AULA 1

MECÂNICA QUÂNITCA II

Na sua introdução em 1964 à Compilação dos Trabalhos Científicos de Pauli, os editores, Kroning e Weisskopf escrevem o seguinte:

"Pauli's work has one common denominator: his striving for symmetry and invariance. . . .
The tendency towards invariant formulations of physical laws, initiated by Einstein, has become the style of theoretical physics in our days, upheld and developed by Pauli during all his life by example, stimulation, and criticism. For Pauli, the invariants in physics where the symbols of ultimate truth which must be attained by penetrating through the accidental details of things."

$\boxed{\text{AULA 1}}$

I - Simetrias em Mecânica Quântica

1.0) Generalidades

1.1) Espaços de Raios: estados físicos são representados por raios no espaço de Hilbert. Um raio é um conjunto de vetores normalizados $\{|\alpha_i\rangle, \langle\alpha_i|\alpha_i\rangle = 1\}$ com $|\alpha_1\rangle$ e $|\alpha_2\rangle$ pertencendo a um mesmo raio $\mathcal{R}_\alpha$ se $|\alpha_2\rangle = \lambda|\alpha_1\rangle$
$\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

1.2) Simetrias e Descrições Equivalentes

Uma transformação de simetria $\mathcal{T}$ é uma mudança de ponto de vista que não muda o resultado de um experimento físico. Um observador F vê um sistema físico em um estado representado pelo raio $\mathcal{R}_\alpha, \mathcal{R}_\beta, \mathcal{R}_\gamma \dots$ então um observador equivalente F' que está observando o mesmo sistema o verá em um estado diferente, representado pelo raio $\mathcal{R}'_\alpha, \mathcal{R}'_\beta, \mathcal{R}'_\gamma \dots$, mas os dois observadores devem encontrar as mesmas probabilidades

$$\mathcal{P}(\mathcal{R}_\alpha \to \mathcal{R}_\beta) = \mathcal{P}(\mathcal{R}'_\alpha \to \mathcal{R}'_\beta)$$

$$|\langle\beta|\alpha\rangle| = |\langle\beta'|\alpha'\rangle| \qquad (1.0)$$

descrições equivalentes

A condição (1.9) deve ser imposta sobre qualquer par de descrições equivalentes, relacionadas por transformações de simetria (rotação, translação, reflexão etc.)

1.3) Teorema de Wigner (1930s)

Se $\mathcal{T}$ é uma transformação de simetria que relaciona um par específico de descrições equivalentes, para as quais corresponde o mapeamento de raios

$$\lambda_\alpha |\alpha\rangle \xrightarrow{\mathcal{T}} \lambda_{\alpha'} |\alpha'\rangle \quad \text{etc.}$$

$$\mathcal{R} \qquad\qquad \mathcal{R}'$$

as fases arbitrárias podem ser escolhidas de forma que por $\mathcal{T}$ ou

$$(\mathrm{I}): \quad c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle \Longrightarrow c_\alpha |\alpha'\rangle + c_\beta |\beta'\rangle$$

$$\langle\beta'|\alpha'\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle \qquad (1.1)$$

$\Rightarrow$ transformações unitárias familiares

$$(\mathrm{II}): \quad c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle \Longrightarrow c_\alpha^* |\alpha'\rangle + c_\beta^* |\beta'\rangle$$

$$\langle\beta'|\alpha'\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* \qquad (1.2)$$

$\Rightarrow$ transformações antiunitárias (não existiria se o espaço dos estados fosse um espaço de Hilbert).

Obs: o caso II não pode ser usado para $\mathcal{T}$ membro de um grupo contínuo. $\mathcal{T}$ aplicado duas vezes resulta em uma transf. unitária

CPLEAR experimento do CERN que mostrou violação de T na interação fraca

Principles of the CPLEAR Experiment

Measurement of time dependent decay rate asymmetries:

$$A_f(\tau) = \frac{R_{\overline{K}^0 \to \overline{f}}(\tau) - R_{K^0 \to f}(\tau)}{R_{\overline{K}^0 \to \overline{f}}(\tau) + R_{K^0 \to f}(\tau)}$$

acceptances cancel

Production and Tagging:

$$p\bar{p} \text{ (at rest)} \to \begin{array}{ll} & \mathbf{BR} \\ K^-\pi^+K^0 & 2 \times 10^{-3} \\ K^+\pi^-\overline{K}^0 & 2 \times 10^{-3} \end{array}$$

The *Strangeness* of the neutral kaon K^0 ($\overline{K}^0$) at time $\tau = 0$ is defined by the charged kaon K^- (K^+).

Tagging at decay time:

$$K^0 \to e^+\nu\pi^- \qquad \overline{K}^0 \to e^-\overline{\nu}\pi^+$$

The *Strangeness* of the neutral kaon K^0 ($\overline{K}^0$) at the decay time is defined by the charge of the lepton ($\Delta S = \Delta Q$).

Measurement of $\mathcal{T}$ violation

$$\mathrm{A_T} = \frac{R\left(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \mathrm{K}^0\right) - R\left(\mathrm{K}^0 \to \overline{\mathrm{K}}^0\right)}{R\left(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \mathrm{K}^0\right) + R\left(\mathrm{K}^0 \to \overline{\mathrm{K}}^0\right)} = 4\Re e\, \varepsilon_\mathrm{T}$$

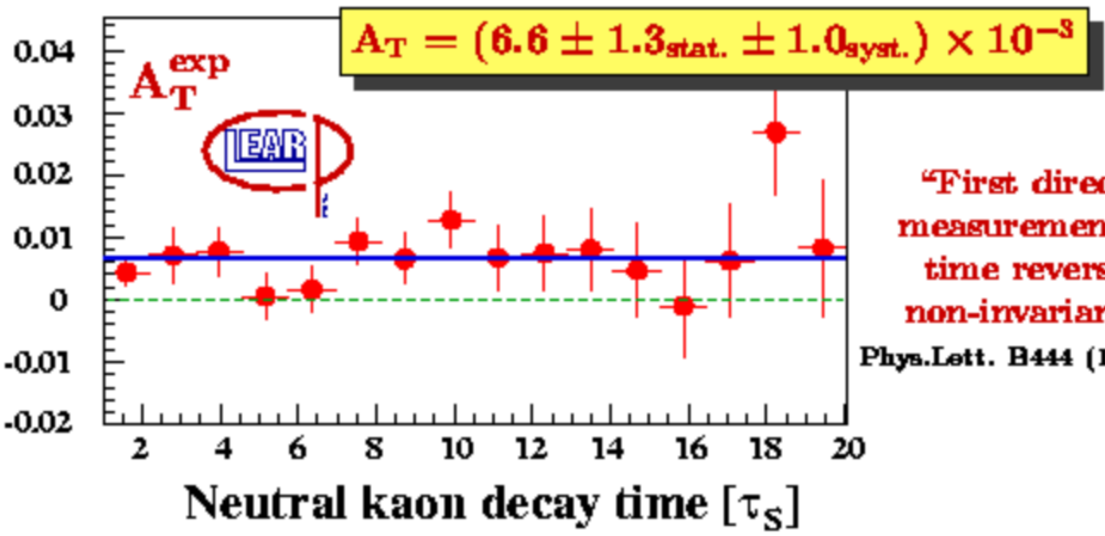
Example $\tau = 6.5\tau_S$

CPLEAR measures: $\mathrm{N}(\mathrm{K}^0{}_{\tau=0} \to e^-\pi^+\overline{\nu})[\tau] = 15050$; $\mathrm{N}(\overline{\mathrm{K}}^0{}_{\tau=0} \to e^+\pi^-\nu)[\tau] = 13559$ — $\mathrm{A} = 0.0521$

first correction: different reconstruction efficiency for $e^+\pi^-$ and $e^-\pi^+$. Obtained from unbiased pure electron and pion samples: $\langle\eta\rangle = 1.014 \pm 0.002$ — $\mathrm{A} = 0.0610$

second correction: different reconstruction efficiency for $\mathrm{K}^+\pi^-$ and $\mathrm{K}^-\pi^+$. Obtained from $\pi\pi$ decays: $\langle\alpha\rangle = 1.12756 \pm 0.00034$ (ratio of $\mathrm{K}^+\pi^-/\mathrm{K}^-\pi^+$ efficiencies) $\times\, [1 + 4\Re e\,(\varepsilon_\mathrm{T} + \delta)]$ — $\mathrm{A} = 0.0098$

third correction: assume CPT conservation in semileptonic decay amplitudes, use $\delta_l = 2\Re e\,(\varepsilon_\mathrm{T} + \delta) = (0.327 \pm 0.012)\%$ — $\mathrm{A} = 0.0066$



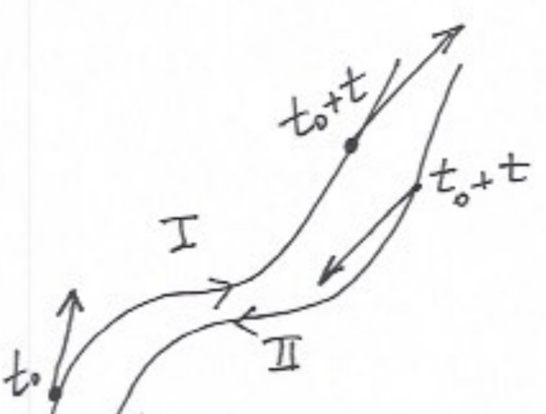
"First direct" measurement of time reversal non-invariance!

Phys.Lett. B444 (1998) 43

[Para uma prova do teorema veja S. Weinberg, the Quantum Theory of Fields, vol. I, pg 91 - cap 2, apêndice A.]

2.0) Reversão Temporal

Considere uma partícula obedecendo as leis da mecânica clássica e sujeita a forças estáticas. Seja $\vec{r}(t_0)$ e $\vec{v}(t_0)$ sua posição e velocidade em $t=t_0$. A partícula se move sem ser perturbada por um tempo t onde $\vec{r}(t_0+t)$ e $\vec{v}(t_0+t)$ são suas novas posição e velocidade. Nesse momento, uma partícula idêntica com condições iniciais $\vec{r}(t_0+t)$ e $-\vec{v}(t_0+t)$ começa seu movimento ~~A~~ Após um intervalo de tempo t a segunda partícula ~~tiver~~ posição $\vec{r}(t_0)$ e velocidade $-\vec{v}(t_0)$ dizemos que as leis que governam o movimento da partícula são invariantes por reversão temporal.



$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0+2t)$$
$$\vec{v}(t_0) = -(\vec{v}(t_0+2t))$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_I(t), P_I(t)) \\ (q_{II}(t), P_{II}(t))\end{array}\right\}$$ variáveis canônicas

$$t_0 \Rightarrow -t$$

$$\left.\begin{array}{ll} q_I(-t) = q_{II}(t) & (2.0a) \\ p_I(-t) = -p_{II}(t) & (2.0b)\end{array}\right\}$$

Se o sistema for invariante por reversão temporal!

2.1) Operador de Reversão Temporal (I_t)

Seja $|\alpha\rangle$ um estado qualquer e $|\alpha^R\rangle$ o estado com movimento revertido temporalmente, ambos em $t = 0$.

ex: N partículas de spin 0 com momento bem definido

$$|\alpha\rangle = |\vec{p}_1', \ldots, \vec{p}_N'\rangle \qquad |\alpha^R\rangle = |-\vec{p}_1', \ldots, -\vec{p}_N'\rangle$$

$$I_t|\alpha\rangle = |\alpha^R\rangle \quad (2.1)$$

define o chamado operador de reversão temporal

$I_t^2|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ devem pertencer ao mesmo raio $\mathcal{R}$.

$\Rightarrow$ teorema de Wigner diz que I_t é unitário ou antiunitário

Se $\vec{p}_i$ é um operador de momento, então:

$$\vec{p}_i\,|\alpha^R\rangle = -\vec{p}_i'\,|\alpha^R\rangle$$

$$I_t\ \vec{p}_i\,|\alpha^R\rangle = I_t\,\vec{p}_i\,I_t^{-1}I_t\,|\alpha^R\rangle = -\vec{p}_i'\,I_t\,|\alpha^R\rangle = -\vec{p}_i\,I_t|\alpha^R\rangle$$

$$\therefore\ I_t\,\vec{p}_i\,I_t^{-1} = -\vec{p}_i^{\,*} \quad (2.2)$$

Até aqui esse raciocínio pode se aplicar à reversão espacial (paridade). Mas o ponto fundamental aqui é que a medida que o sistema evolui, qualquer estado $|\alpha\rangle$ e o ~~seu~~ contra partida revertido temporalmente $|\alpha^R\rangle = I_t|\alpha\rangle$ devem satisfazer a correspondência análoga à definida (*)

por (2.0)

$$I_t\left(e^{iHt/\hbar}|\alpha\rangle\right) = e^{-iHt/\hbar}\left(I_t|\alpha\rangle\right) \qquad (2.3)$$

logo como $|\alpha\rangle$ é qualquer estado, então

$$I_t\, e^{iHt/\hbar}\, I_t^{-1} = e^{-iHt/\hbar} \qquad (2.4)$$

Se A for um operador ~~antiunitário~~ unitário e B um operador Hermitiano

$A\, e^{-iB} A^{-1} = e^{\mp i(ABA^{-1})}$, logo

$I_t H I_t^{-1} = -H$ I_t unitário $I_t H + H I_t = 0$

$I_t H I_t^{-1} = H$ I_t antiunitário $I_t H - H I_t = 0$

mas para partículas livres H é quadrático no momento e comuta com I_t $\Longrightarrow$ o operador de reversão temporal deve ser antiunitário

Para saber o que acontece com spins sob reversão temporal impomos que a reversão temporal não deva ter efeito sobre transformações geométricas. Isto é

$$I_t\, e^{i\vec{a}\cdot\vec{p}}\, I_t^{-1} = e^{i\vec{a}\cdot\vec{p}}$$

esta condição é cumprida por translação espacial (I_t muda i e $\vec{p}$). O mesmo raciocínio aplicado ao operador de rotação mostra que

$$I_t\, \vec{J}\, I_t^{-1} = -\vec{J} \quad (2.5)$$

Veja que a invariância por reversão temporal, em geral, restringe os tipos de termos que podemos ter no Hamiltoniano do sistema i.e. $\vec{x}\cdot\vec{\sigma}$ não pode existir!

Seja $\{|n\rangle\}$ uma base ortonormal fixa e $\{|n^R\rangle\}$ a correspondente base revertida temporalmente. Essas duas bases são relacionadas pela transformação unitária

$$U = \sum_n |n^R\rangle\langle n| \quad (2.6)$$

Seja $|\psi\rangle$ um estado arbitrário

$$I_t|\psi\rangle \equiv |\psi^R\rangle = I_t\left(\sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle\right)$$

$$= \sum_n |n^R\rangle\langle n|\psi\rangle^* = \sum_m\sum_n |n^R\rangle\langle n|m\rangle\langle m|\psi\rangle^*$$

$$= \sum_m U|m\rangle\langle m|\psi\rangle^* \quad (2.7)$$

se $|\Phi\rangle$ for um outro estado arbitrário

$$\langle\psi|\Phi\rangle = \langle\phi^R|\psi^R\rangle = \sum_n \langle n|\phi\rangle\langle n|U^+\sum_m U|m\rangle\langle m|\psi\rangle^*$$

$$= \sum_{n,m}\langle n|\Phi\rangle\,\delta_{mn}\,\langle m|\psi\rangle^* = \sum_n \langle\psi|n\rangle\langle n|\Phi\rangle \quad \text{como esperado!}$$

(2.7) implica também que

$$\underline{I_t = U K} \quad (2.8a)$$

$$I_t^{-1} = K U^{+} \quad (2.8b)$$

onde $Kc = c^{*}K \quad , c \in \mathbb{C}$

K é o operador que toma o complexo conjugado de todos os coeficientes na base que U atua. O operador U é claramente dependente de base.

O elemento de matriz entre estados revertidos temporalmente são frequentemente necessários na teoria de espalhamento, por exemplo, quando a invariância por reversão temporal impõe vínculos nessas amplitudes, relacionando o processo $i \to f$ com o processo $f \to i$.

Seja A qualquer operador e $|\psi\rangle$ qualquer estado.

$$I_t A|\psi\rangle = I_t A I_t^{-1} I_t |\psi\rangle = I_t \left(A I_t^{-1} |\psi^R\rangle\right)$$

$$= \sum_n |n^R\rangle \langle n| A I_t^{-1} |\psi^R\rangle^{*} = \sum_n |n^R\rangle \langle\psi| A^{+} |n\rangle$$

seja $|\phi\rangle$ qualquer outro estado

$$\langle\phi^R| I_t A I_t^{-1} |\psi^R\rangle = \sum_n \langle\phi^R|n^R\rangle\langle\psi|A^{+}|n\rangle$$

$$= \sum_n \langle n|\phi\rangle\langle\psi|A^{+}|n\rangle = \langle\psi|A^{+}|\phi\rangle$$

$$\therefore \langle\phi^R| I_t A I_t^{-1} |\psi^R\rangle = \langle\psi|A^{+}|\phi\rangle \quad (2.9)$$

logo se A for Hermitiano e invariante sob reflexão temporal então:

$$\langle \phi^R | I_t A I_t^{-1} | \psi^R \rangle = \langle \phi^R | A | \psi^R \rangle = \langle \psi | A | \phi \rangle \quad (2.10)$$

vemos que a reversão temporal de fato relaciona os processos $i \to f$ com $f \to i$; $|\phi\rangle \equiv i \quad |\psi\rangle \equiv f$.

2.2) Spin $\emptyset$

A forma do operador de reversão temporal depende do spin do sistema. Spin zero é o caso mais simples.

Considere um sistema descrito pelo Hamiltoniano H

$I_t H I_t^{-1} = H$ (inv. por reversão temporal)

$$\psi(\vec{r},t) = \langle \vec{r} | e^{-iHt/\hbar} | \psi \rangle$$

$$\psi^R(\vec{r},t) = \langle \vec{r} | e^{-iHt/\hbar} | \psi^R \rangle$$

(não muda por reversão temporal! $|\vec{r}\rangle \equiv |\vec{r}^R\rangle$)

mas

$$\psi^R(\vec{r},t) \overset{(2.9)}{=} \langle \psi | I_t e^{iHt/\hbar} I_t^{-1} | \vec{r} \rangle = \langle \psi | e^{-iHt/\hbar} | \vec{r} \rangle$$

$$\therefore \psi^R(\vec{r},t) = \psi^*(\vec{r},-t) \quad (2.11)$$

na representação das coordenadas

Na representação dos momentos

$$I_t | \vec{p} \rangle = | -\vec{p} \rangle$$

$$\chi(\vec{p},t) = \langle \vec{p} | e^{-iHt/\hbar} | \psi \rangle$$

$$\chi^R(\vec{p},t) = \langle \vec{p}\,|\, e^{-iHt/\hbar}\,|\psi^R\rangle$$
$$\overset{(2.9)}{=} \langle\psi|\, I_t\, e^{iHt/\hbar}\, I_t^{-1}\,|-\vec{p}\rangle$$
$$= \langle\psi|\, e^{-iHt/\hbar}\,|-\vec{p}\rangle = \chi^*(-\vec{p},-t) \quad (2.12)$$

na representação dos momentos

ex: se as funções de onda são $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ depende da convenção de fase!

$$I_t : Y_{\ell m}(\theta,\phi) \longrightarrow Y_{\ell m}^*(\theta,\phi) = (-1)^m\, Y_{\ell\, -m}(\theta,\phi)$$

$m \longrightarrow -m$: $\vec{L} \longrightarrow -\vec{L}$ por reversão temporal $\Rightarrow \hat{n}\cdot\vec{L}$ deve reverter ao longo de qualquer direção!

Conseqüência : Se a função de onda Ψ_E for um estado estacionário de H : $H\Psi_E = E\Psi_E$ e $I_t H I_t^{-1} = H$

$$\Longrightarrow I_t(H\, I_t^{-1} I_t \Psi_E) = H I_t \Psi_E = H\Psi_E^* = E I_t \Psi_E = E\Psi_E^*$$

Ψ_E^* é também estado estacionário com energia E. Existem duas possibilidades : o nível é degenerado e Ψ_E^* não pertence ao mesmo raio de Ψ_E (ex. caso $Y_{\ell m}$ p/ $\ell \neq 0$); ou não há degenerescência e $\Psi_E^* \propto \Psi_E \Longrightarrow$ a função de onda de um estado estacionário não degenerado de uma partícula de spin 0 é real a menos de uma fase global!

2.3) Spin 1/2

Consideremos agora uma partícula de Spin 1/2

$$I_t \vec{\sigma} I_t^{-1} = U K \vec{\sigma} K U^+ = U \vec{\sigma}^* U^+ \underset{\uparrow (2.5)}{=} -\vec{\sigma}$$

σ_x e σ_z são reais, σ_y é imaginário puro na representação padrão, logo:

$$U \sigma_x U^+ = -\sigma_x \qquad U \sigma_y U^+ = \sigma_y \qquad U \sigma_z U^+ = -\sigma_z$$

que é satisfeito por Verifique!

$$U = e^{i\delta} \sigma_y \quad (2.13)$$

rotação de um ângulo π em torno do eixo y.

$$I_t \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle = i e^{i\delta} \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle \qquad I_t \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle = -i e^{i\delta} \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle \quad \text{Verifique!}$$

Sejam $|\vec{p}\, m_s\rangle$ e $|\vec{r}\, m_s\rangle$ $m_s = \pm 1/2$ os auto-kets nas representações de momento e coordenadas

$$I_t |\vec{p}\, m_s\rangle = e^{i\delta}\, i^{2m_s} |-\vec{p}\, -m_s\rangle \quad (2.14\,a)$$

$$I_t |\vec{r}\, m_s\rangle = e^{i\delta}\, i^{2m_s} |\vec{r}\, -m_s\rangle \quad (2.14\,b)$$

$$I_t = e^{i\delta} \sigma_y K \quad (2.15) \text{ rep. das coord.}$$

Sabemos que

$$I_t^2 = c \quad \text{onde} \quad |c| = 1$$

$$[I_t^2, I_t] = I_t^2 I_t - I_t I_t^2 = 0$$

$$c I_t - I_t c = (c - c^*) I_t = 0 \qquad c = c^* = \pm 1$$

No caso de spin $\emptyset$, onde $I_t = K$ claramente $I_t^2 = 1$

No caso de spin 1/2

$$I_t^2 = e^{i\delta}\sigma_y K \; e^{i\delta}\sigma_y K = e^{i\delta}\sigma_y \, e^{-i\delta}\sigma_y^* K^2 = -\sigma_y^2 = -1$$

Pode ser mostrado que I_t^2 não depende de representação (lista)

$$I_t^2 = +1 \quad \text{para partículas de spin } \emptyset$$
$$I_t^2 = -1 \quad \text{para partículas de spin } 1/2$$

Para um sistema de N partículas, se tiverem spin $\emptyset$, então $I_t^2 = 1$, $\forall N$. Mas se o sistema for de partículas de spin 1/2 $I_t^2 = (-1)^N$

<u>Conseqüência</u>: Sejam $\{|EN\rangle\}$ estados estacionários de um sistema de N partículas de spin 1/2, que não preciam ser idênticas e assume que $I_t H I_t^{-1} = H \Longrightarrow I_t |EN\rangle$ deve ser também auto-estado com energia E. Se $I_t |EN\rangle$ for não-degenerado $I_t |EN\rangle = \lambda |EN\rangle$

$$I_t^2 |EN\rangle = \lambda^* \lambda |EN\rangle = (-1)^N |EN\rangle$$

o que é falso para N ímpar.

<u>Teorema de Kramer</u>: se um sistema composto de um número ímpar de partículas de spin 1/2 tiver uma Hamiltoniana invariante por reversão temporal então todos os estados estacionários são degenerados!