidade: flambagem	RS
15.09	3ª	A9	Teorias de Falha: 5) Falha por impacto: Parte - 1	RS
18.09	6ª	A10	Teorias de Falha: 6) Falha por impacto: Parte - 2	RS
22.09	3ª	A11	Teorias de Falha: 6) Falha por desgaste excessivo	RS
25.09	6ª	A12	Fixações cubo-eixo	NG
29.09	3ª	A13	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Rebites	NG
02.10	6ª	A14	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Parafusos: Parte - 1	NG
06.10	3ª	A15	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Parafusos: Parte - 2	NG
09.10	6ª	A16	Especificação e dimensionamento de elementos de transmissão: Fusos	NG
13.10	3ª	A17	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Mancais: Parte - 1	NG
16.10	6ª	A18	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Mancais: Parte - 2	NG
20.10	3ª	A19	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Molas: Parte - 1	NG
23.10	6ª	A20	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Molas: Parte - 2	NG
27.10	3ª	A21	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Freios e embreagens	NG
30.10	6ª	A22	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Correias e Correntes	NG
03.11	3ª	A23	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 1	RS
06.11	6ª	A24	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 2	RS
10.11	3ª	A25	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 3	RS
13.11	6ª	A26	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 4	RS
17.11	3ª	---	**Feriado municipal – Consciência Negra**	
20.11	6ª	A27	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Guias de escorregamento	RS
24.11	3ª	A28	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Guias lineares	RS
27.11	6ª	A29	Apresentação dos trabalhos	RS
01.12	3ª	A30	Apresentação dos trabalhos	
04.12	6ª	A29	Apresentação dos trabalhos	
08.12	3ª	A30		
11.12	6ª	A31		
14.12	2ª		**Encerramento do semestre 2020-2**	

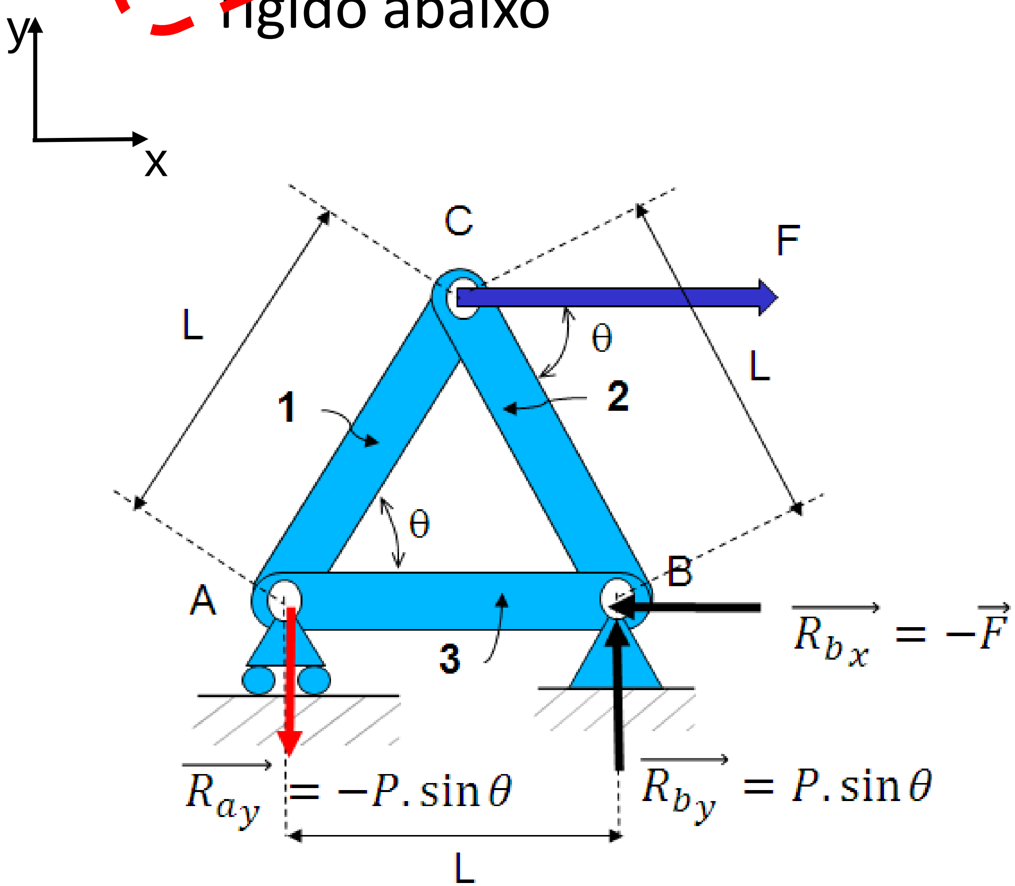
Tópicos

- Estado de tensão geral sobre um elemento
- Equações gerais para a tensão normal e cisalhante
- Tensões principais
- Transformações de tensões
- Circulo de Mohr
- Construção do círculo de Mohr
- Círculo de Mohr para o estado geral de Tensões
- Círculo de deformação de Mohr
- Relações adicionais entre tensão e deformação

RELEMBRANDO!

Estado de tensão geral sobre um elemento

- Desenvolvendo as equações de equilíbrio estático para o corpo rígido abaixo



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \qquad \vec{F} + \overrightarrow{R_{b_x}} = 0$$

$$\overrightarrow{R_{b_x}} = -\vec{F}$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0 \qquad \overrightarrow{R_{a_y}} + \overrightarrow{R_{b_y}} = 0$$

$$\overrightarrow{R_{a_y}} = -P.\sin\theta$$

$$\overrightarrow{R_{b_y}} = P.\sin\theta$$

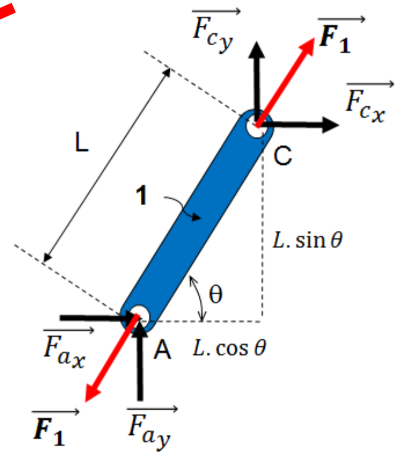
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0 \qquad \overrightarrow{R_{b_y}}.L + \vec{F}.\sqrt{\left(\frac{3}{4}L^2\right)} = 0$$

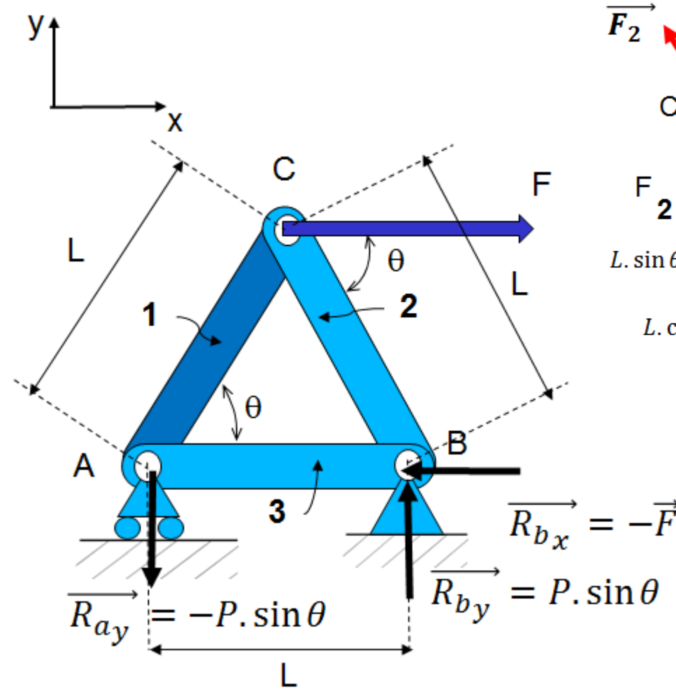
$$\overrightarrow{R_{b_y}}.L + \vec{F}.(L. - \sin\theta) = 0$$

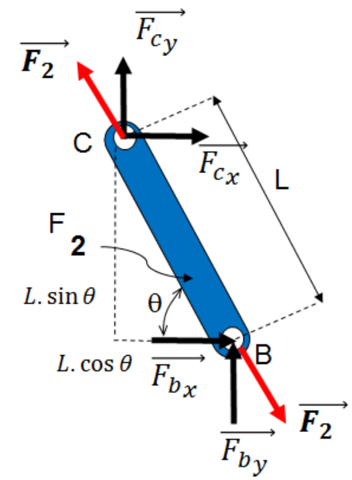
RELEMBRANDO!

Resultantes Internas

Análise individual dos esforços







$\sum \vec{F_x} = 0 \quad \overrightarrow{F_{c_x}} + \overrightarrow{F_{b_x}} = 0$

$\sum \vec{F_y} = 0 \quad \overrightarrow{F_{c_y}} + \overrightarrow{F_{b_y}} = 0$

$\sum \overrightarrow{M_B} = 0$

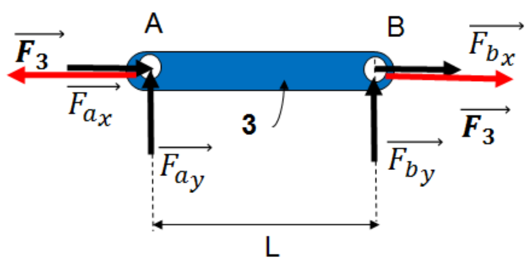
$\overrightarrow{F_{c_y}}.L.\cos\theta + \overrightarrow{F_{c_x}}.\sin\theta = 0$

$\sum \vec{F_x} = 0 \quad \overrightarrow{F_{c_x}} + \overrightarrow{F_{a_x}} = 0$

$\sum \vec{F_y} = 0 \quad \overrightarrow{F_{c_y}} + \overrightarrow{F_{a_y}} = 0$

$\sum \overrightarrow{M_B} = 0$

$-\overrightarrow{F_{c_y}}.L.\cos\theta + \overrightarrow{F_{c_x}}.\sin\theta = 0$



$\sum \vec{F_x} = 0 \quad \overrightarrow{F_{c_x}} + \overrightarrow{F_{a_x}} = 0$

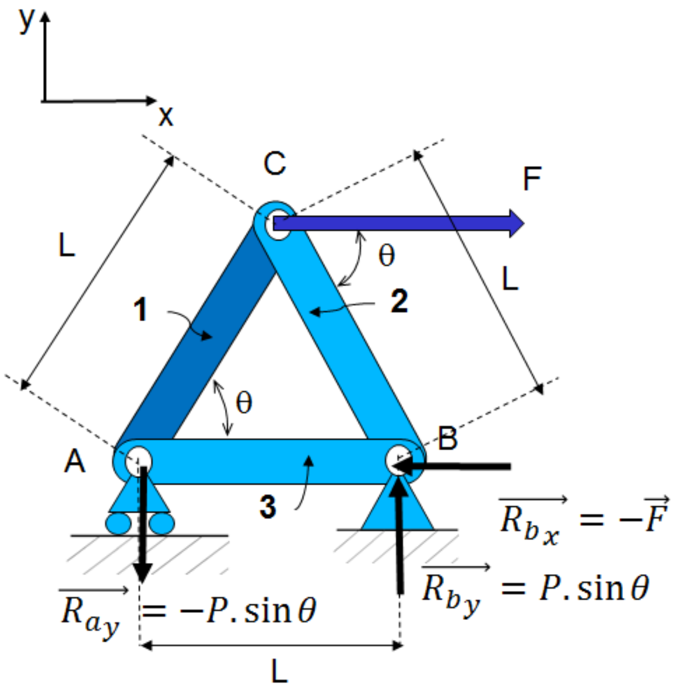
$\sum \vec{F_y} = 0 \quad \overrightarrow{F_{c_y}} + \overrightarrow{F_{a_y}} = 0$

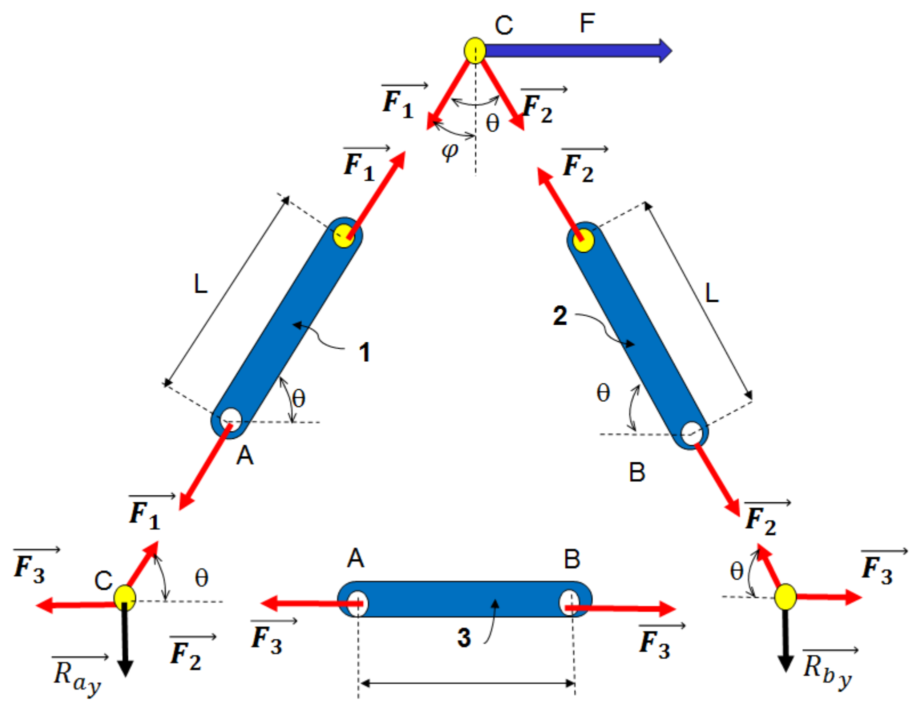
$\sum \overrightarrow{M_A} = 0 \quad -\overrightarrow{F_{b_y}}.L = 0$

RELEMBRANDO!

Resultantes Internas

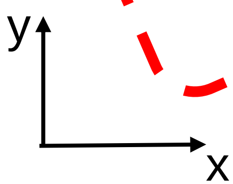
Análise individual dos esforços

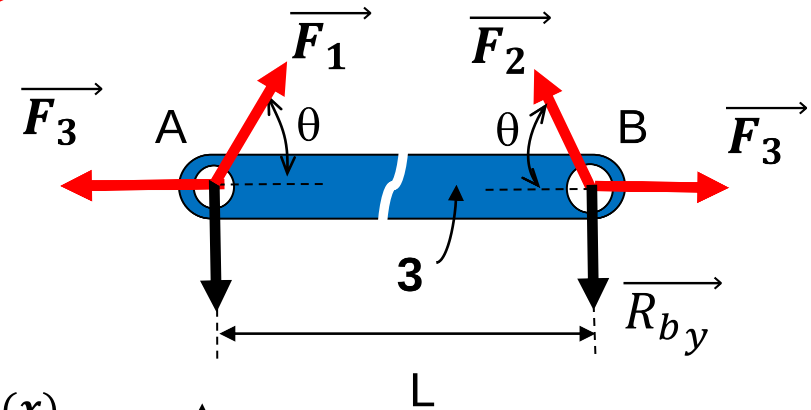


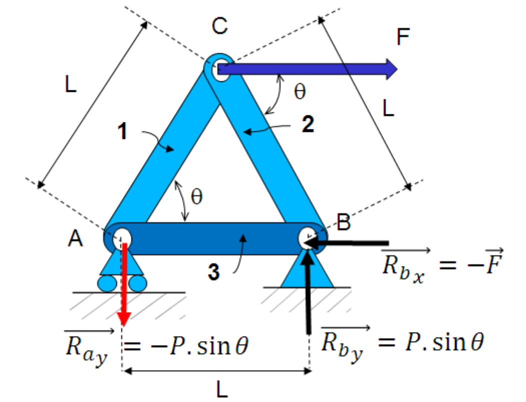


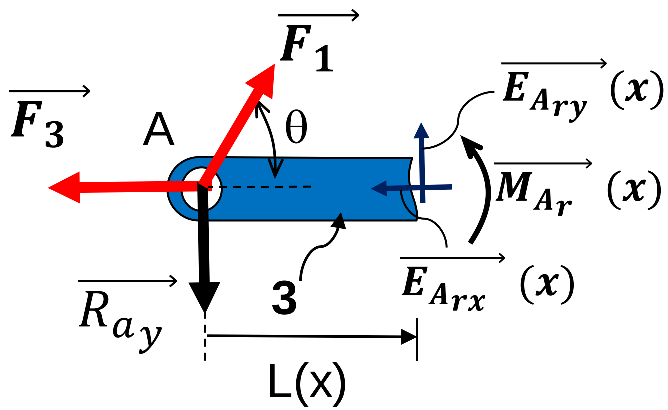
RELEMBRANDO!

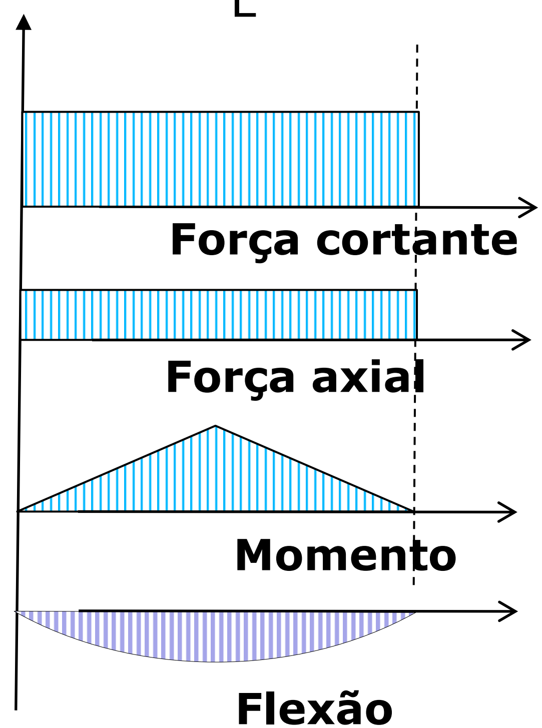
Diagrama de Esforços

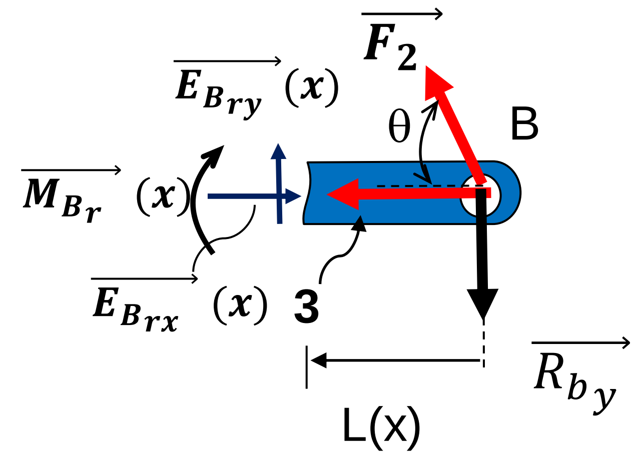






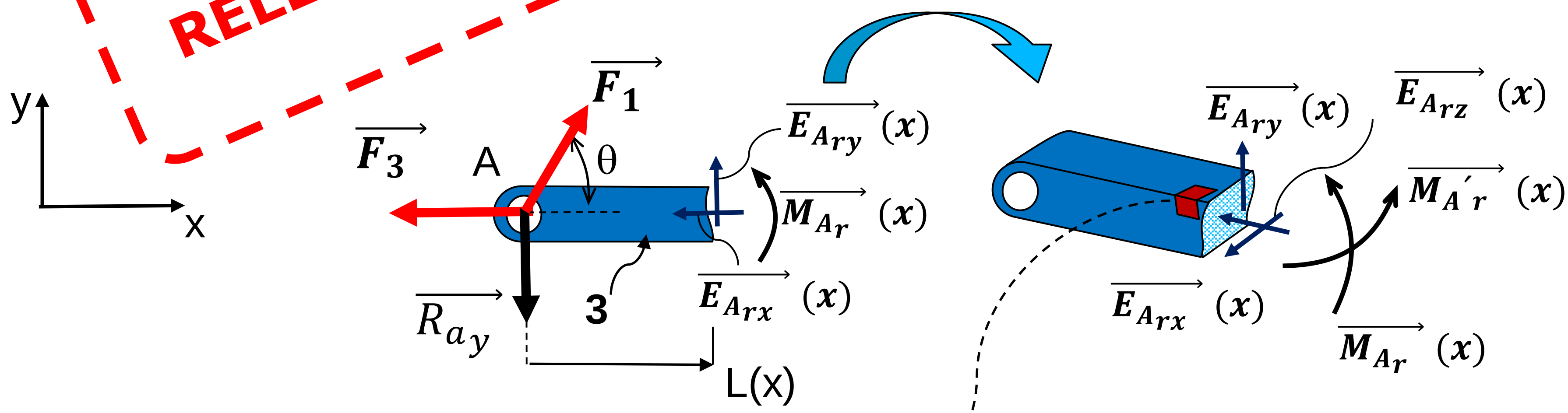


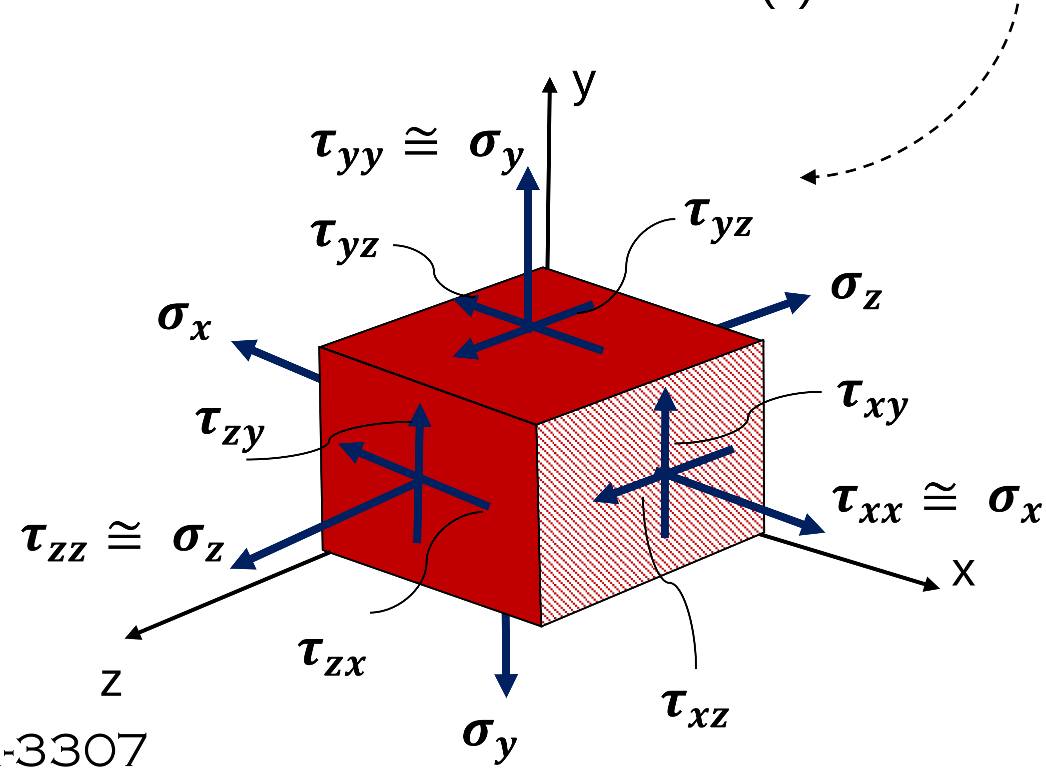




RELEMBRANDO!

Estado de tensão geral sobre um elemento

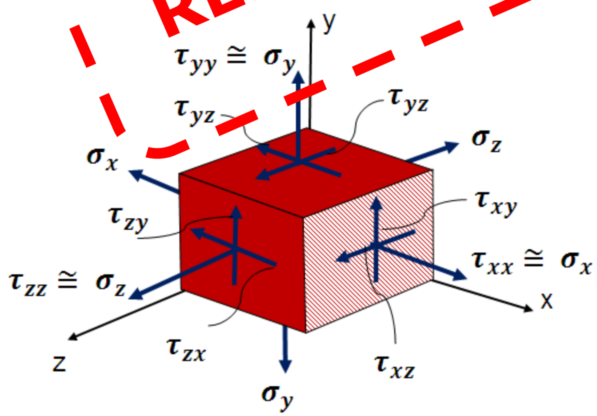


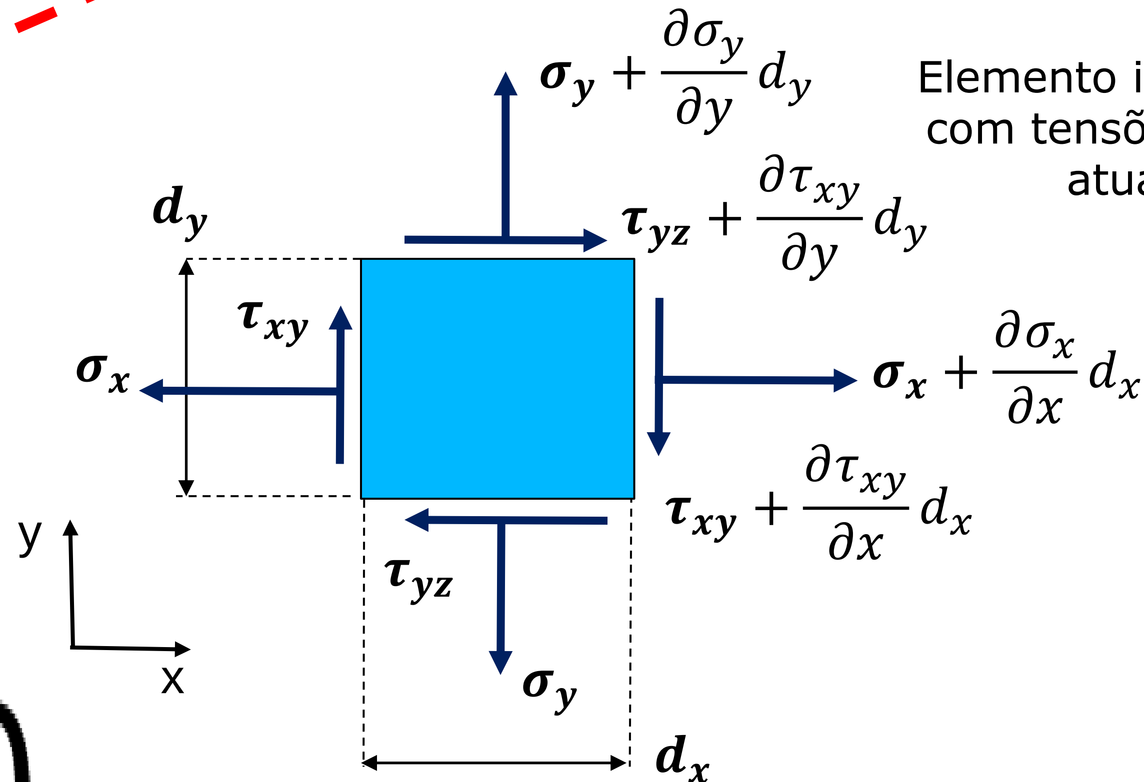


Estado de tensão geral sobre um elemento

RELEMBRANDO!

Equações diferenciais de equilíbrio



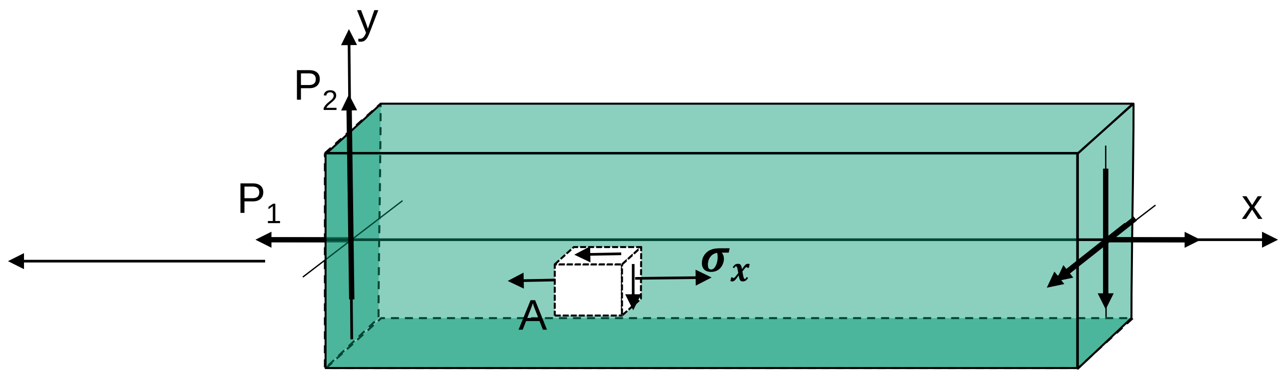


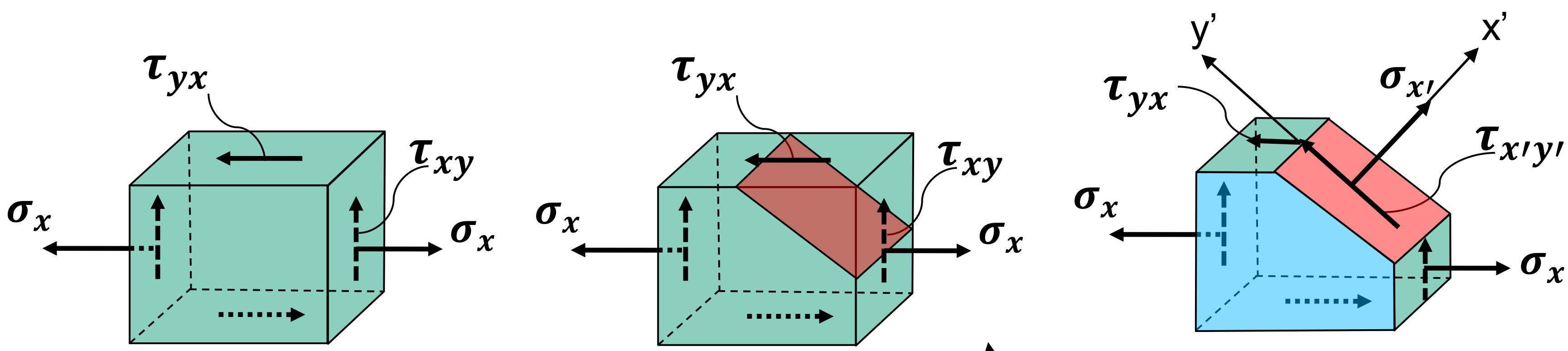
Elemento infinitesimal com tensões e forças atuando

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ &\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \\ &\sum M_z = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0}$$

Introdução

Estado de tensão em um ponto sob diferentes planos

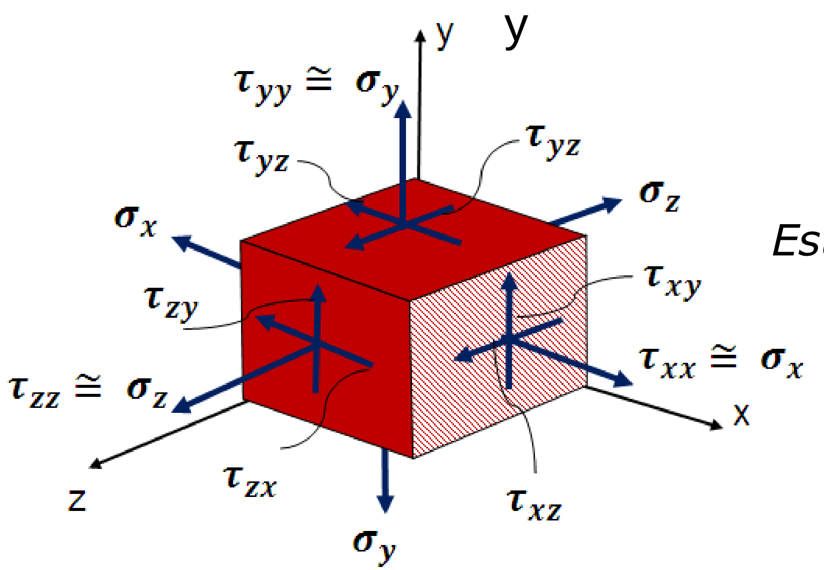




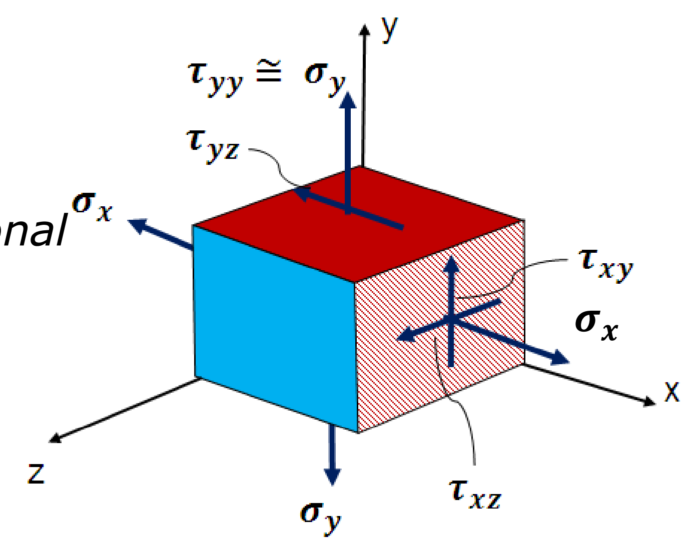
tensões que atuam em quaisquer planos

Em muitos casos tensões normais e cisalhantes atuam simultaneamente

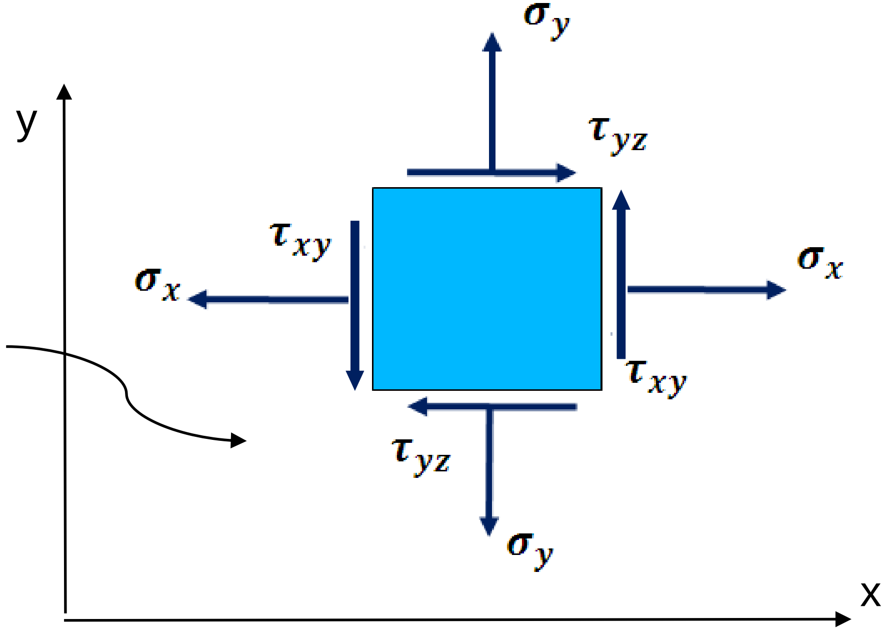
Estado de tensão geral sobre um elemento



Estado tridimensional

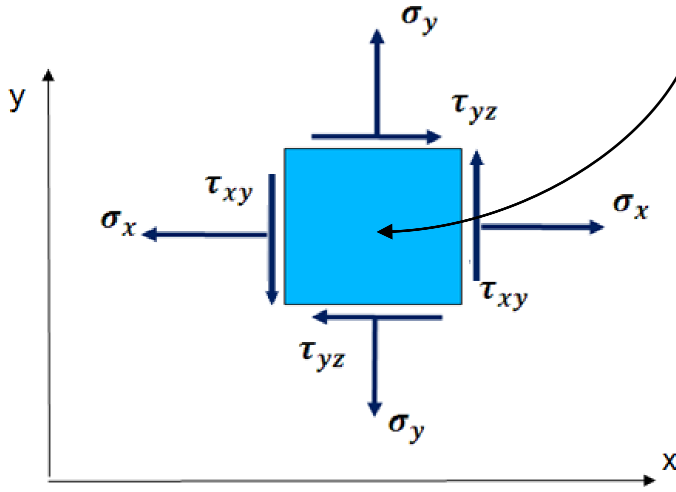


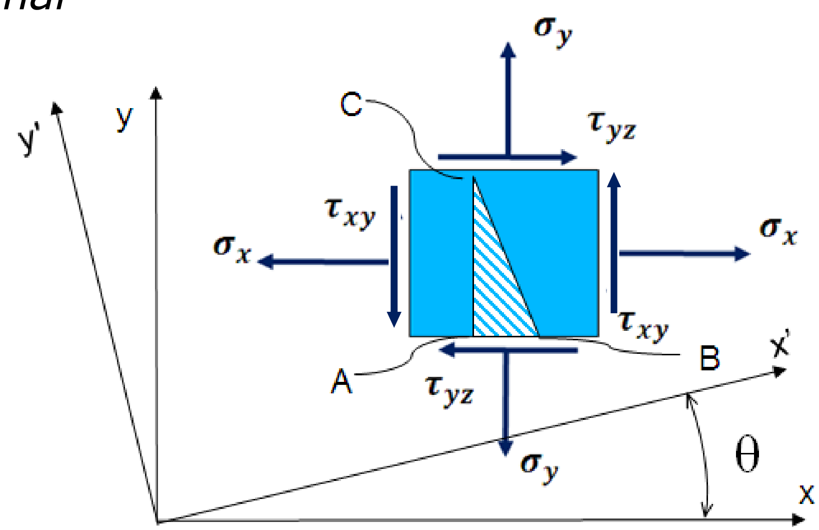
Estado bidimensional

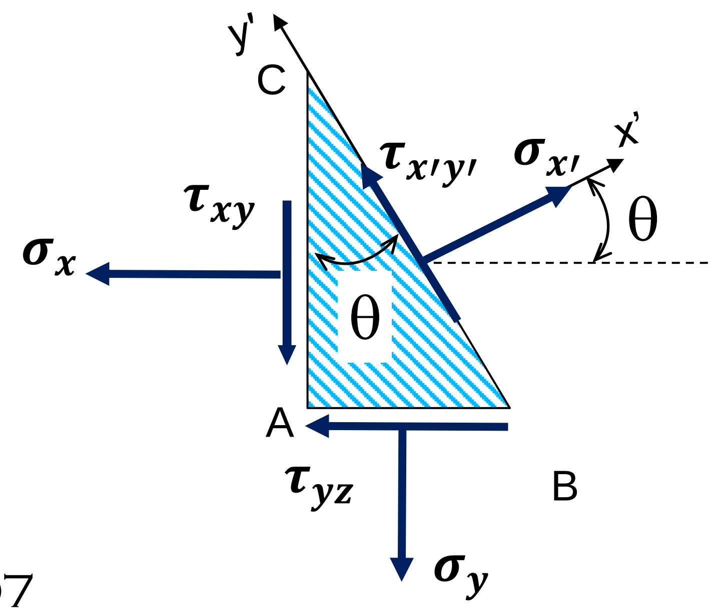


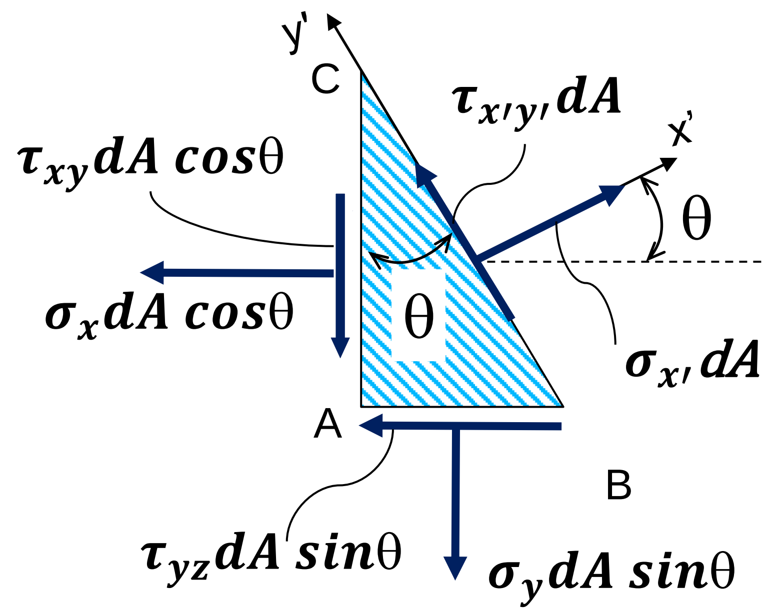
Estado de tensão geral sobre um elemento

Elemento plano
Estado bidimensional

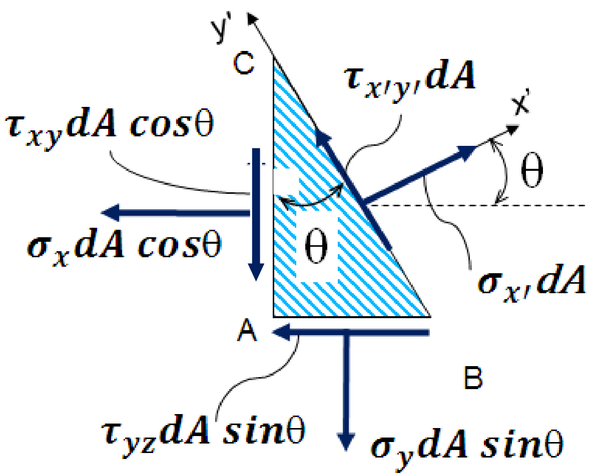








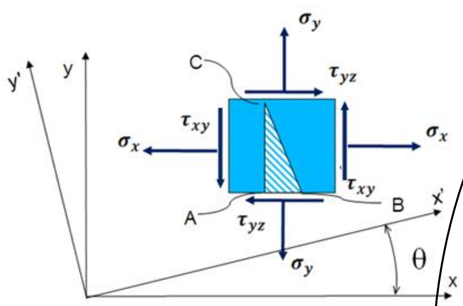
Equações gerais para a tensão normal e cisalhante



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma_{x'}} dA = \sigma_x dA.\cos\theta\,.\cos\theta + \sigma_y dA.\sin\theta\,.\sin\theta$$
$$+\tau_{xy} dA.\cos\theta\,.\sin\theta\; + \tau_{xy} dA.\sin\theta\,.\cos\theta$$

$$\boldsymbol{\sigma_{x'}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\cos 2\theta + \tau_{xy}.\sin 2\theta$$



$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$\boldsymbol{\tau_{x'y'}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\sin 2\theta + \tau_{xy}.\cos 2\theta$$

Equações gerais para a tensão normal e cisalhante

Tensões principais

Determinação do plano principal

$$\boldsymbol{\sigma_{x'}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\cos 2\theta + \tau_{xy}.\sin 2\theta$$

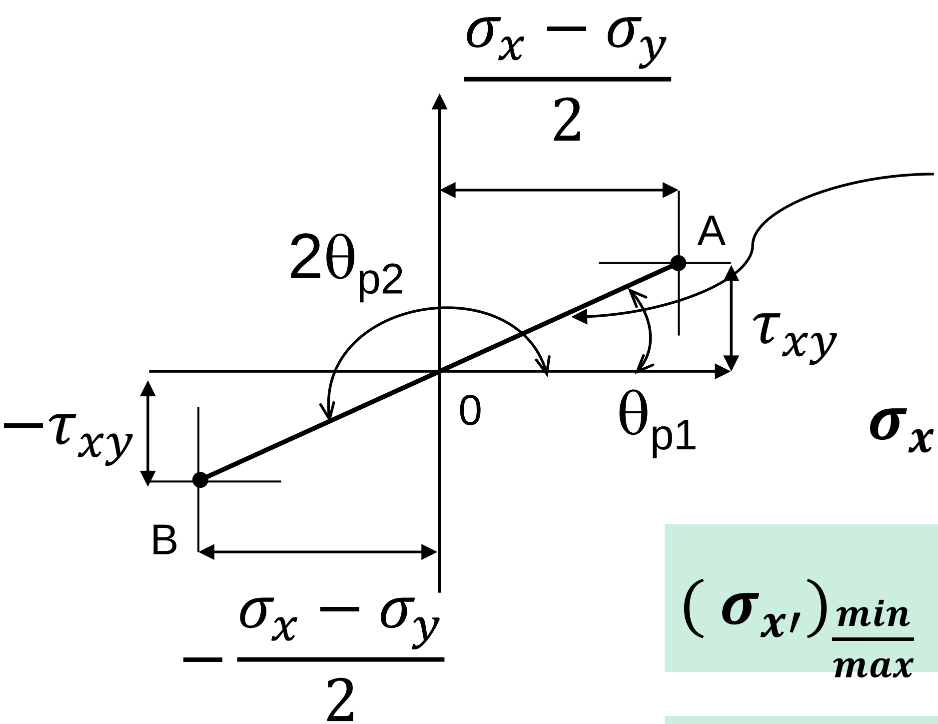
Diferenciando com relação a θ

$$\frac{\boldsymbol{\sigma_{x'}}}{\boldsymbol{\partial\theta}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.2.\sin 2\theta + 2\tau_{xy}.\cos 2\theta$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.2.\sin 2\theta + 2\tau_{xy}.\cos 2\theta = 0$$

$$\mathbf{tan}\, \boldsymbol{2\theta_p} = \frac{\boldsymbol{\tau_{xy}}}{(\boldsymbol{\sigma_x} - \boldsymbol{\sigma_y})/\mathbf{2}}$$

Tensões principais



$$\overline{\mathbf{0A}} = \overline{\mathbf{0B}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^{\mathbf{2}} + \tau_{xy}^{\mathbf{2}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{x'}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\cos 2\theta + \tau_{xy}.\sin 2\theta$$

$$(\boldsymbol{\sigma_{x'}})_{\frac{\boldsymbol{min}}{\boldsymbol{max}}} = \sigma_1 ou\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^{\mathbf{2}} + \tau_{xy}^{\mathbf{2}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{x'}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

De forma análoga determinamos as tensões cisalhantes máximas

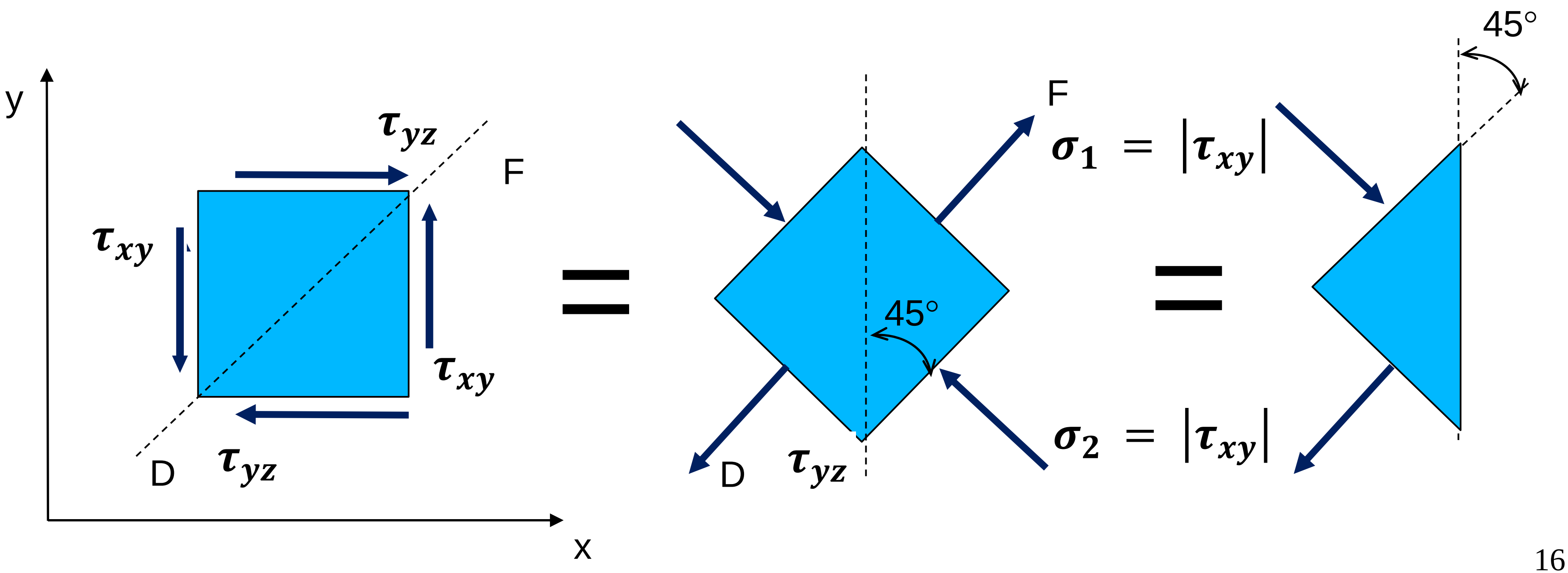
$$\boldsymbol{\tau}_{\frac{\boldsymbol{min}}{\boldsymbol{max}}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^{\mathbf{2}} + \tau_{xy}^{\mathbf{2}}}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{max}} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$$

Transformação de Tensões

Caso particular

- Uma transformação significativa de uma descrição de um estado de tensão ocorre quando a tensão de cisalhamento pura é convertida em tensões principais.



Círculo de Mohr

- Tomando por base as equações gerais para a tensão normal e cisalhante

$$\boldsymbol{\sigma_{x'}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} . \cos 2\theta + \tau_{xy} . \sin 2\theta$$

$$\boldsymbol{\tau_{x'y'}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} . \sin 2\theta + \tau_{xy} . \cos 2\theta$$

- Essas são as expressões gerais para tensão normal e cisalhante em qualquer plano definido pelo ângulo θ, Observem que $\sigma_x, \sigma_y \ e \ \tau_{xy}$ são conhecidas inicialmente.

Círculo de Mohr

- Tomando por base as equações gerais para a tensão normal e cisalhante

$$\boldsymbol{\sigma_{x'}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\cos 2\theta + \tau_{xy}.\sin 2\theta$$

$$\boldsymbol{\sigma_{x'}} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\cos 2\theta + \tau_{xy}.\sin 2\theta$$

$$\boldsymbol{\tau_{x'y'}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\sin 2\theta + \tau_{xy}.\cos 2\theta$$

- (Elevando ao quadrado, substituindo e simplificando):

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Círculo de Mohr

- Para um problema onde σ_x , σ_y e τ_{xy} são conhecidos, e $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ são variáveis

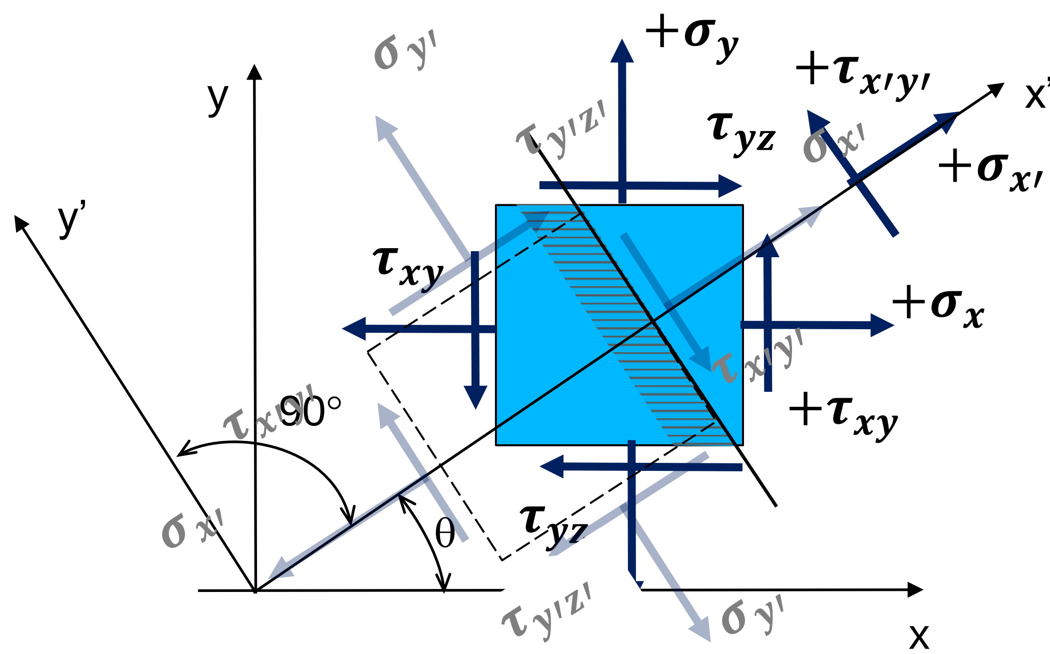
$$\left(\sigma_{x'} - \boxed{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \boxed{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)}^2 + \tau_{xy}^2$$

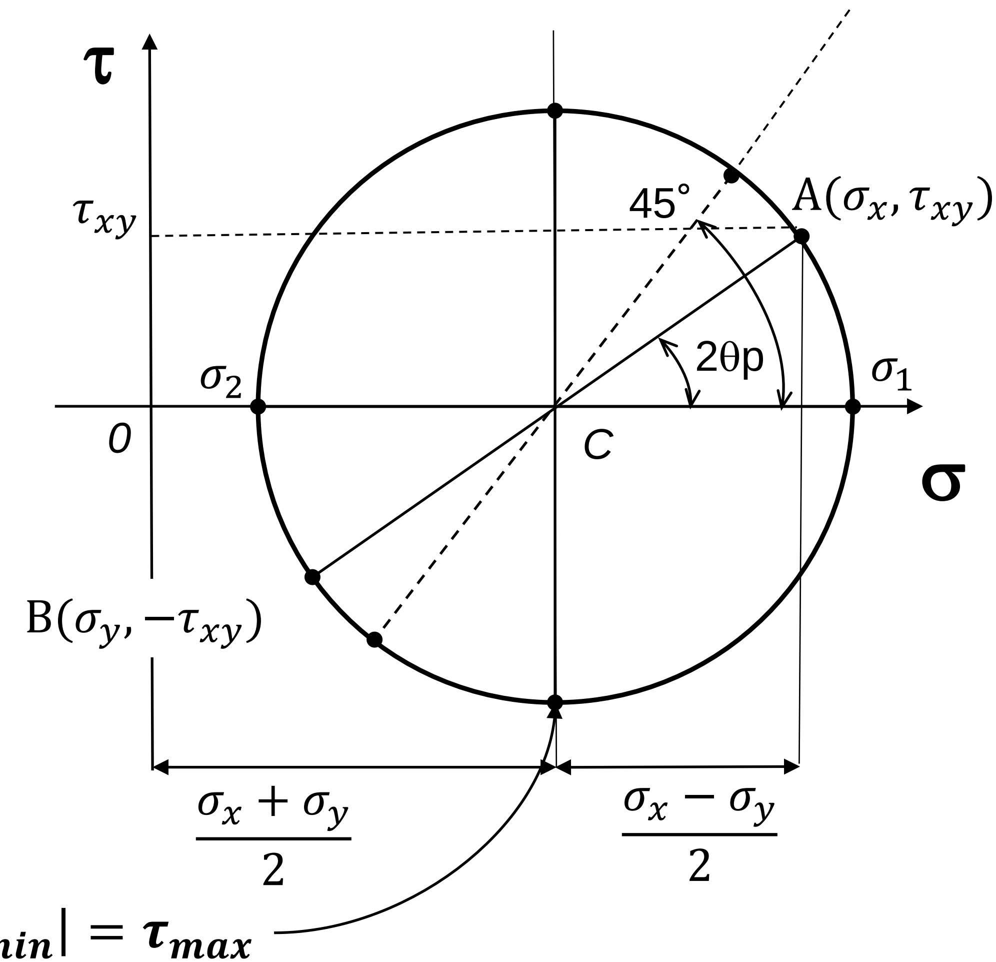
$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \qquad \boldsymbol{b} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)$$

$$(\ \sigma_{x'} - a)^2 + (\ \tau_{x'y'})^2 = b^2$$

$$(\boldsymbol{x} - a)^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}} = (r)^2$$

Círculo de Mohr





$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

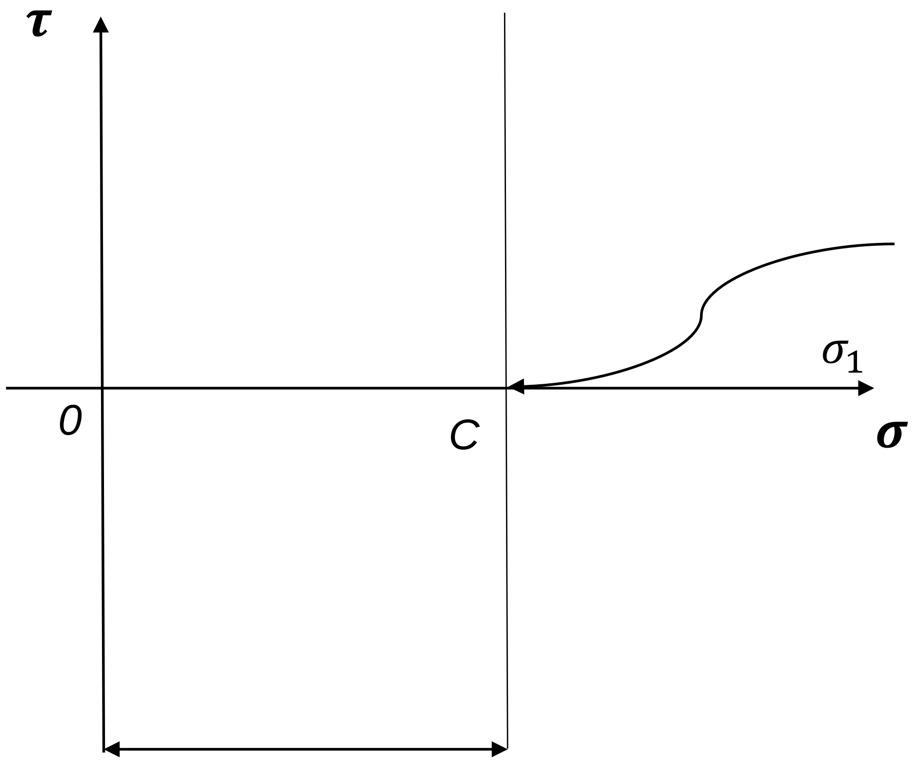
Círculo de Mohr

- O círculo de Mohr é uma representação geométrica o estado plano de tensão.
- Permite visualizar a relação entre a tensão normal e a cisalhante atuantes em vários planos do componente
- É muito útil para realizar estimativas eficientes e rápidas de falha em trabalhos mais complexos.
- O círculo de Mohr pode ser construído de várias formas, dependendo de qual tensão é conhecida, e qual deve ser determinada
- Esta interpretação visual do estado plano de tensões foi proposta pelo engenheiro alemão Otto Mohr em 1882

Construção do Círculo de Mohr

1. desenhe os eixos coordenados σ_1 como abscissa (→+) e τ como ordenada (↑+)

2. Localize o centro C do círculo

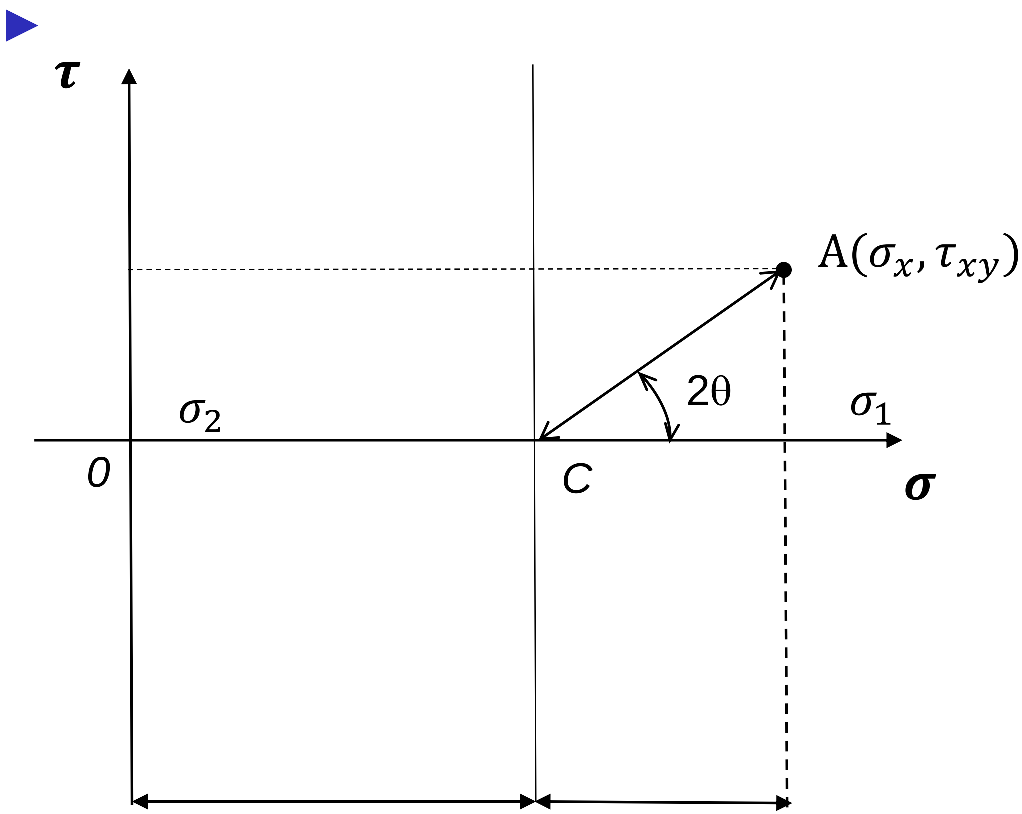


$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)$$

σ_x
σ_y
τ_{xy}

Conhecidos

Construção do Círculo de Mohr

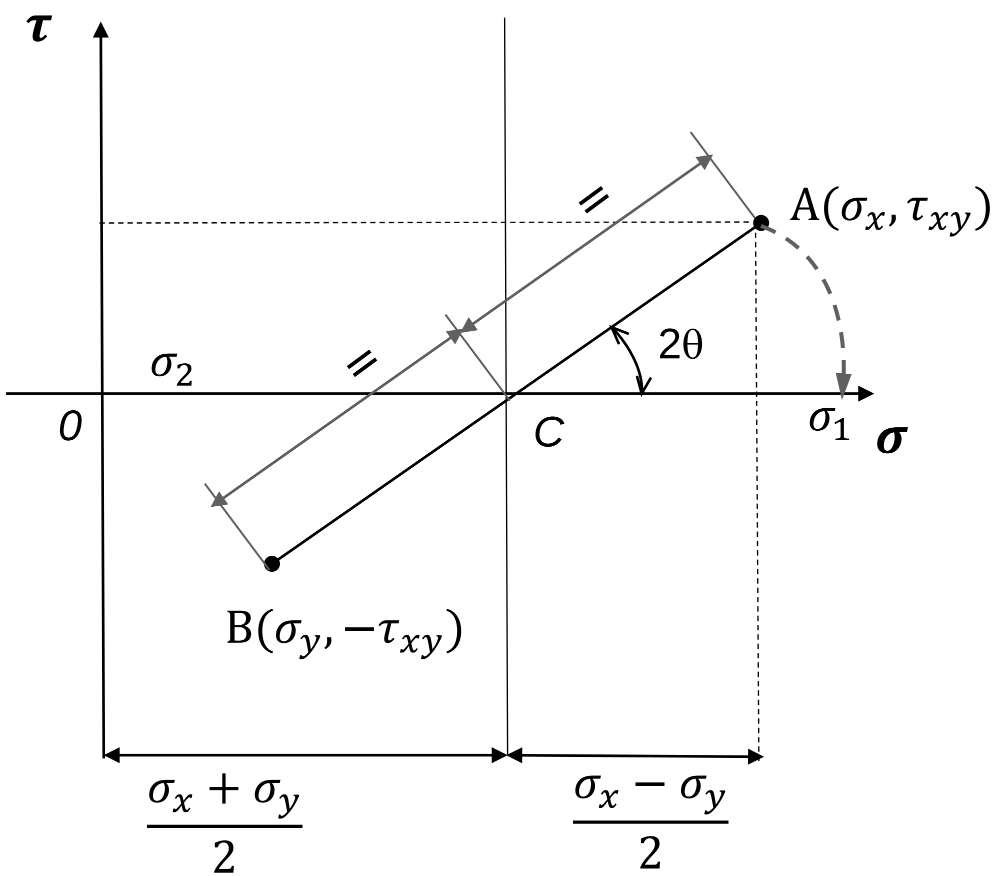


$$a = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)$$ $$b = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)$$

3. Localize o ponto ***A***, que representa a condição de tensão na face X do elemento.

O ponto A representa a condição onde θ=0. identifique este ponto

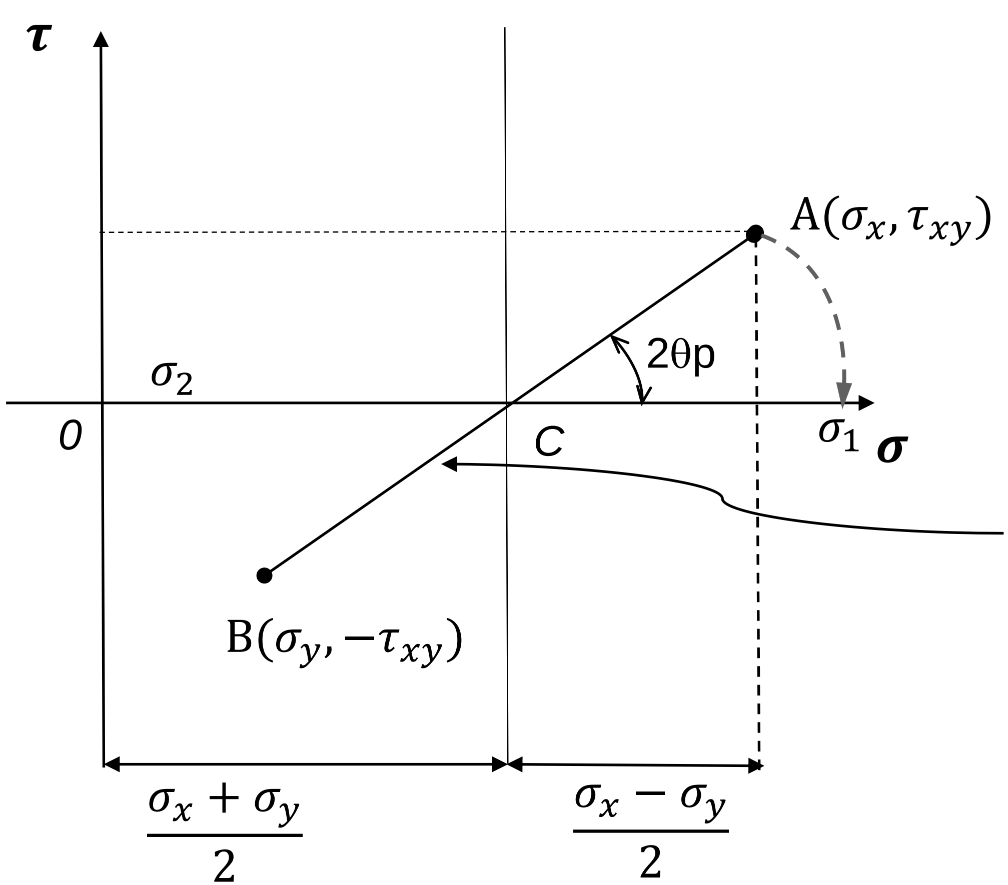
Construção do Círculo de Mohr



4. Localize o ponto B, que representa a condição de tensão na face Y do elemento.

O ponto B representa a condição onde θ=90°. identifique este ponto

Construção do Círculo de Mohr



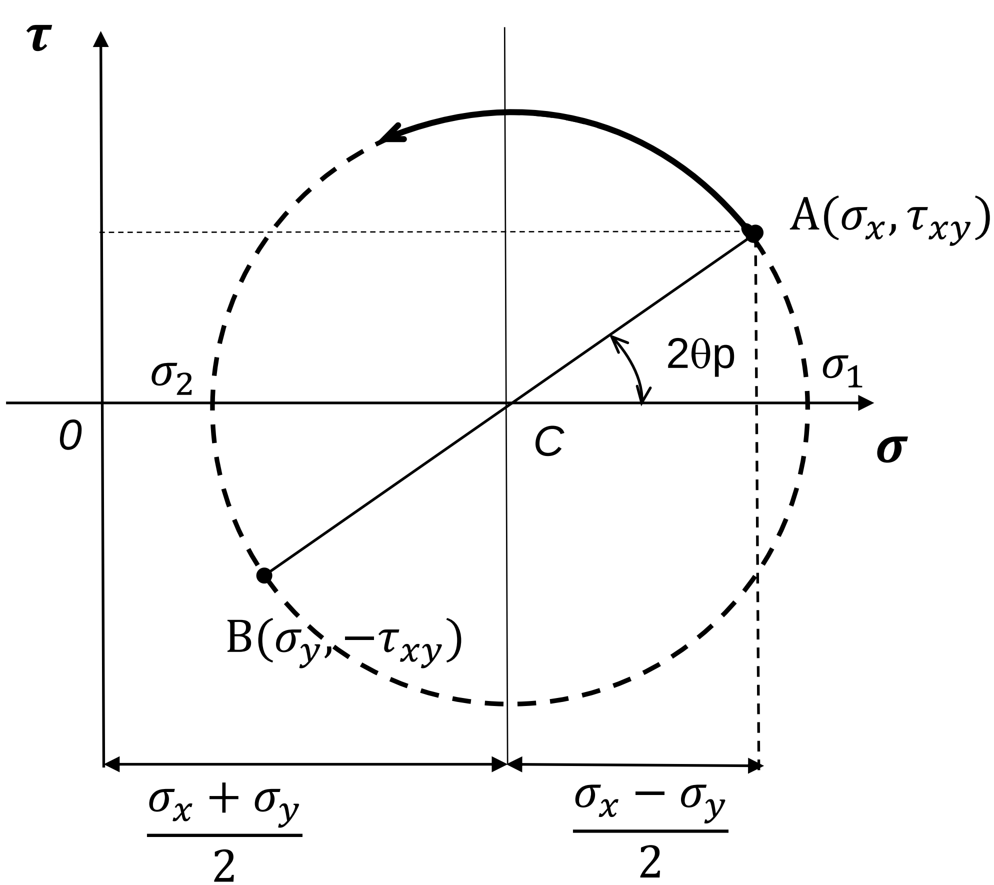
4. Localize o ponto B, que representa a condição de tensão na face Y do elemento.

O ponto B representa a condição onde θ=90°. identifique este ponto

5. Trace a linha AB, que representa o diâmetro do círculo.

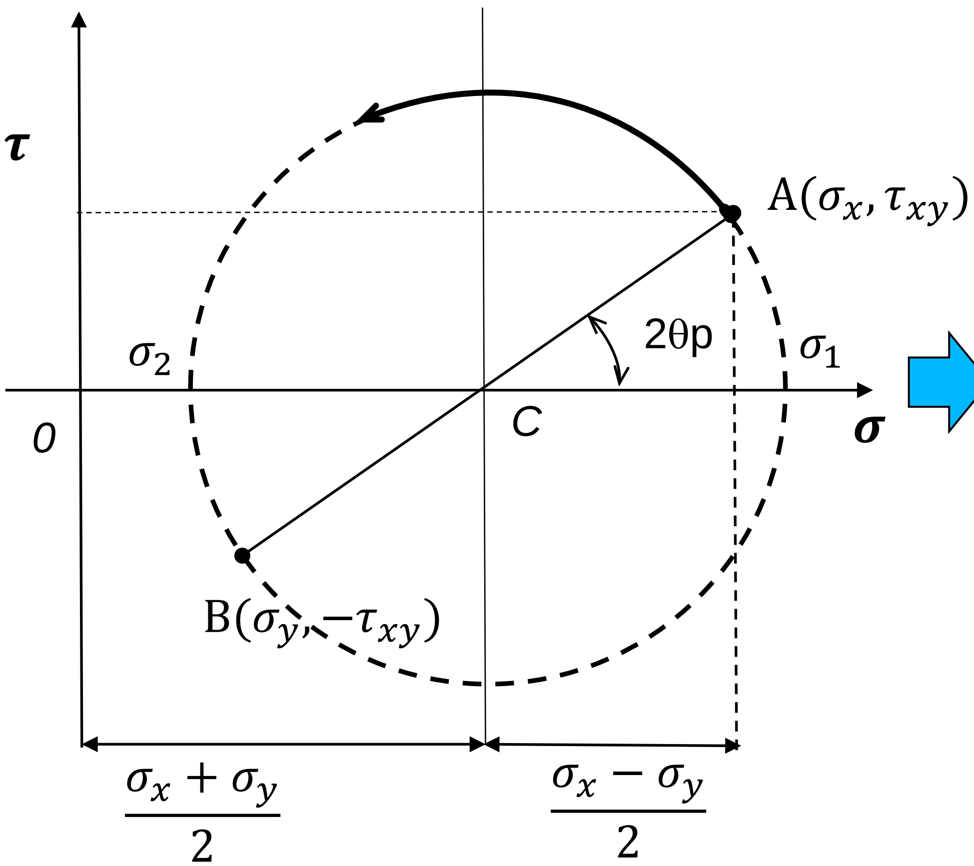
AB representa as tensões de planos a 90° (apesar de estarem a 180 ° no círculo)

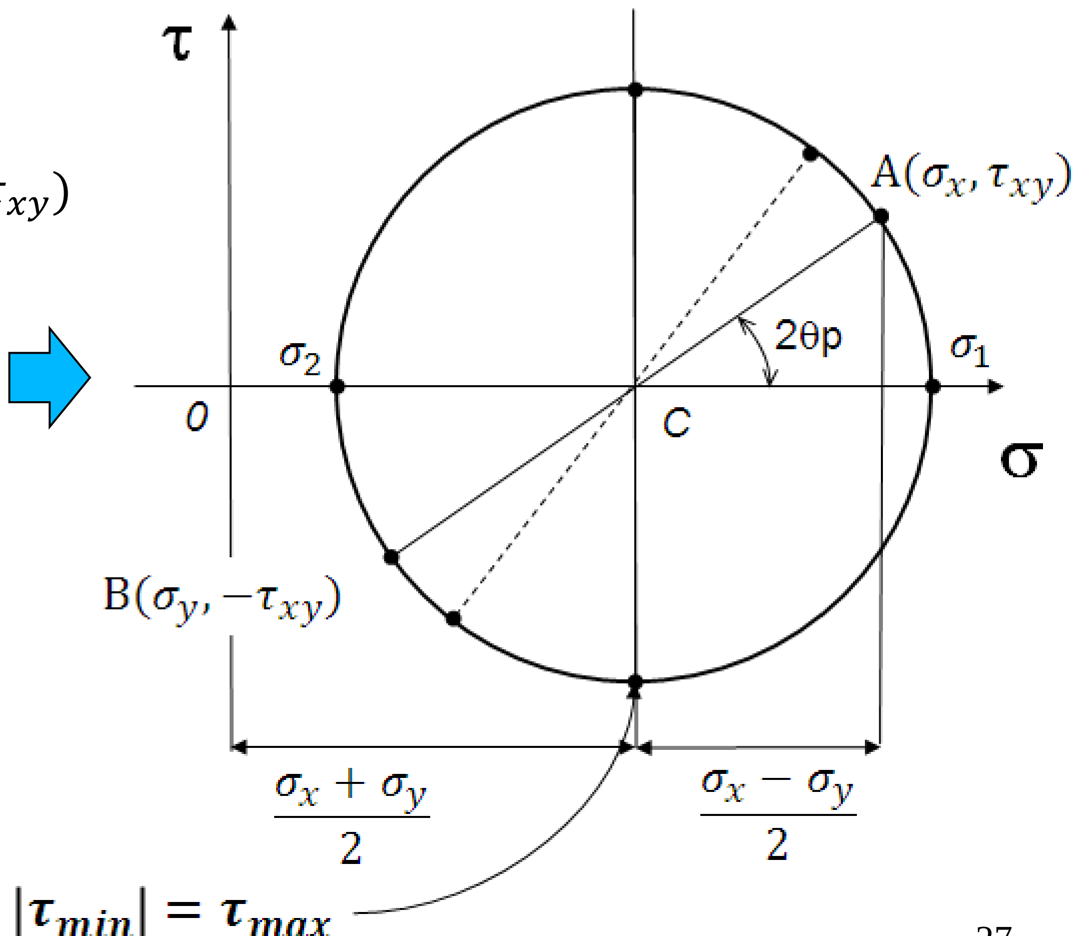
Construção do Círculo de Mohr



6. Trace o círculo usando o ponto C.

Construção do Círculo de Mohr

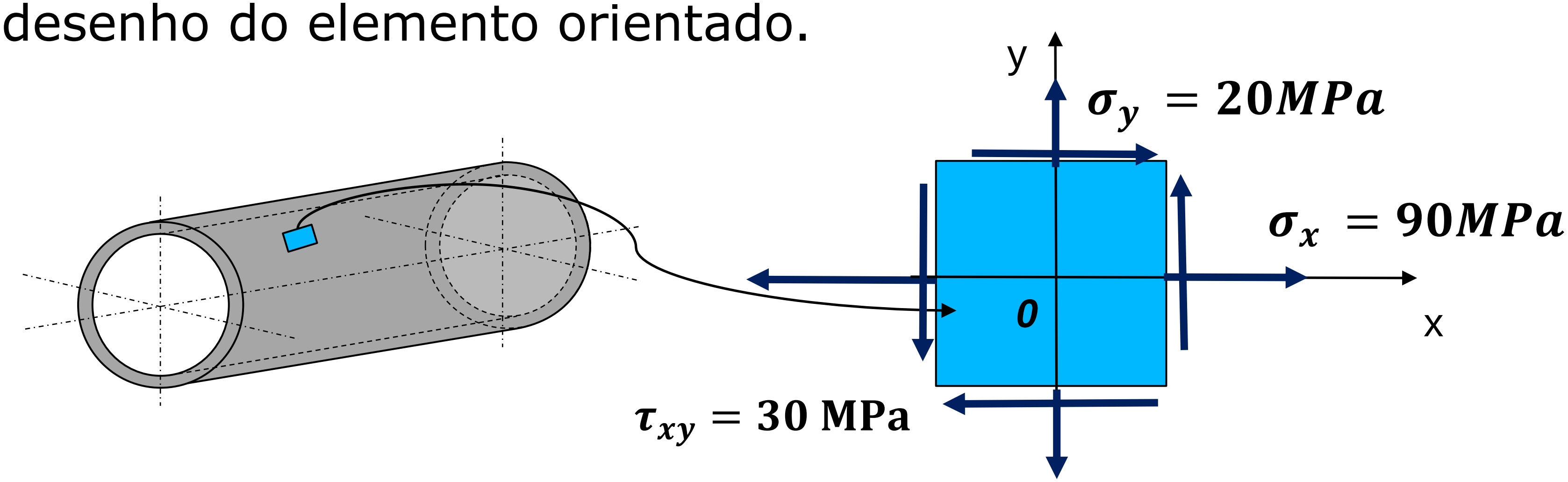




Exemplo 1

- Considere um ponto na superfície de um cilindro pressurizado. O material está sujeito a um estado biaxial de tensões σ_x = 90MPa, σ_y = 20MPa, e τ_{xy}= 30,3Mpa, conforme mostrado no elemento abaixo. Construa o círculo de Mohr e determine as tensões atuantes em um elemento inclinado a θ=30°. Considere somente o estado plano de tensões, e mostre um desenho do elemento orientado.

$\tau_{y'z'}$

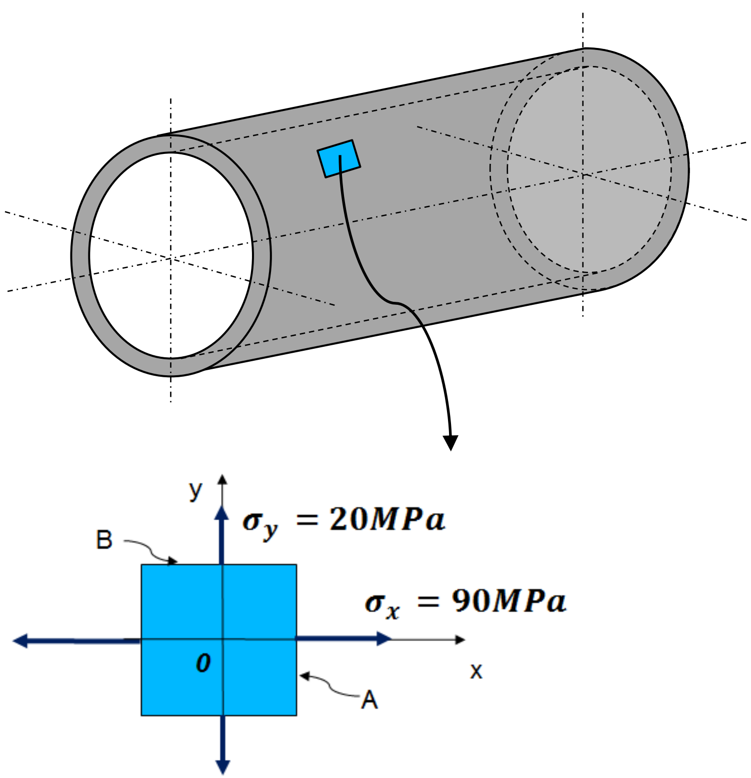


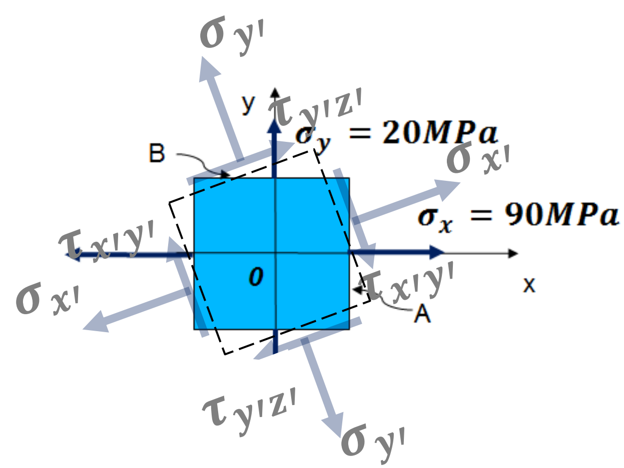
Exemplo 1

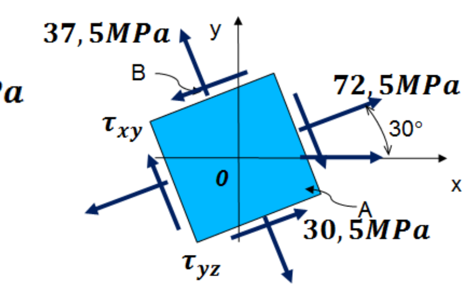
- Dados: σ_x = 90MPa, σ_y = 20MPa, e τ_{xy}= 30 MPa
- Determinar as tensões atuantes em um elemento inclinado a θ=30°
- Considerar: estado plano de tensões.

$$a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{90 + 20}{2} = \frac{110}{2} = 55MPa$$

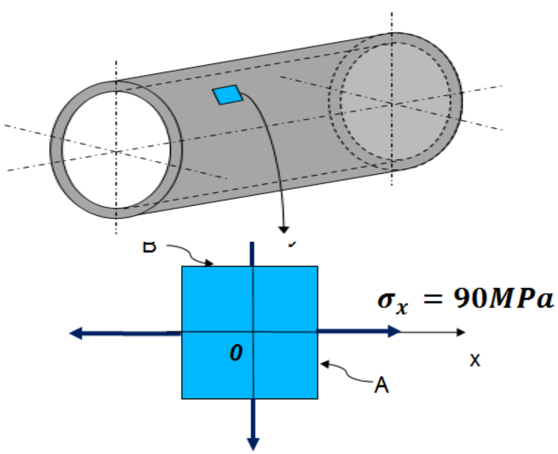
$$b = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{90 - 20}{2} = \frac{70}{2} = 35MPa$$

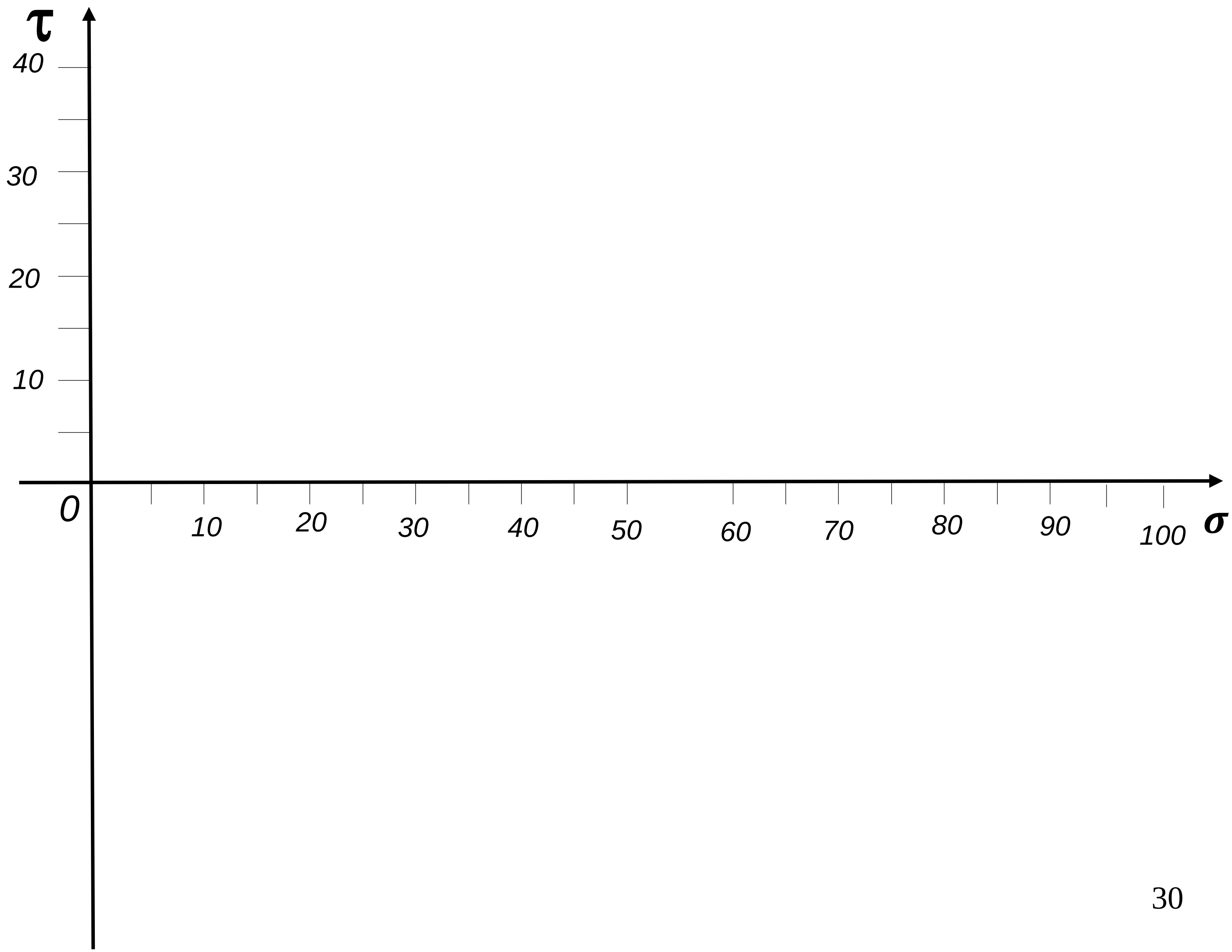






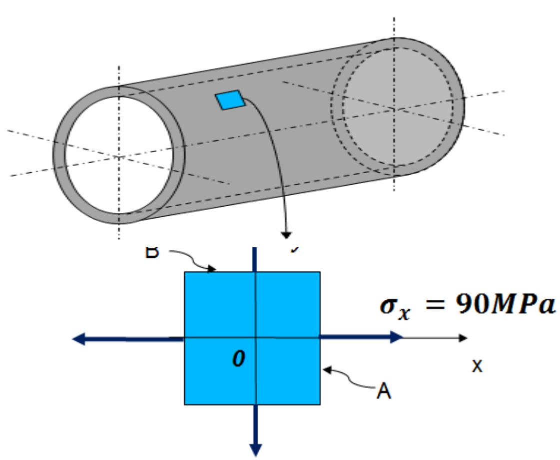
Exemplo 1

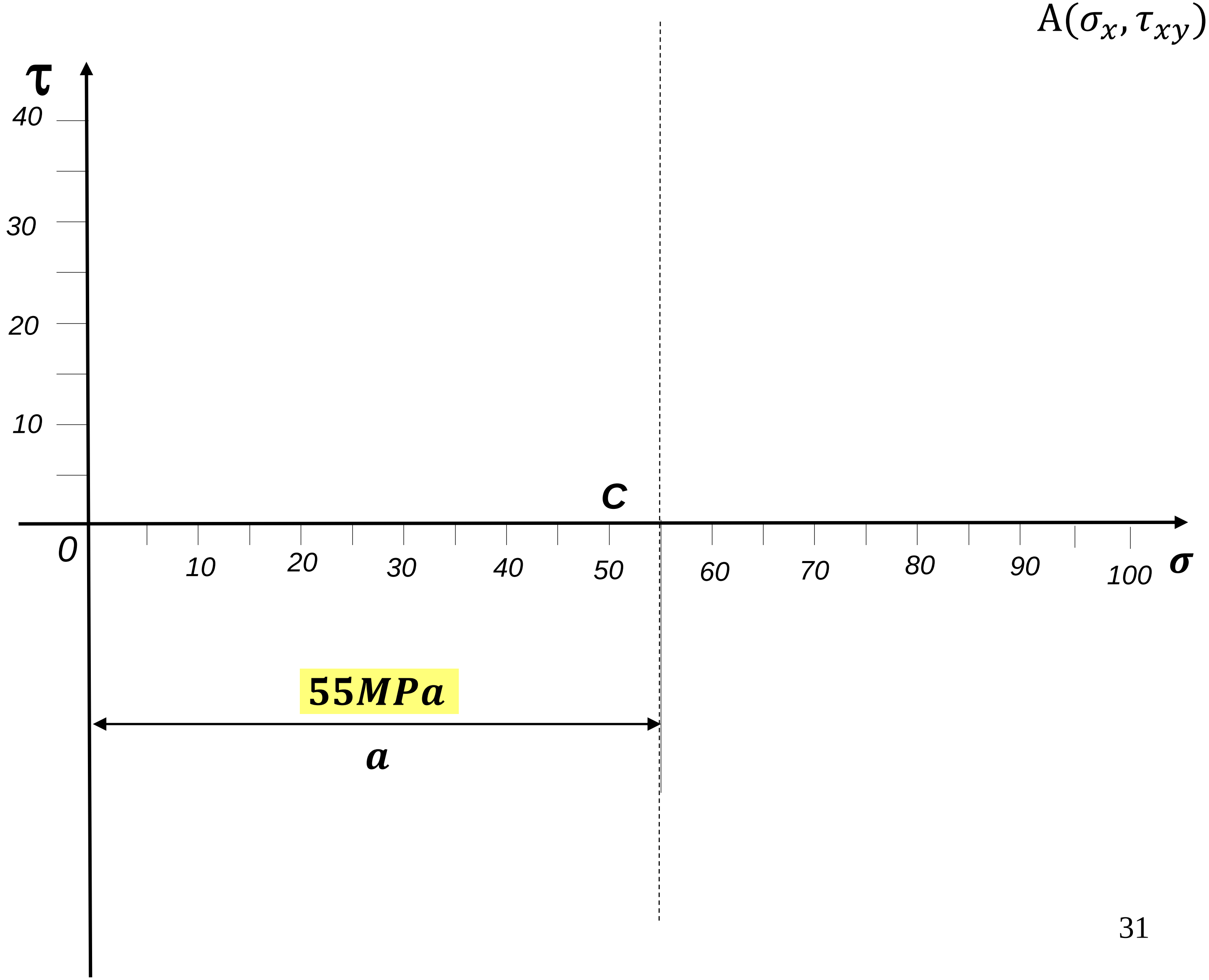




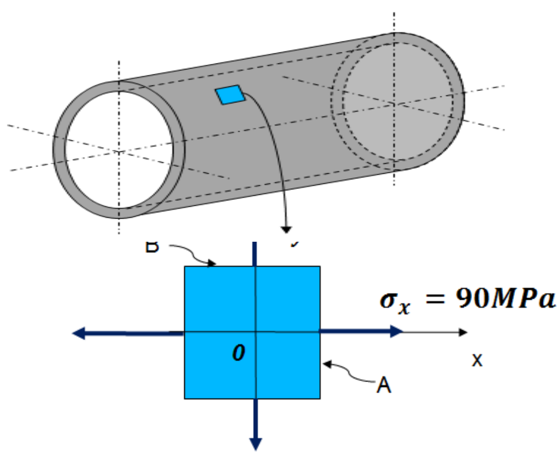
Exemplo 1

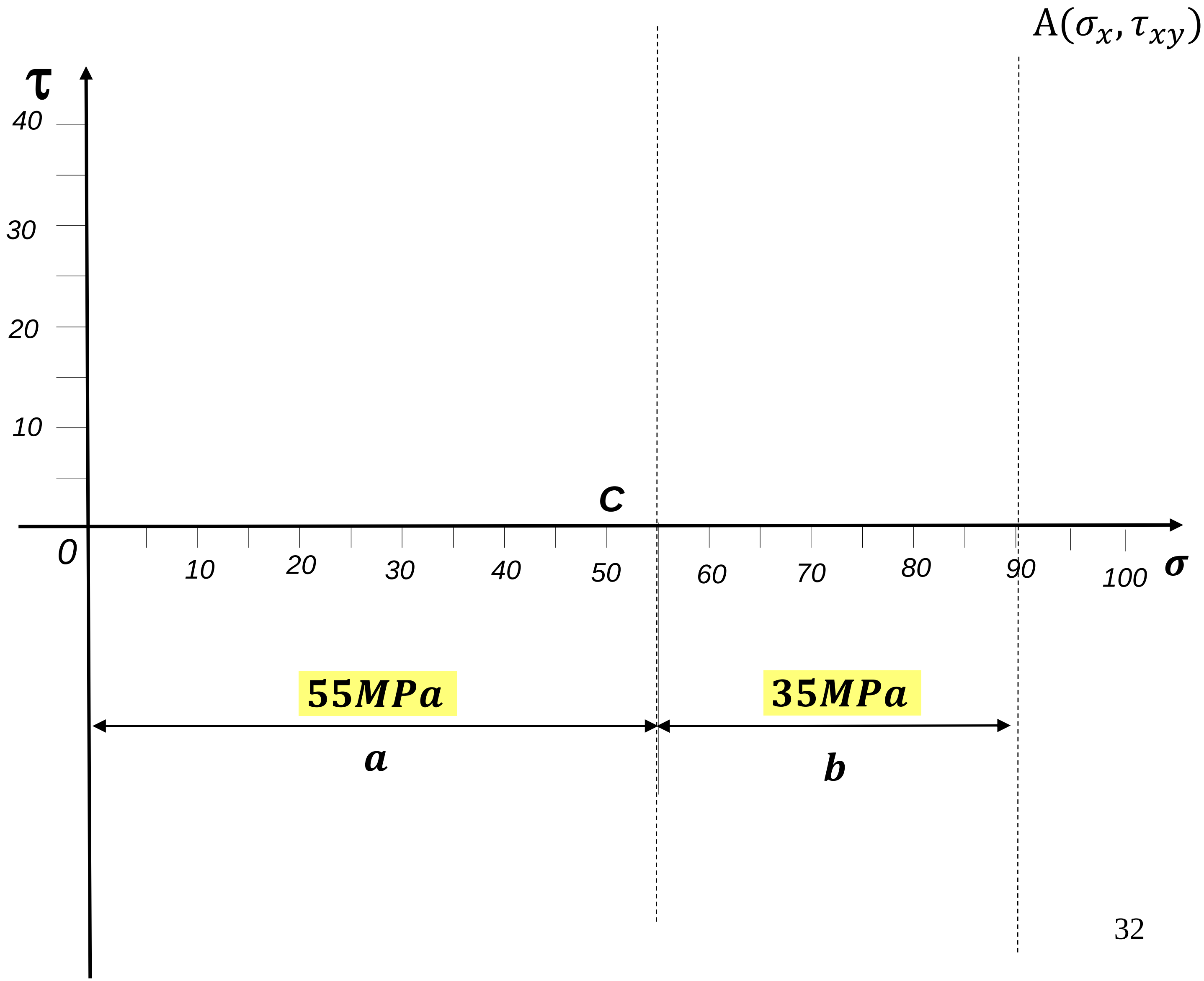
$A(\sigma_x, \tau_{xy})$



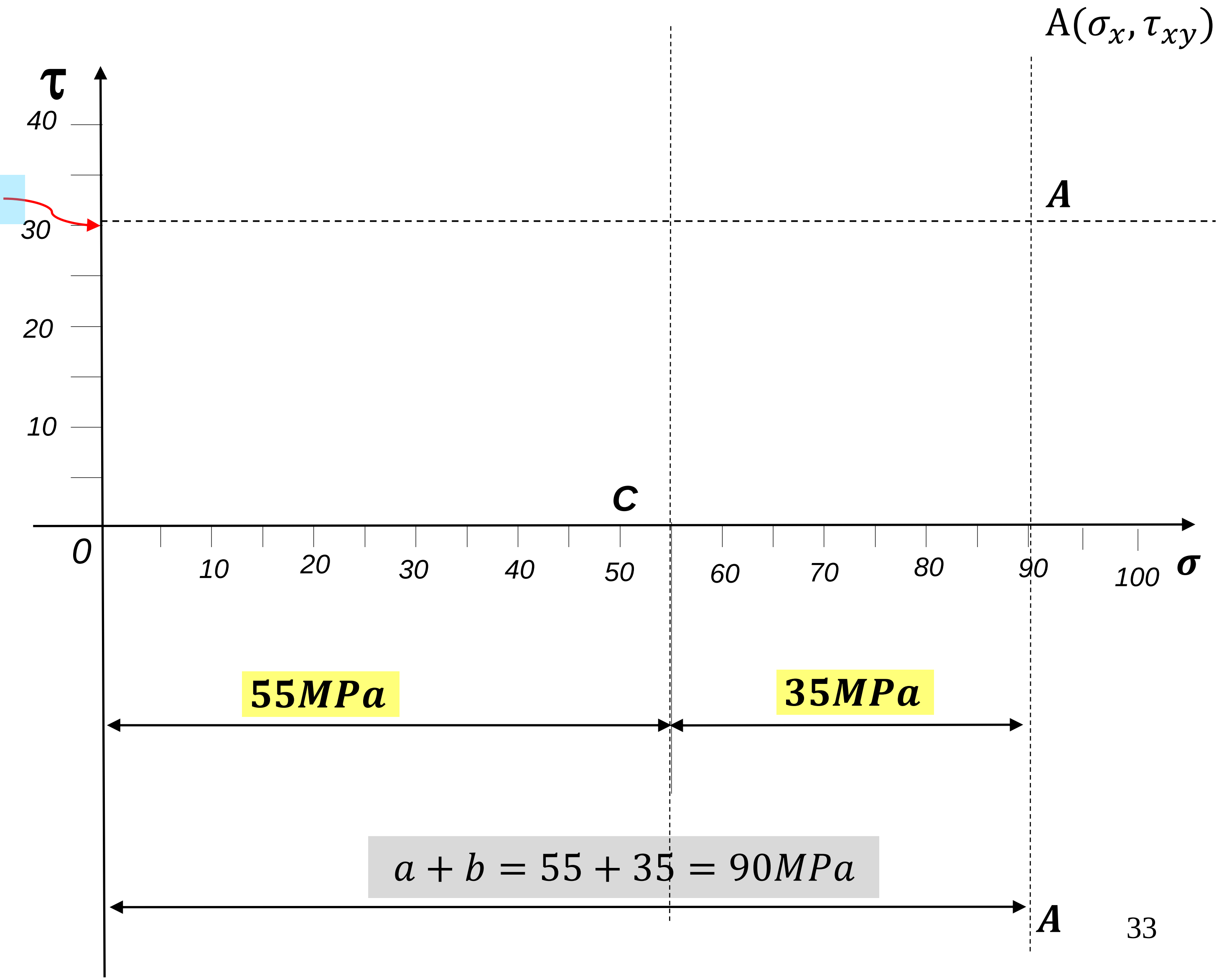


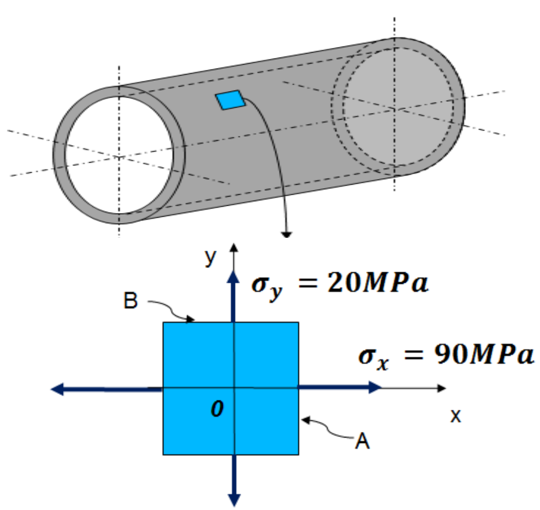
Exemplo 1


B
$\sigma_x = 90MPa$
0
x
A

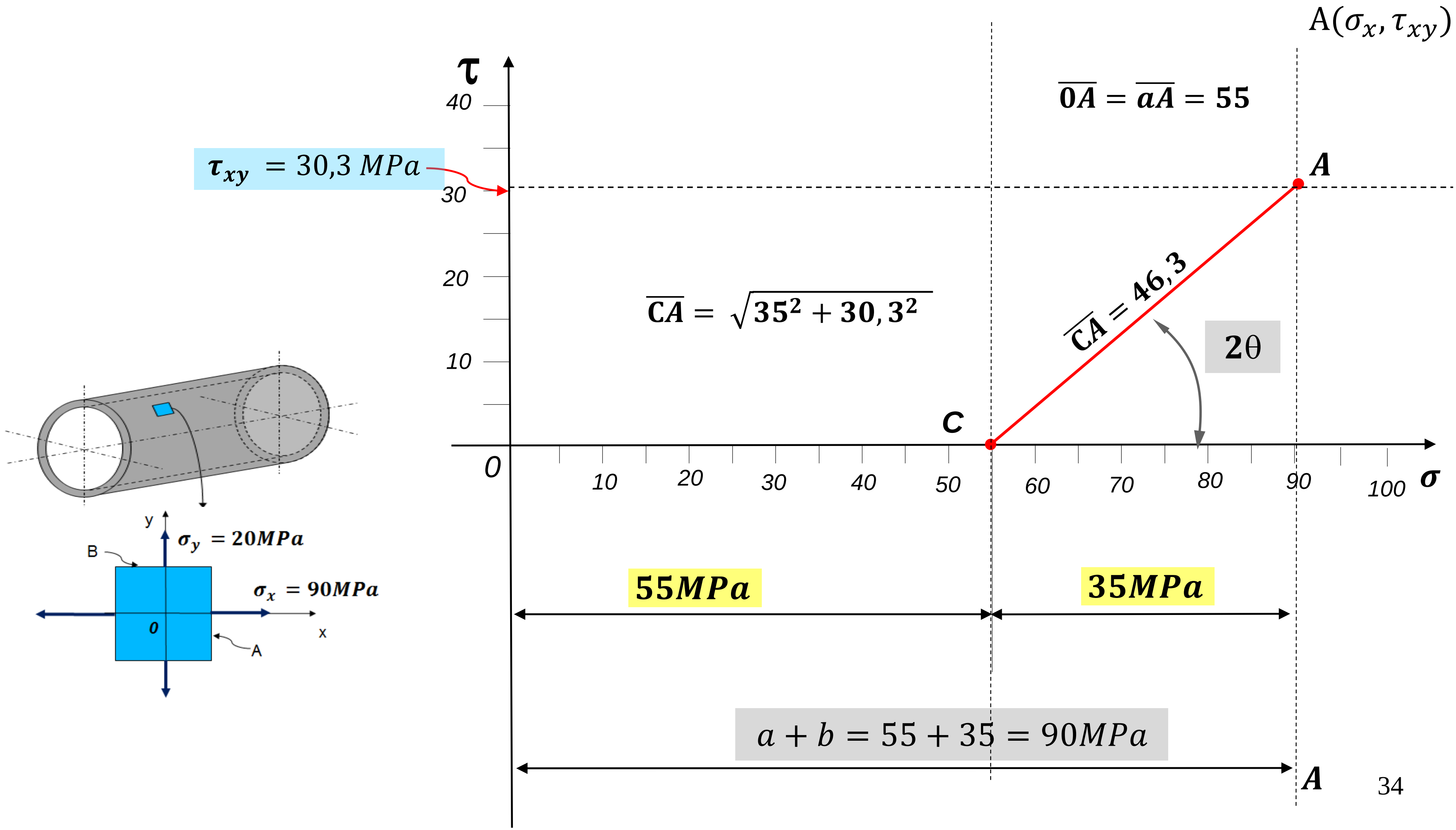

$A(\sigma_x, \tau_{xy})$
τ
40
30
20
10
0
C
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
σ
$55MPa$
$35MPa$
a
b

Exemplo 1


$A(\sigma_x, \tau_{xy})$
τ
40
30
20
10
$\tau_{xy} = 30{,}3\ MPa$
A
C
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
σ
$55MPa$
$35MPa$
$a + b = 55 + 35 = 90MPa$
A

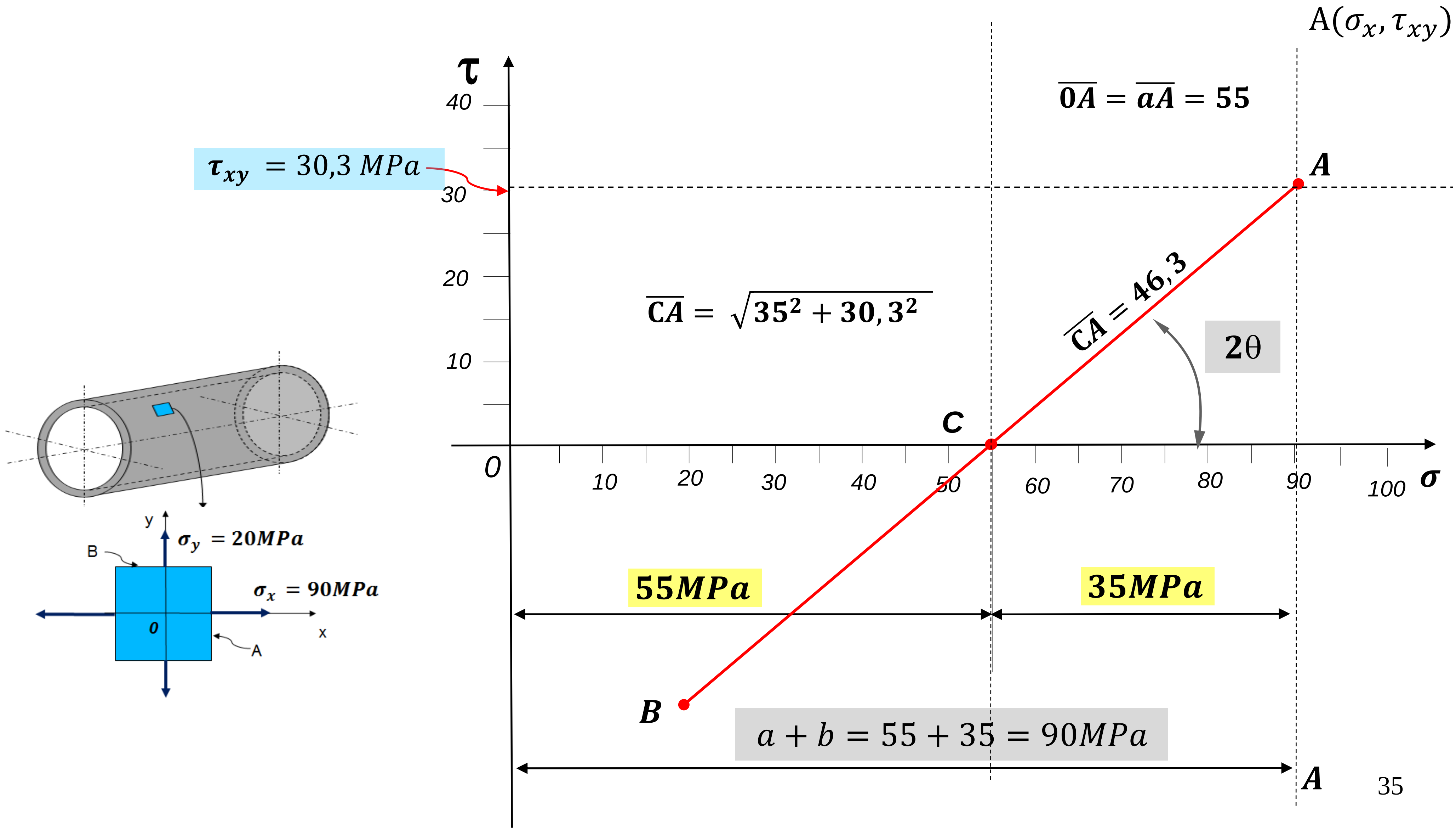

y
B
$\sigma_y = 20MPa$
$\sigma_x = 90MPa$
0
x
A

Exemplo 1



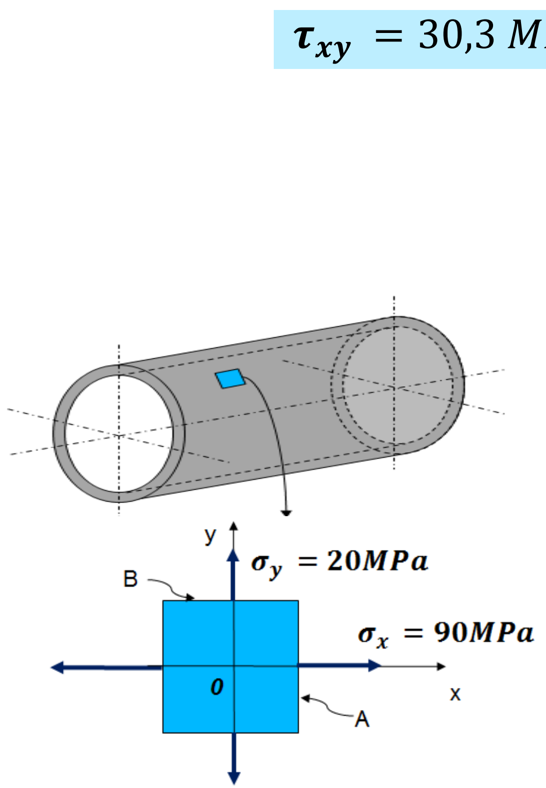
$A(\sigma_x, \tau_{xy})$
τ
40
30
20
10
0
$\tau_{xy} = 30{,}3\ MPa$
$\overline{0A} = \overline{aA} = 55$
A
$\overline{CA} = \sqrt{35^2 + 30,3^2}$
$\overline{CA} = 46,3$
2θ
C
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
σ
55MPa
35MPa
$a + b = 55 + 35 = 90MPa$
A
y
B
$\sigma_y = 20MPa$
$\sigma_x = 90MPa$
0
x
A

Exemplo 1

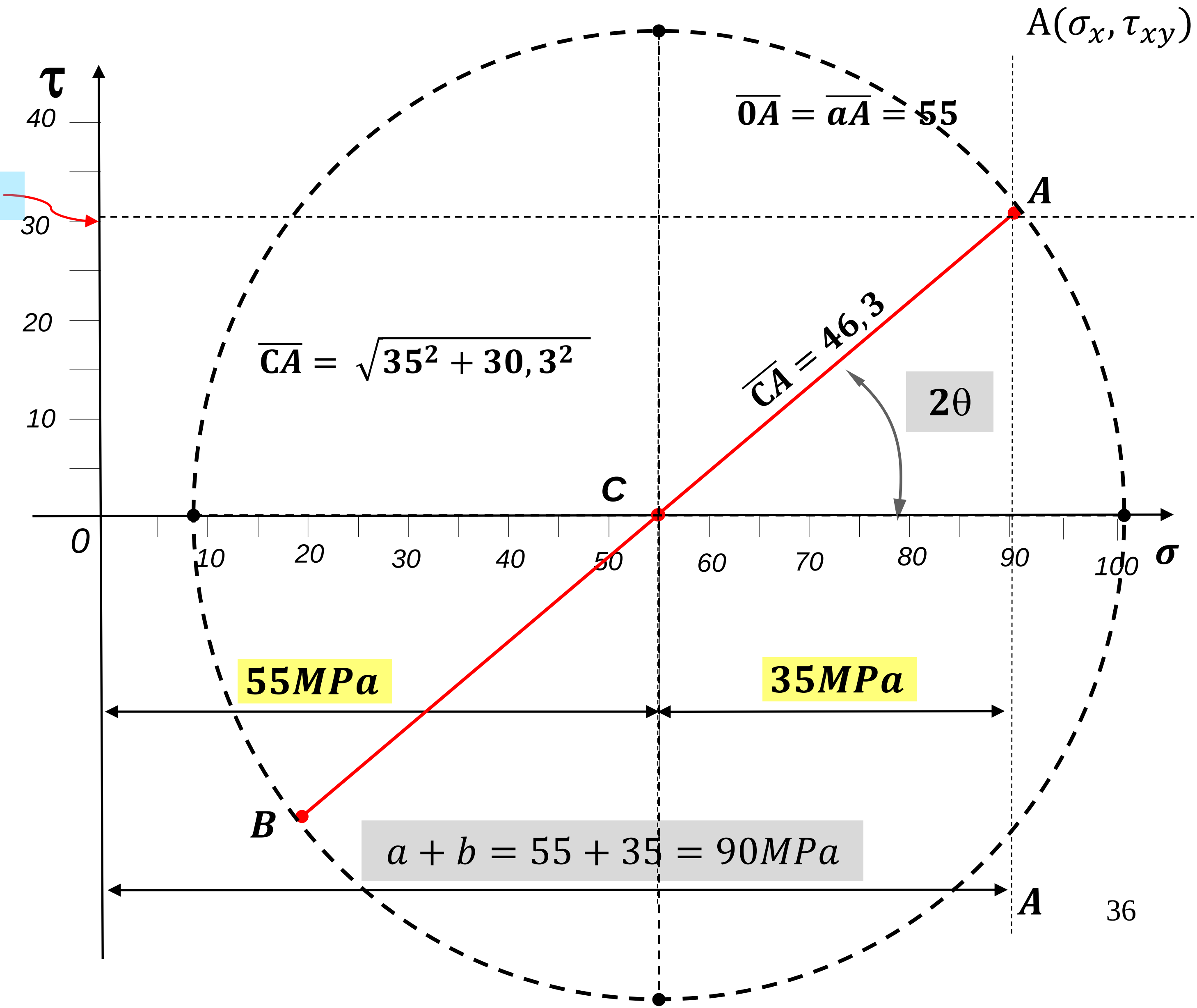


$A(\sigma_x, \tau_{xy})$
$\overline{0A} = \overline{aA} = 55$
$\tau_{xy} = 30{,}3\ MPa$
$\overline{CA} = \sqrt{35^2 + 30{,}3^2}$
$\overline{CA} = 46{,}3$
2θ
A
B
C
τ
σ
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
55MPa
35MPa
$a + b = 55 + 35 = 90MPa$
$\sigma_y = 20MPa$
$\sigma_x = 90MPa$
y
x
B
A
0

Exemplo 1

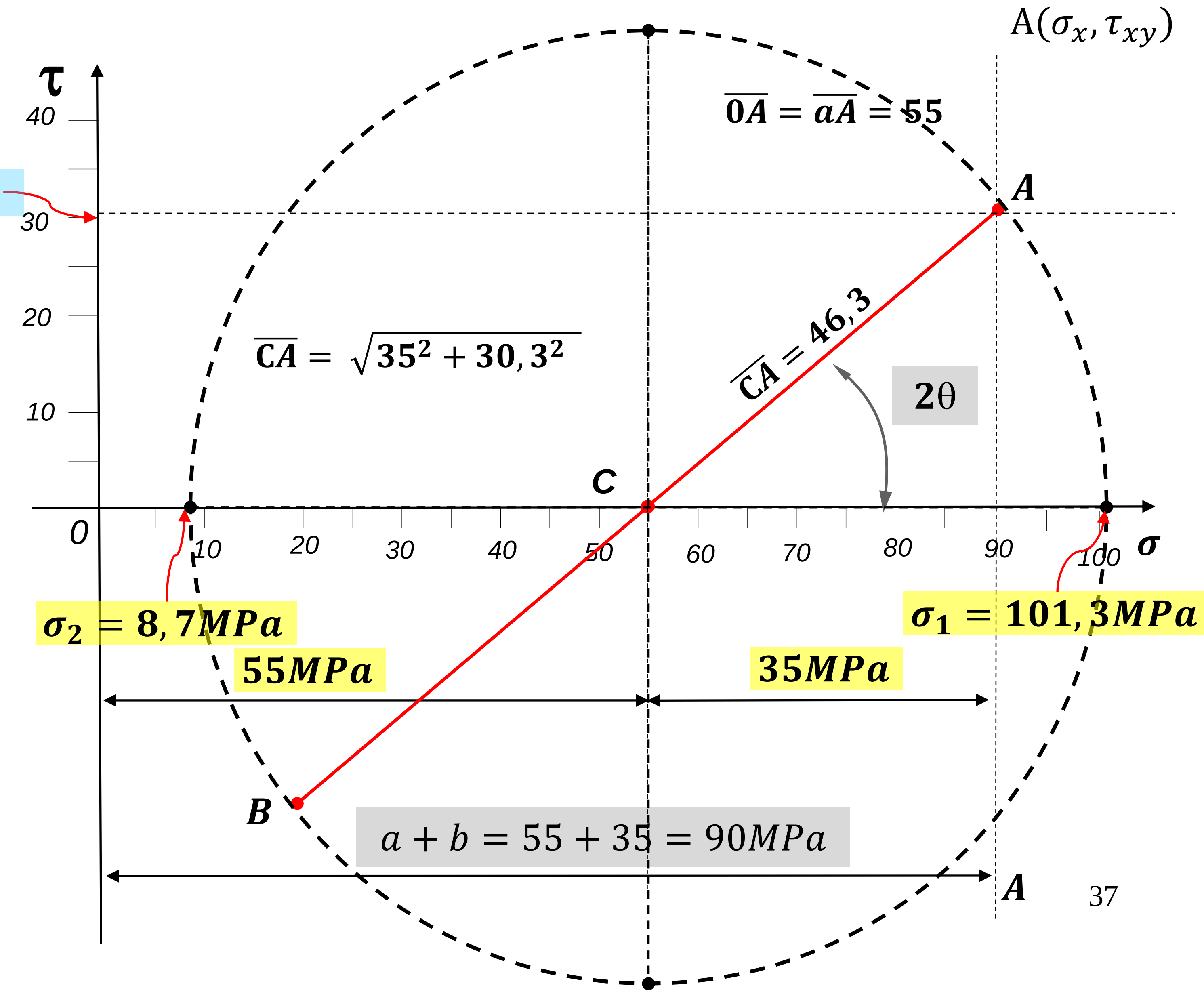


$\tau_{xy} = 30{,}3\ MPa$
$\sigma_y = 20MPa$
$\sigma_x = 90MPa$
B
A
0
x
y

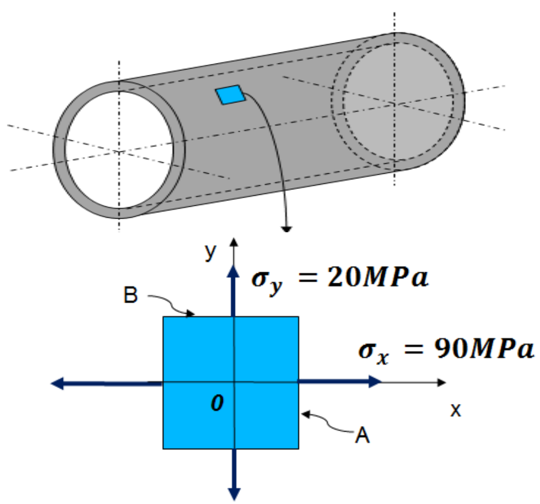


$A(\sigma_x, \tau_{xy})$
$\overline{0A} = \overline{aA} = 55$
$\overline{CA} = \sqrt{35^2 + 30,3^2}$
$\overline{CA} = 46,3$
2θ
τ
σ
C
A
B
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
55MPa
35MPa
$a + b = 55 + 35 = 90MPa$

Exemplo 1

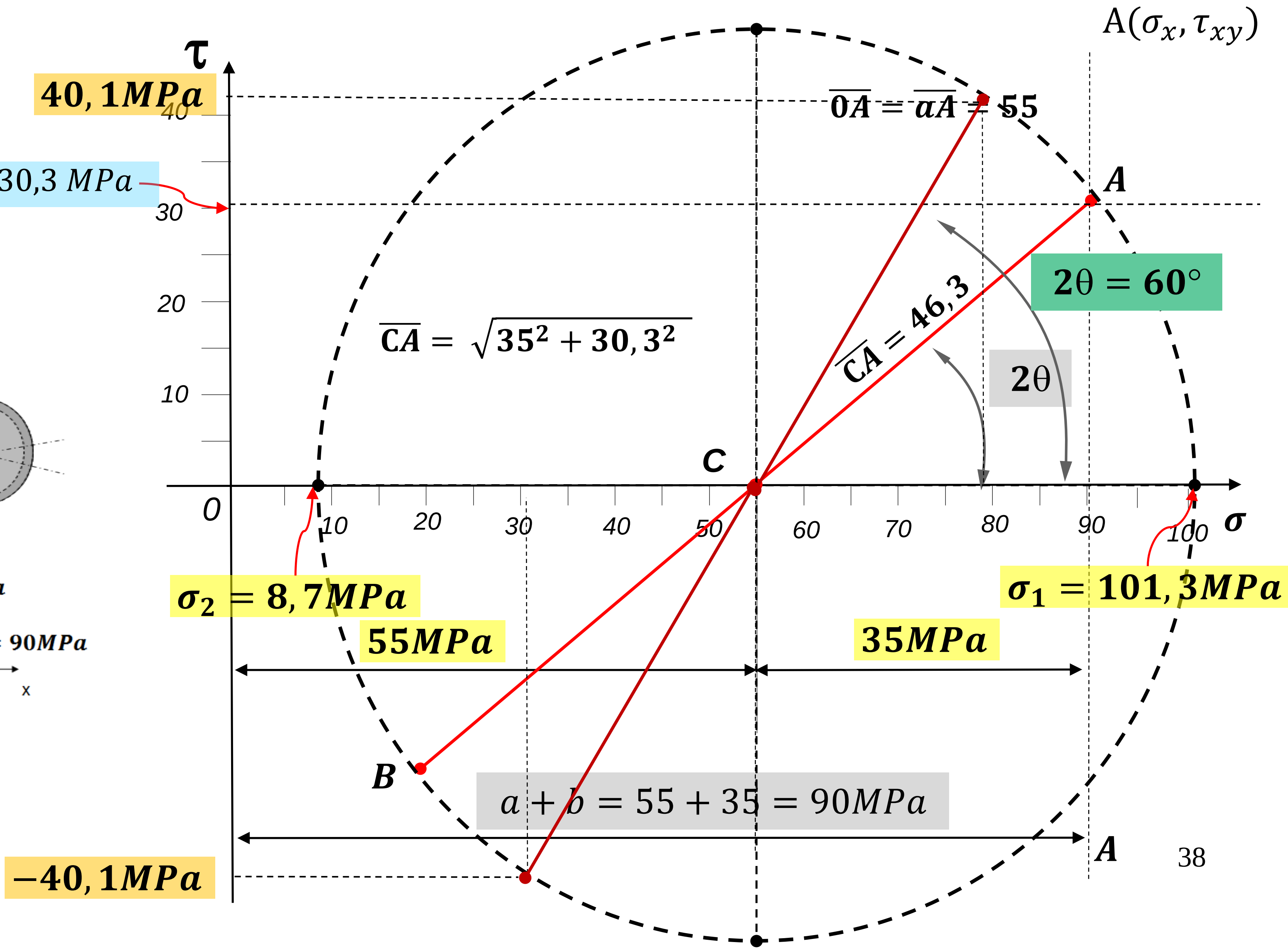


$\tau_{xy} = 30{,}3\ MPa$
$\overline{0A} = \overline{aA} = 55$
$\mathrm{A}(\sigma_x, \tau_{xy})$
$\overline{CA} = \sqrt{35^2 + 30,3^2}$
$\overline{CA} = 46,3$
2θ
C
A
B
$\sigma_2 = 8,7MPa$
$\sigma_1 = 101,3MPa$
$55MPa$
$35MPa$
$a + b = 55 + 35 = 90MPa$
τ
σ
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

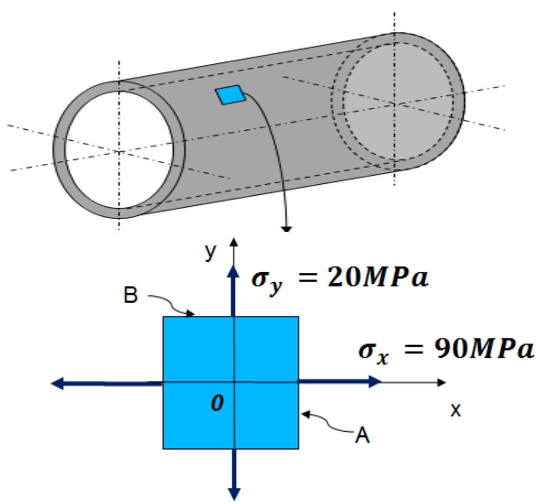


y
x
B
A
0
$\sigma_y = 20MPa$
$\sigma_x = 90MPa$

Exemplo 1

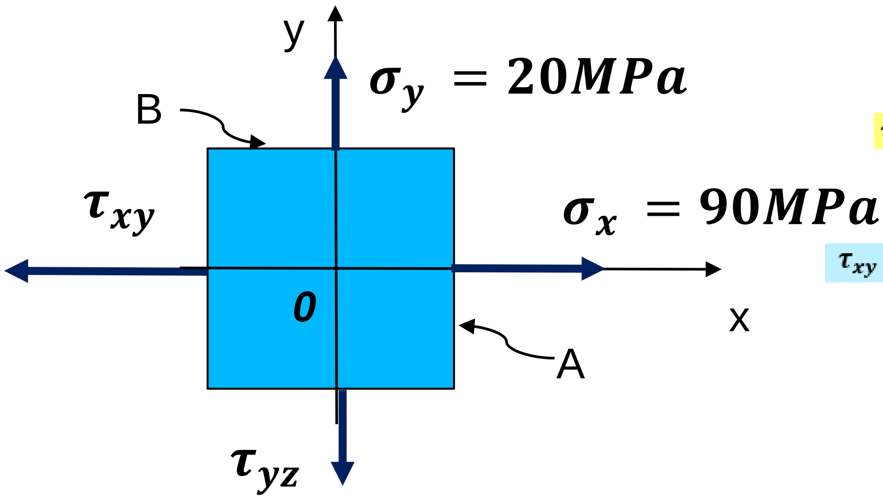


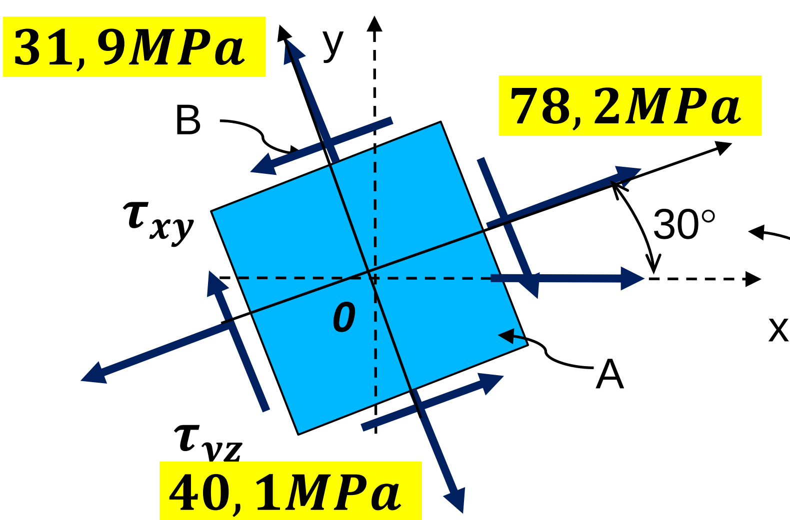
$A(\sigma_x, \tau_{xy})$
τ
$40,1MPa$
$\tau_{xy} = 30,3\ MPa$
$\overline{0A} = \overline{aA} = 55$
A
$2\theta = 60°$
$\overline{CA} = 46,3$
$\overline{CA} = \sqrt{35^2 + 30,3^2}$
2θ
C
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
σ
$\sigma_2 = 8,7MPa$
$\sigma_1 = 101,3MPa$
$55MPa$
$35MPa$
B
$a + b = 55 + 35 = 90MPa$
A
$-40,1MPa$

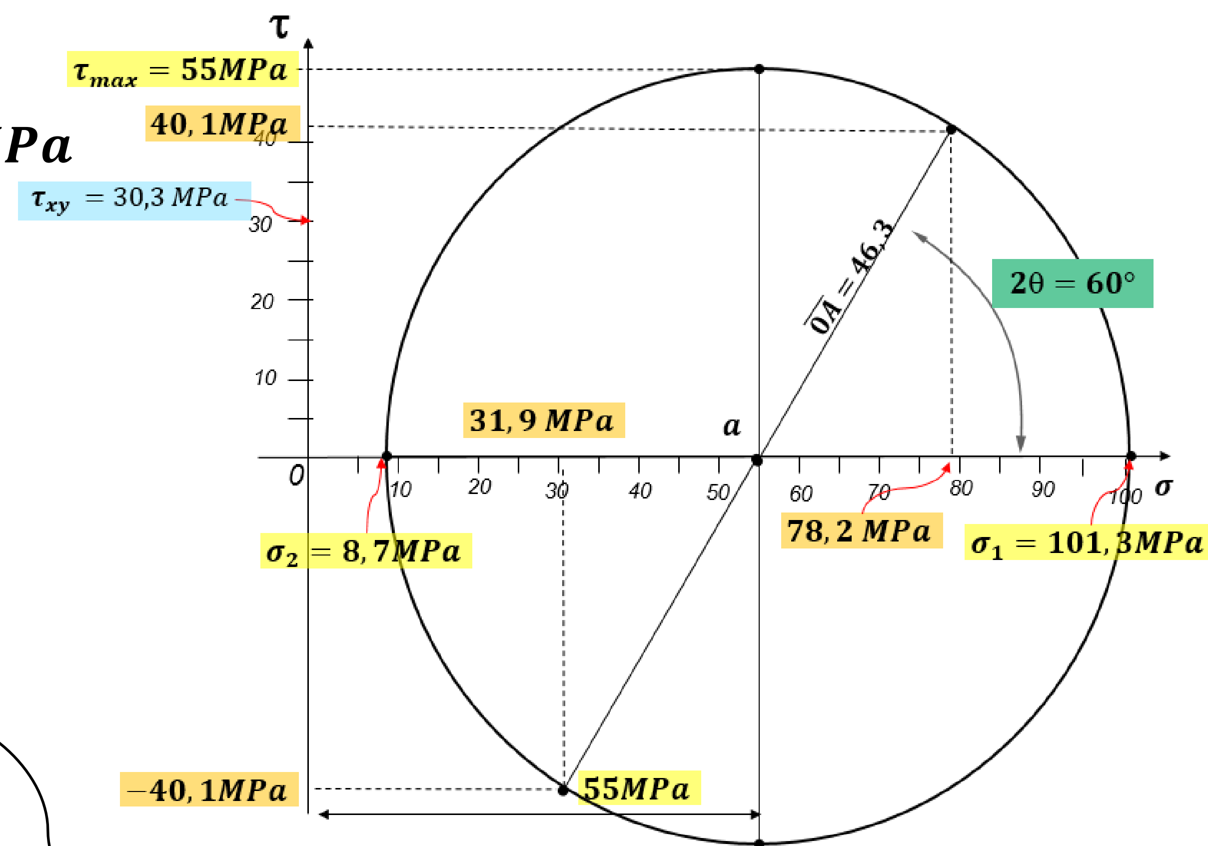


y
B
$\sigma_y = 20MPa$
$\sigma_x = 90MPa$
0
x
A

Exemplo 1



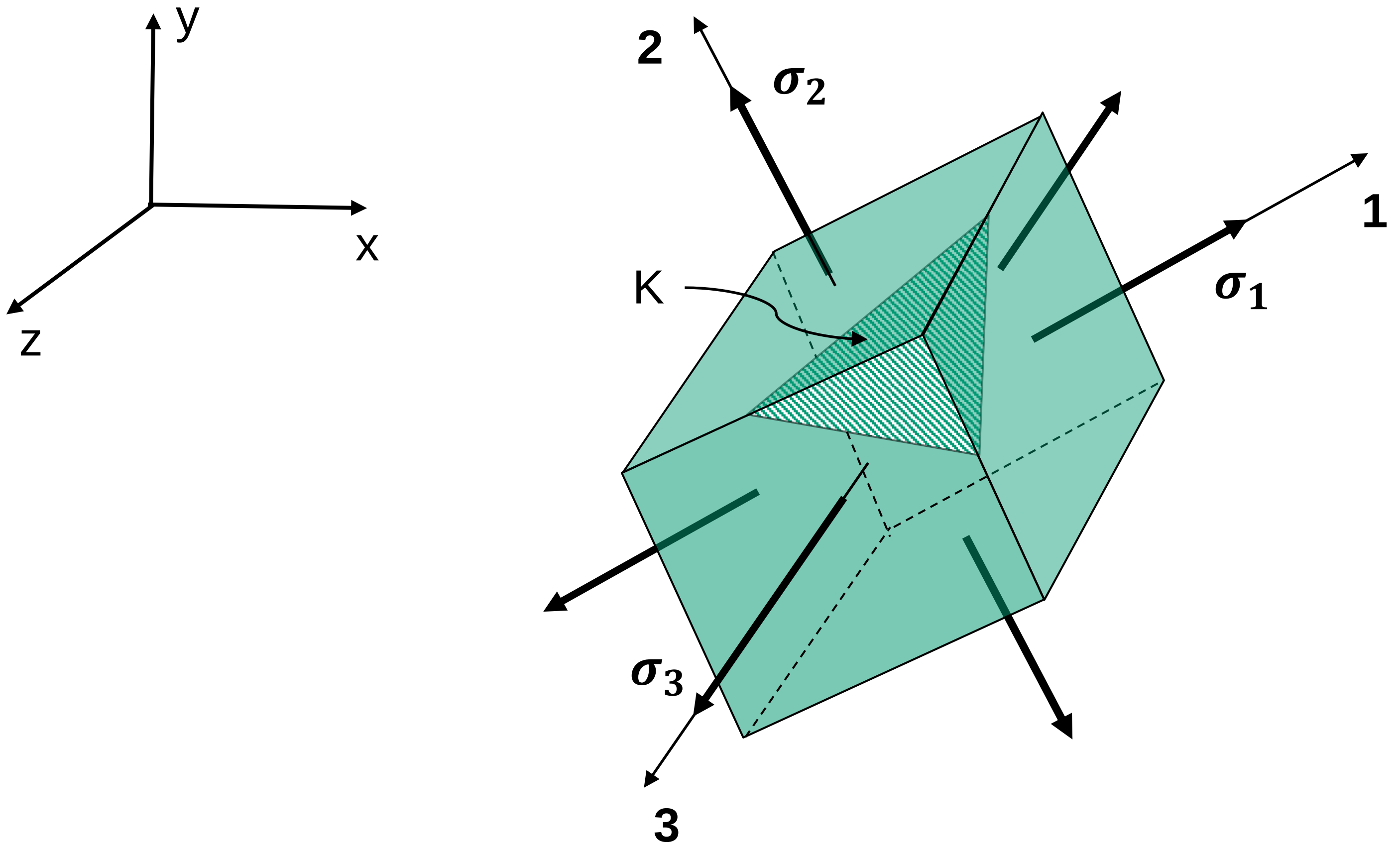




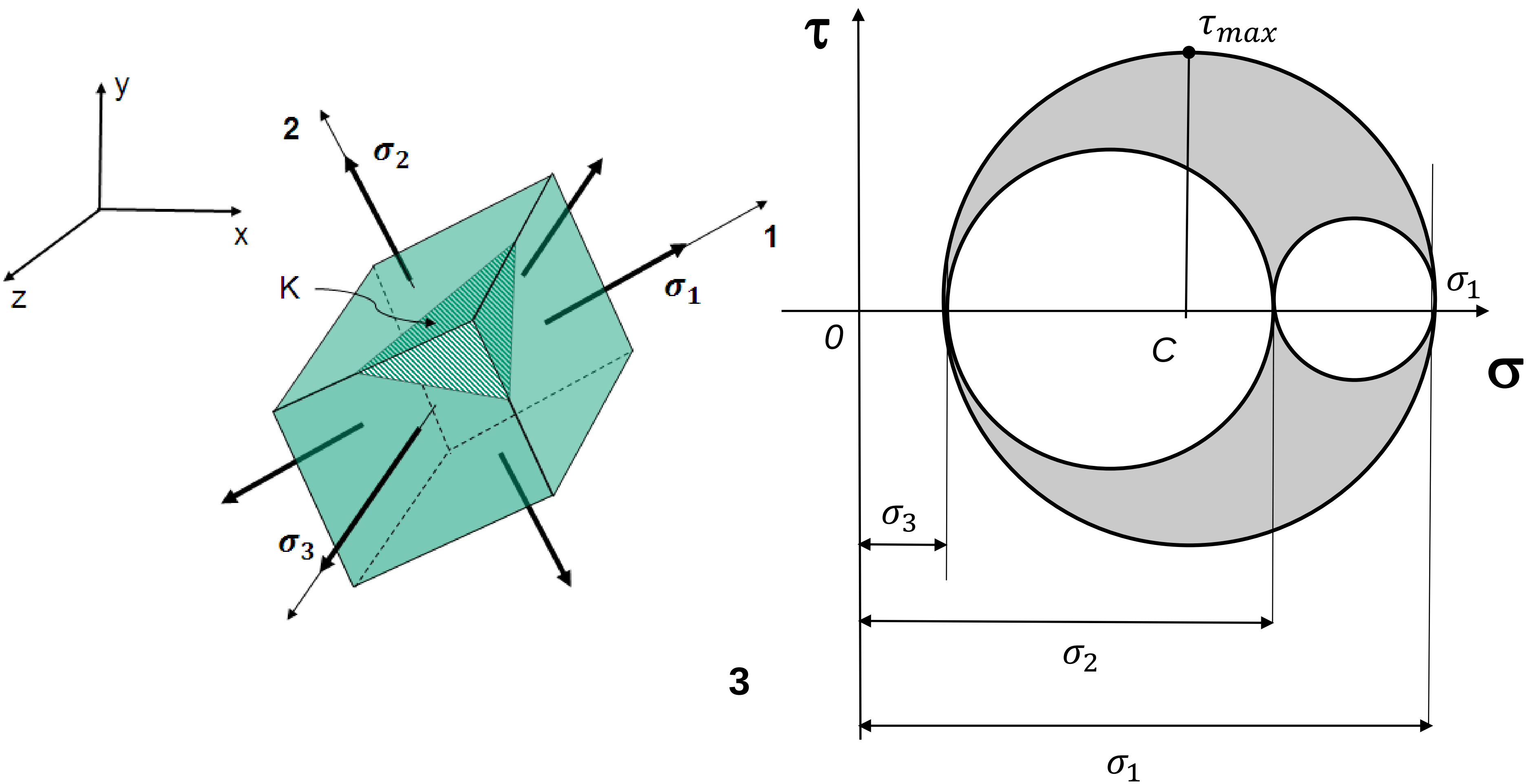
mostre um desenho do elemento orientado.

Círculo de Mohr para o estado geral de tensões

►



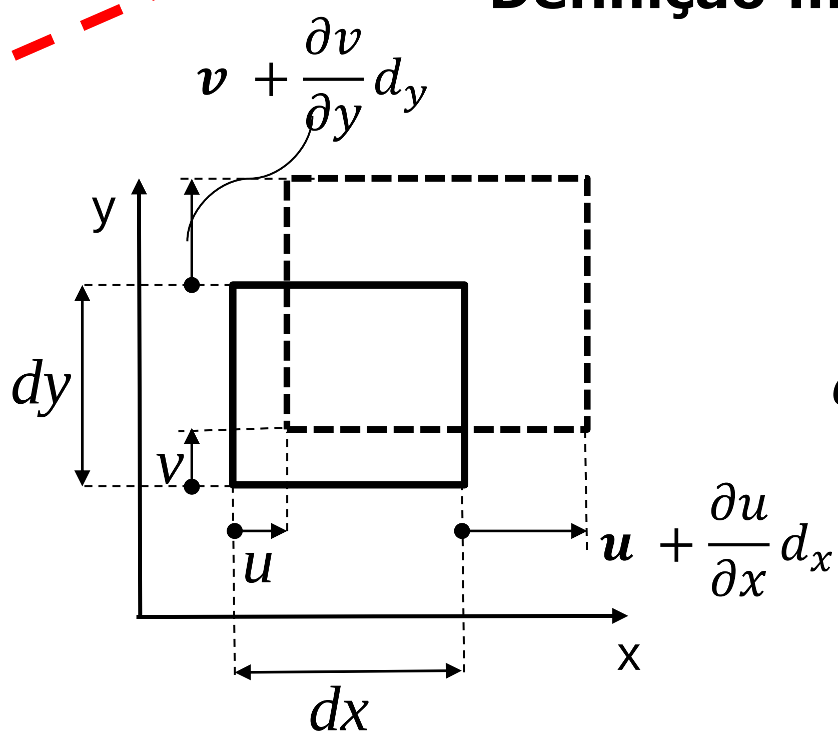
Círculo de Mohr para o estado geral de tensões

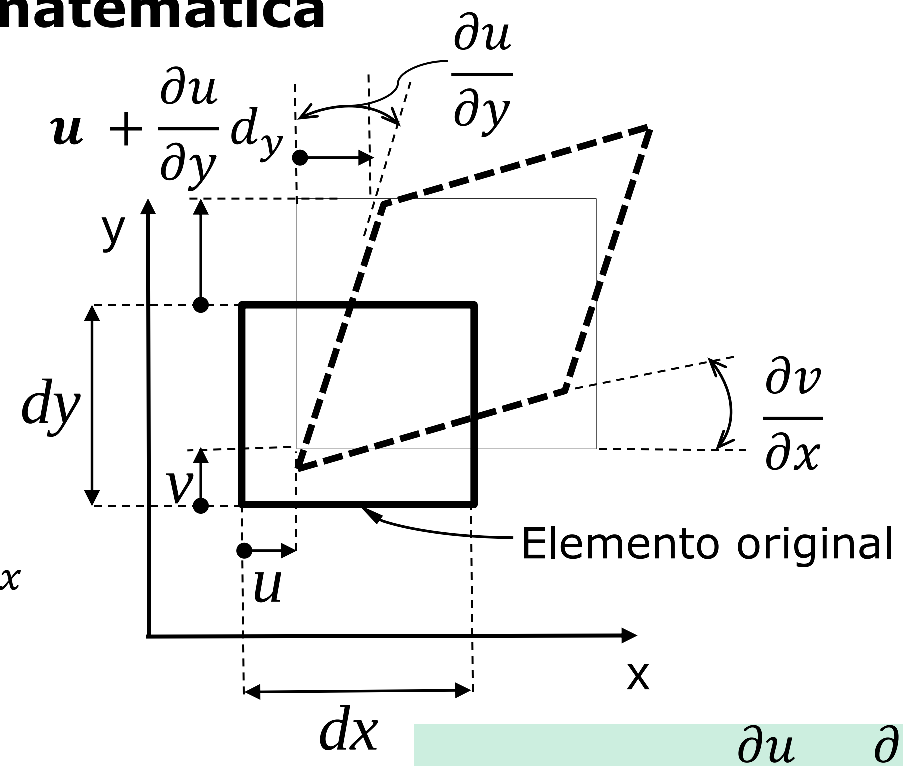


RELEMBRANDO!

Deformação

Definição matemática





$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

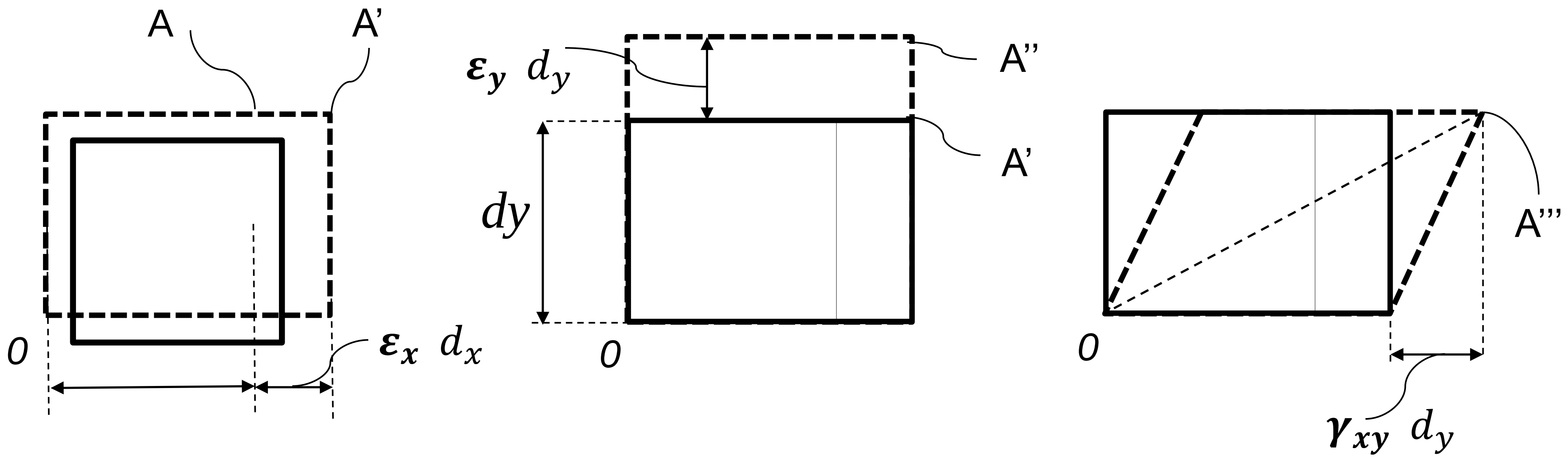
$$\gamma_{yz} = \gamma_{yx} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

RELEMBRANDO!

Equação para transformação de Deformação Plana

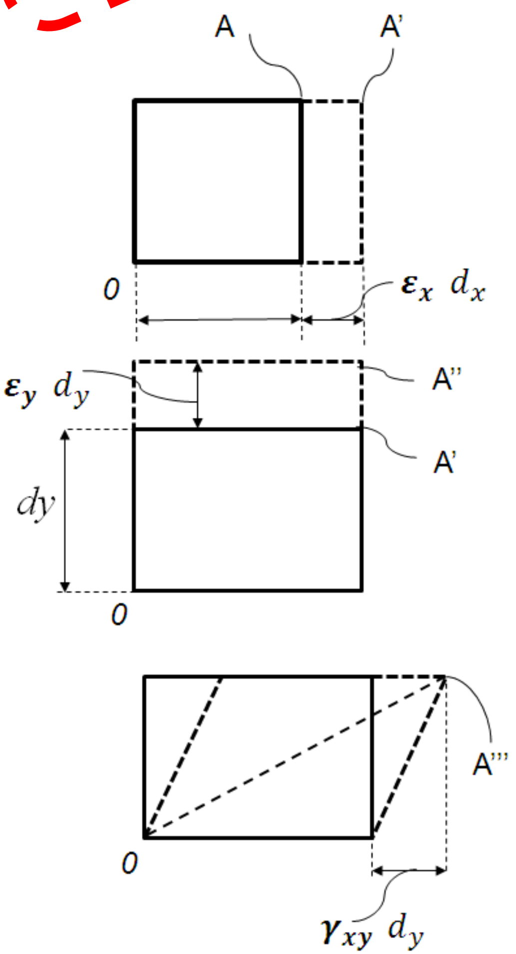
Definição

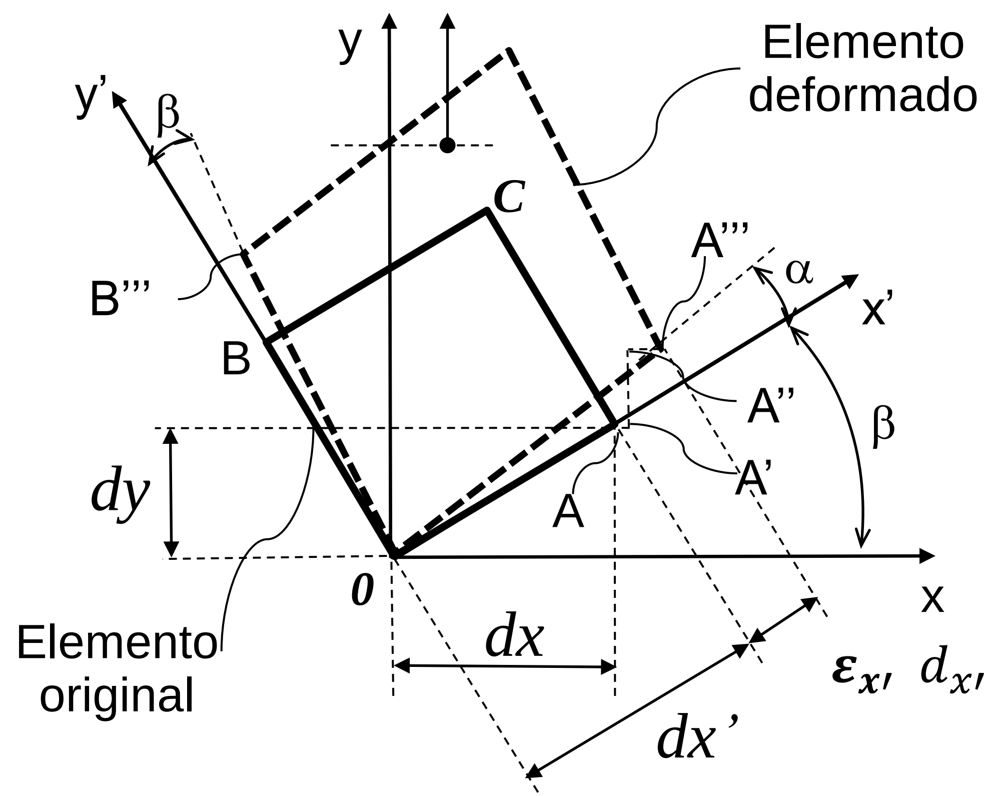


RELEMBRANDO!

Equação para transformação de Deformação Plana

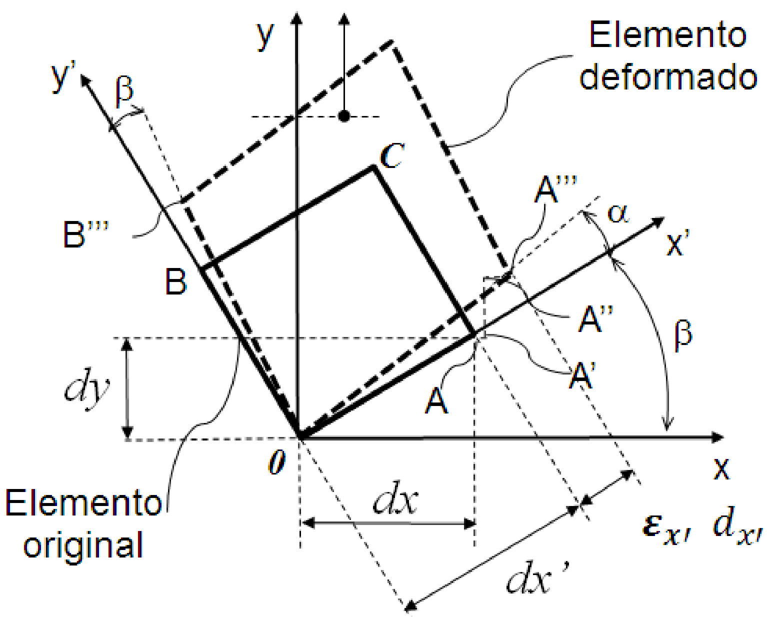
Definição





Equação para transformação de Deformação Plana

Definição



$$\boldsymbol{\varepsilon_{x'}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}.\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}.\sin 2\theta$$

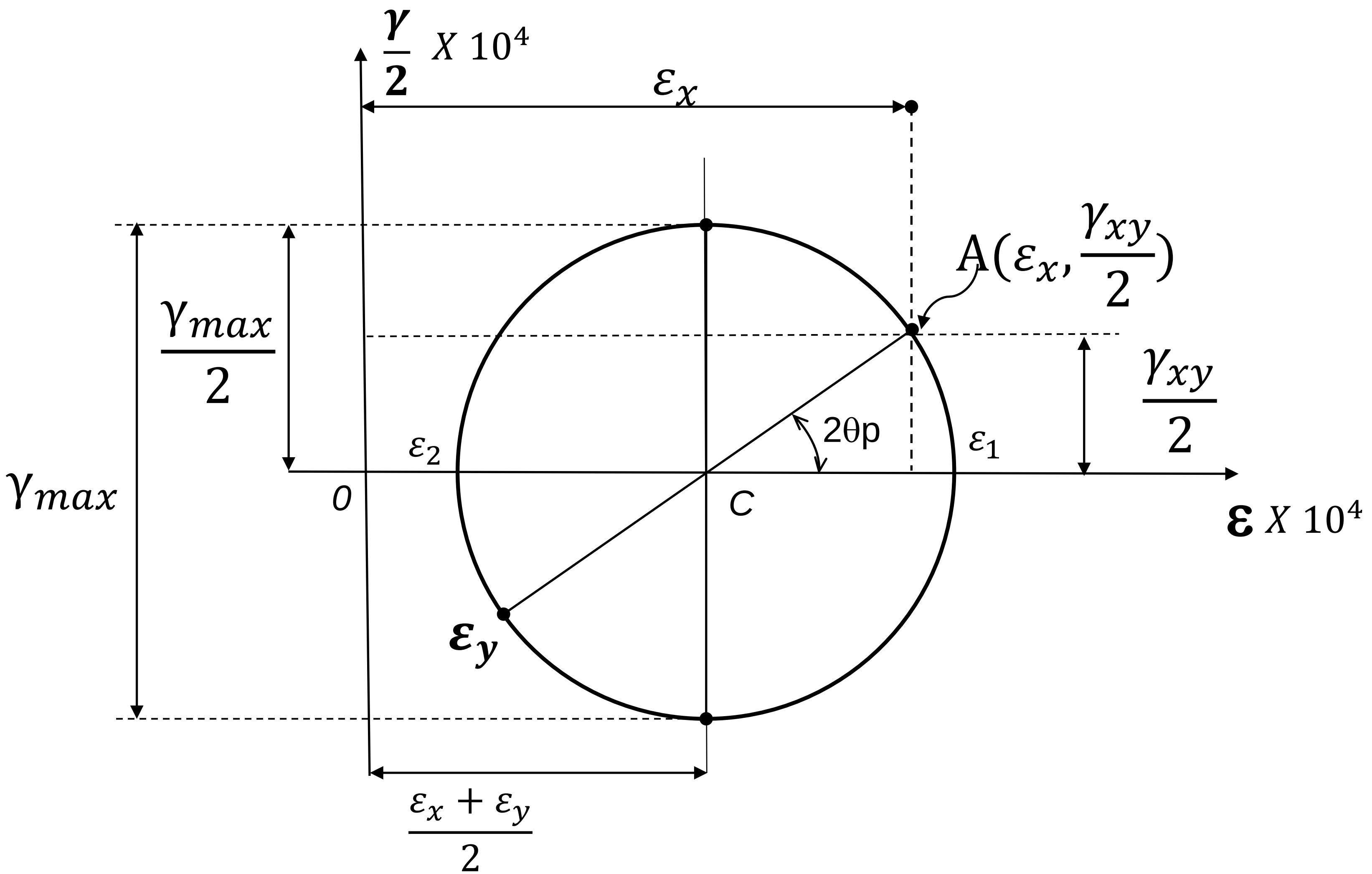
$$\frac{\boldsymbol{\gamma_{x'y'}}}{\mathbf{2}} = \frac{-(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon_{x'}})_{\frac{min}{max}} = \varepsilon_1 \text{ou } \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\gamma_{xy}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}}$$

$$\boldsymbol{\tan 2\theta} = \frac{\gamma_{xy}}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}$$

Círculo de Deformação Mohr

- .



Relações adicionais entre tensão e deformação

- Relação entre as tensões principais e deformações

$$\boldsymbol{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E}$$

$$\boldsymbol{\sigma_1} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\, \varepsilon_2)$$

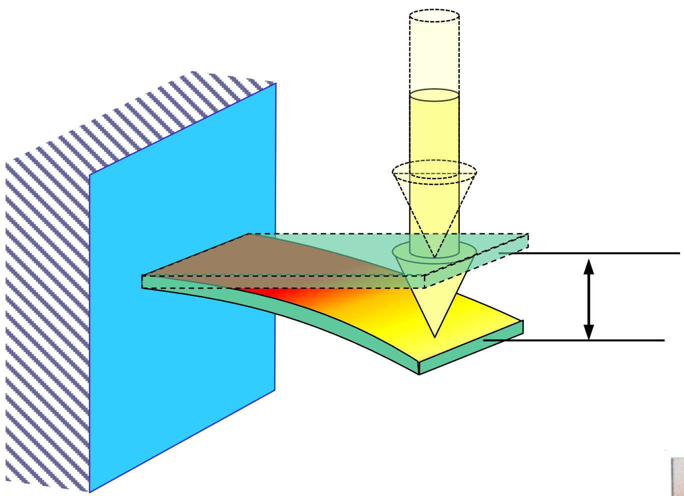
$$\boldsymbol{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E}$$

$$\boldsymbol{\sigma_2} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\, \varepsilon_1)$$

Medição de tensões e deformações

Extensometria

Em muitas situações de engenharia conhecer ou monitorar o nível de deformação, é de extrema importância, e pode ser realizado de diversas formas.

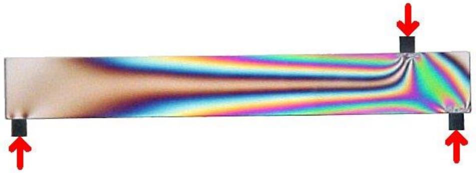


relógio comparador

detector eletrônico

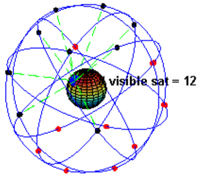
detector óptico-eletrônico

strain-gauge



fotoelasticidade

camada frágil



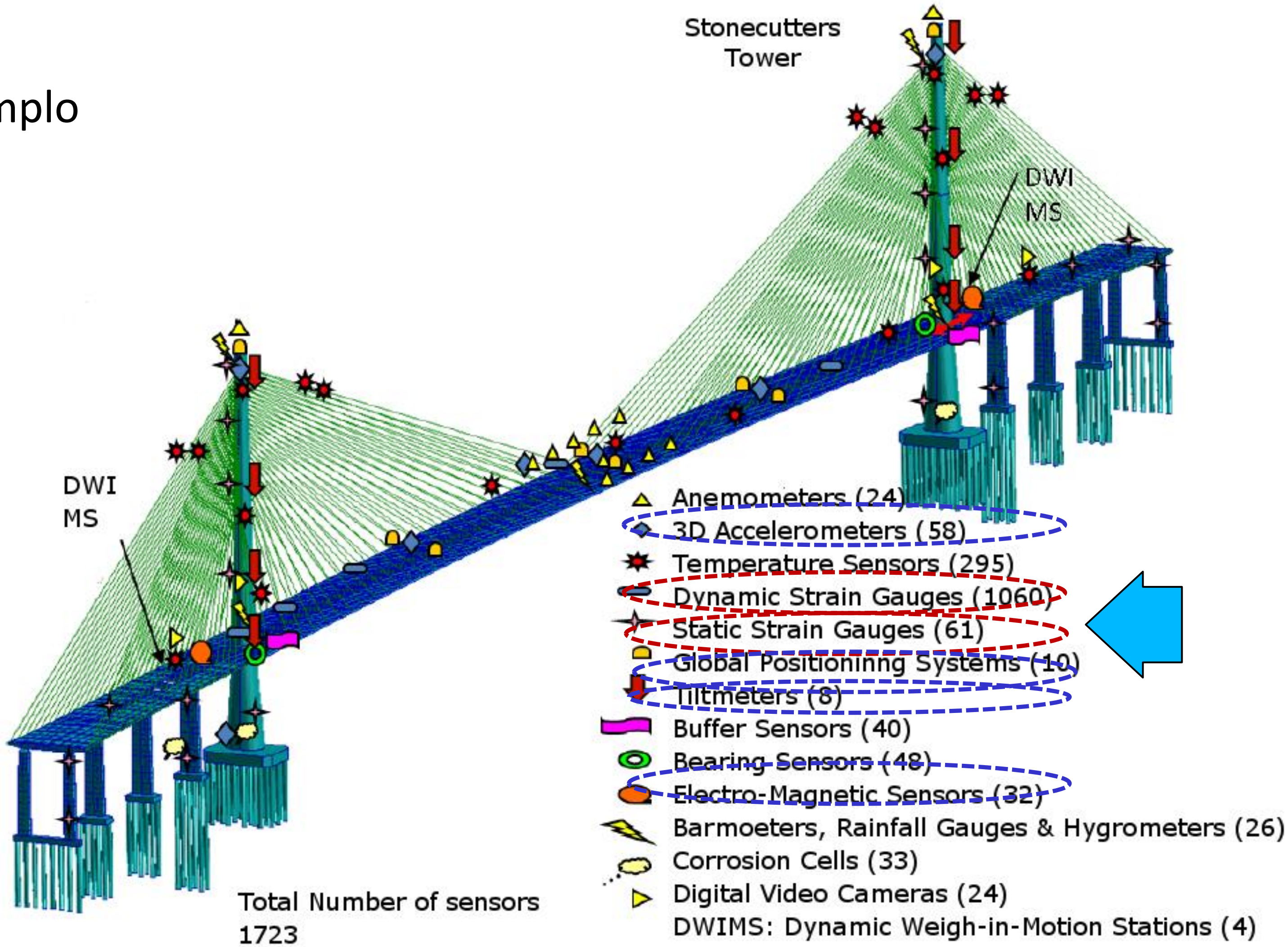
GPS

Tudo depende da amplitude e da precisão

Medição de tensões e deformações

Extensometria

Exemplo



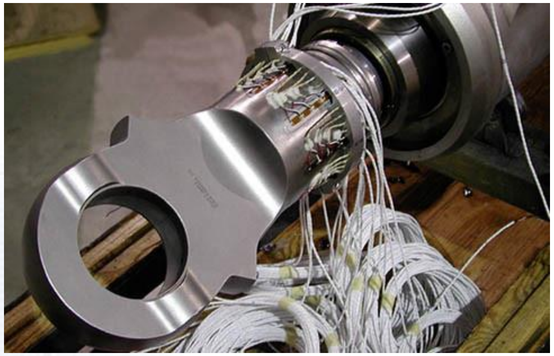
https://www.invicom.com/applications/continuous-stress-monitoring.html

Medição de tensões e deformações

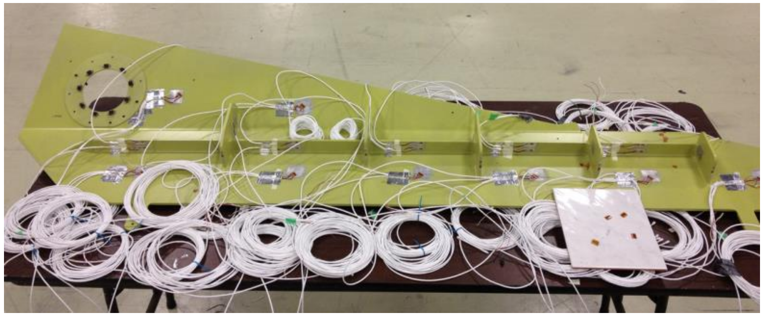
Extensometria

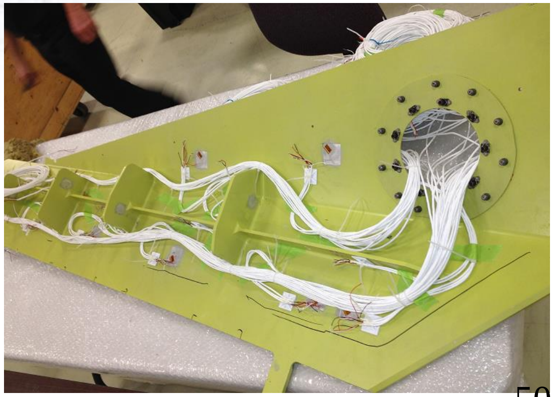
A extensometria é uma técnica utilizada para a análise experimental de tensões e deformações em estruturas dos mais diversos tipos.

https://www.hbm.com/en/6711/webinar-mechanical-aircraft-testing-mgcplus-new-features-june-27/



https://strainbond.com/applications





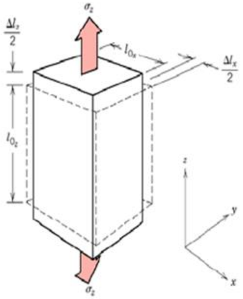
http://www.marshinst.com/instrumentation_services-14.html

Medição de tensões e deformações
Extensômetro

Extensometros são sensores cujo o princípio de funcionamento esta baseado na alteração da resistência elétrica de um corpo condutor geometricamente definido é proporcional ao comprimento e inversamente proporcional a área da seção transversal.

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

Onde: R = Resistência elétrica
L = comprimento
A = área da seção transversal
ρ =constante de resistividade do material



- O aumento da deformação aumenta do comprimento (L) e diminuição da seção transversal (A) – Lei de Hooke – levam a um aumento da resistência elétrica (R)
- Para a maioria dos materiais o aumento da deformação leva ao aumento da resistividade elétrica (ρ)
- A temperatura constante a resistência do corpo aumenta linearmente com a deformação

$$S\varepsilon_a = \frac{\delta R}{\mathrm{R}}$$

Onde: S = fator adimensional de extensometria (*strain gage factor*)

Usualmente S = 2 para extensômetros comerciais

Medição de tensões e deformações

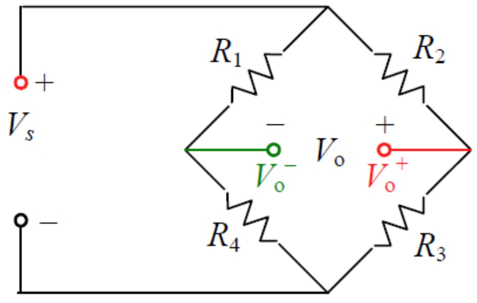
Extensômetro

A resistência elétrica típica de Extensômetros comerciais são 120 Ω ou 350 Ω, considerando que as deformações típicas em elementos de máquina na ordem de $10^{-6} < \varepsilon_a < 10^{-3}$, e o fato de extensometria de S = 2.

Temos: $$S\varepsilon_a = \frac{\delta R}{\mathrm{R}} \Rightarrow \delta R = R.S\varepsilon_a \Rightarrow 0{,}00024\Omega < \ \delta R\ 0{,}24\Omega$$

Então $\delta R/R$ é muito pequeno, o que é difícil de medir.

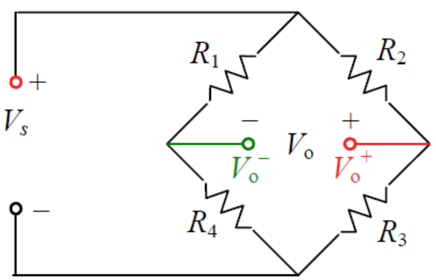
Ponte de Wheatstone



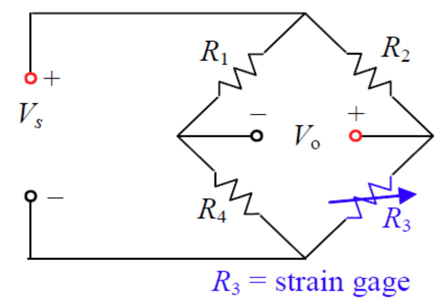
$$V_o = V_s \frac{R_3 R_1 - R_4 R_2}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)}.$$

Medição de tensões e deformações
Extensômetro

Ponte de Wheatstone



$$V_o = V_s \frac{R_3 R_1 - R_4 R_2}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)} .$$

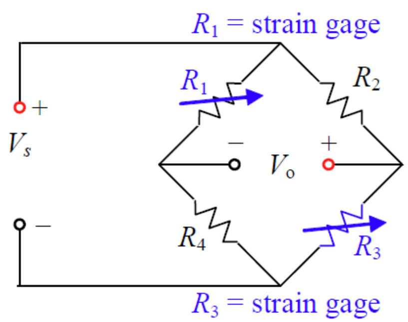


n = 1

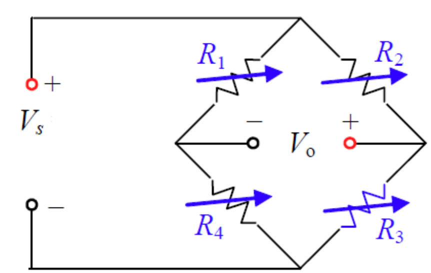
$$V_o \approx V_s \frac{\delta R_3 \cdot R_1}{(R_2 + R_{3,\text{initial}})(R_1 + R_4)} .$$

$$\varepsilon_a \approx \frac{V_o}{V_s} \frac{1}{S} \frac{(R_2 + R_{3,\text{initial}})^2}{R_2 R_{3,\text{initial}}}$$

$$\varepsilon_a \approx 4 \frac{V_o}{V_s} \frac{1}{S}$$



n = 2



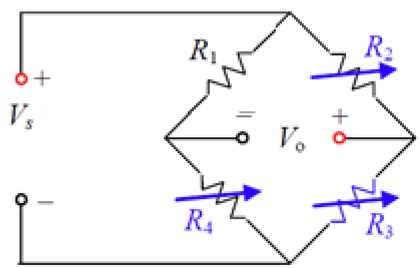
n = 4

$$\varepsilon_a \approx \frac{4}{n} \frac{(V_o - V_{o,\text{reference}})}{V_s} \frac{1}{S}$$

$$V_o \approx V_{o,\text{reference}} + \frac{n}{4} \varepsilon_a S V_s$$

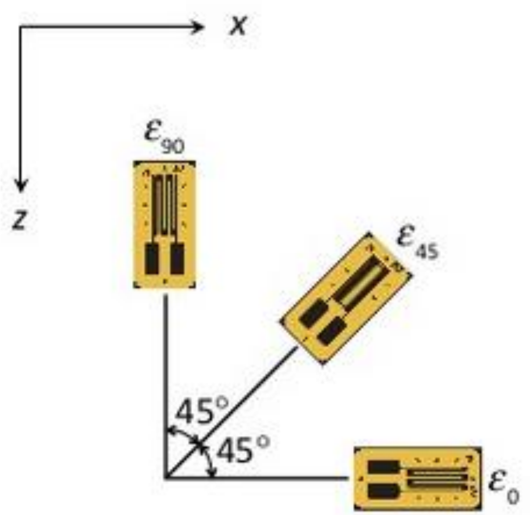
n = número de extensômetros ativos na ponte

Medição de tensões e deformações
Roseta de deformação



n = 3
Ou 1/3

45° ('Corner') Rosette



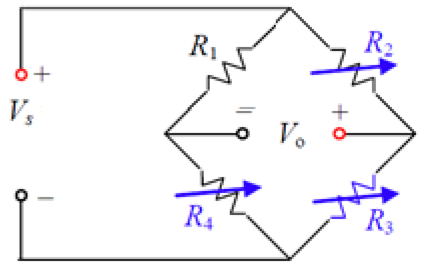
- A roseta de deformação parte do princípio que três pontos não colineares definem um, e somente um, circulo.
- Esta permite a definição dos pontos a partir das tensões normais em três direções.
- Assim o uso da roseta de deformação permite definir um único circulo de Mohr de deformação.
- Para este caso específico

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \varepsilon_{0°} \\
\varepsilon_y = \varepsilon_{90°} \\
\gamma_{xy} = \varepsilon_{0°} + \varepsilon_{90°} - 2.\varepsilon_{45°}
\end{cases}
$$

Medição de tensões e deformações
Roseta de deformação

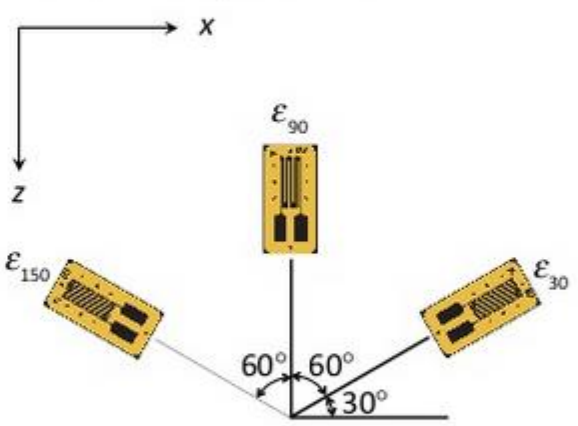
- Outra configuração para a roseta de deformação é a de 60° ou Delta
- Para este caso específico as equações de deformação ficam:

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{2}{3}\left(\varepsilon_{30^\circ} - \dfrac{\varepsilon_{90^\circ}}{2} + \varepsilon_{150^\circ}\right) \\
\varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ} \\
\gamma_{xy} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\varepsilon_{150^\circ} - \varepsilon_{30^\circ}\right)
\end{cases}
$$



n = 3
Ou 1/3

- **60° ('Delta') Rosette**



FIM DA AULA