1) a) para $n=1$ temos que $1! = 1$ que é ímpar.

hipótese de indução: supõe que

$1!+2!+\cdots+k!$ é um número ímpar,

ou seja, $1!+2!+\cdots+k! = 2\ell+1$, para algum $\ell \in \mathbb{N}$.

Agora $1!+2!+\cdots+k!+(k+1)! = 2\ell+1+(k+1)!$

no entanto, $(k+1)!$ é um número par, já que

$k \geq 1 \Rightarrow k+1 \geq 2$.

Logo $1!+2!+\cdots+k!+(k+1)!$ é um número ímpar,

já que é a soma de um número par com

um número ímpar.

Segue do P.I.F. que $1!\,2!+\cdots+n!$ é um

número ímpar, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Pelo binômio de Newton, temos que:

$$(x+1)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^k = \binom{4}{0} + \binom{4}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x^3 +$$

$$+ \binom{4}{4}x^4 = \cancel{1} + 4x + 6x^2 + \cancel{4x^3} + \cancel{x^4} =$$

$$= \cancel{x^4} + \cancel{4x^3} + x + \cancel{1}$$

Segue que $4x + 6x^2 = x$

$6x^2 + 3x = 0$

$3x(2x+1) = 0$

$x = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$

2) $f(x) = (x+3)\, e^{x^2-9} \ln|x^2+x-1|$

a) Como $|x^2+x-1| \geq 0$, temos que analisar quando $x^2+x-1=0$, o que ocorre quando $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Dessa forma, conclui-se que

$$\text{dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } x \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

b) $f(x) = 0$ quando $\underbrace{x + 3 = 0}_{(*)}$ ou $\underbrace{\ln|x^2 + x - 1| = 0}_{(**)}$

$(*)$ $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$(**)$ $\ln|x^2 + x - 1| = 0 \iff |x^2 + x - 1| = 1 \iff$

$\iff x^2 + x - 1 = 1$ ou $x^2 + x - 1 = -1$

$x^2 + x - 1 = 1 \iff x = -2$ ou $x = 1$

$x^2 + x - 1 = -1 \iff x = 0$ ou $x = -1$.

Sendo assim, $f(x) = 0$ para os seguintes valores de x: $-3, -2, -1, 0, 1$.

3)

a) VERDADEIRO

$$-\ln\left(\frac{1}{N}\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{-1}\right) = \ln(N)$$

b) FALSO

$$\frac{1}{2}\ln(a) = \ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(\sqrt{a}) \neq \sqrt{a}.$$

c) FALSO

$$6\ln(x) = \ln(x^6) \neq [\ln(x)]^6$$ em geral.

Essa igualdade só é válida quando $x=1$, pois nesse caso $\ln x = \ln 1 = 0$.

d) FALSO

$$\ln\left(\frac{ab^2}{c}\right) = \ln(ab^2) - \ln(c) = \ln(a) + \ln(b^2) - \ln c$$

$$= \ln(a) + 2\ln(b) - \ln c \neq \frac{\ln a + 2\ln b}{\ln c}$$

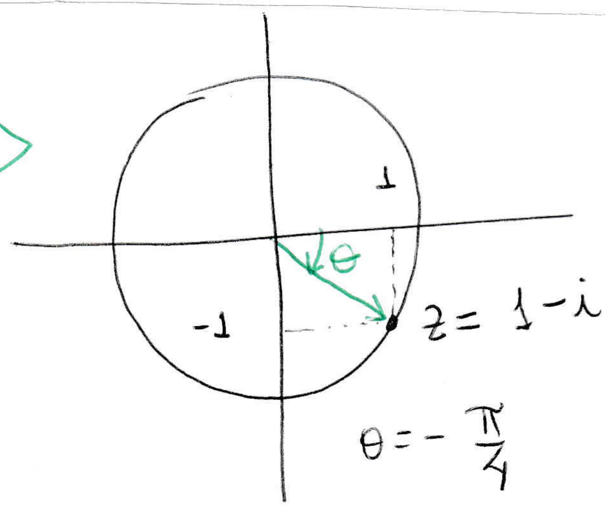
e) FALSO

$$\ln(x\cdot y)^3 = 3\ln(x\cdot y) = 3(\ln x + \ln y) \neq (\ln x + \ln y)^3$$, em geral.

Só vale quando $x = y = 1$.

4) $|1-i| = \sqrt{2}$

$\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$



$z^4 = 1 - i$ possui solução da forma:

$$z_k = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} \cdot (\cos \theta_k + i \sin \theta_k), \text{ onde}$$

$$\theta_k = \frac{-\pi/4 + 2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z_0 = 2^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\cos\left(+\frac{7\pi}{16}\right) + i \sin\left(+\frac{7\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\cos\left(\frac{15\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{15\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_3 = 2^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\cos\left(\frac{23\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right)$$

4b) Escrevendo z e w em suas formas polares

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$w = s(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi).$$

$$\overline{w} = s(\cos(-\varphi) + i\,\text{sen}(-\varphi)) = s(\cos\varphi - i\,\text{sen}\,\varphi)$$

$$z \cdot \overline{w} = rs(\cos(\theta-\varphi) + i\,\text{sen}(\theta-\varphi)).$$

$$Re(z\cdot\overline{w}) = rs\cos(\theta-\varphi)$$

$$Re(z\cdot\overline{w}) = |z|\cdot|w| \iff rs\cos(\theta-\varphi) = rs \iff$$

$$\cos(\theta-\varphi) = 1 \iff \theta-\varphi = 0 + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff \theta = \varphi + 2k\pi \iff \arg(z) = \arg(w)$$