1^0 **Lista de Exercício de MAT0147 (2^0 semestre 2020)**

Turma: turma 2020221 (noturno)

1 Parte 1:

1.1 Espaços Euclidianos, retas, planos e produtos internos

Problema 1.1. Escreva o vetor $(7, -1)$ como soma de dois vetores, um paralelo ao vetor $(1, -1)$ e outro paralelo ao vetor $(1, 1)$.

Problema 1.2. Sejam $u = (2, 4)$ e $v = (-3, 5)$. Determine:

(a) o produto escalar de u e v

(b) o ângulo entre u e v

Problema 1.3. Determine se cada um dos conjuntos abaixo de vetores determina ou não uma base de $\mathbb{R}^3$

(a) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$

(b) $\{(1, 2, 3), (1, 3, 5), (1, 0, 1), (2, 3, 0)\}$

(c) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$

(d) $\{(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)\}$

Problema 1.4. Determine a projeção ortogonal de $v = (1, -2, 3, -4)$ no subespaço gerado por $w = (1, 2, 1, 2)$.

Problema 1.5. Determine a equação cartesiana da reta no $\mathbb{R}^2$ passando pelos pontos a e b.

(a) $a = (1, 1)$ e $b = (2, 4)$

(b) $a = (2, 1)$ e $b = (4, 5)$

(c) $a = (3, 2)$ e $b = (5, 1)$

(d) $a = (2, 3)$ e $b = (7, 4)$

Problema 1.6. Sejam x, y o número de unidades das mercadorias A e B consumidas por uma pessoa. Sejam $\$\,2,00$ e $\$\,3,00$ os preços unitários de A e B respectivamente. Descreva em coordenadas euclidianas o espaço dos números de unidades das mercadorias, quando a despesas para mercadorias é $\$\,10,00$ e esboce tal conjunto.

Problema 1.7. Determine a equação cartesiana do plano em $\mathbb{R}^3$ contendo os pontos a, b e c.

(a) $a = (1, 2, 3)$, $b = (1, 3, 1)$ e $c = (2, 6, 4)$,

(b) $a = (0, 1, 5)$, $b = (2, 2, 3)$ e $c = (3, 3, 4)$,

(c) $a = (1, 1, 4)$, $b = (2, 1, 2)$ e $c = (3, 4, 2)$,

(d) $a = (1, 0, 3)$, $b = (3, 1, 1)$ e $c = (4, 2, 2)$.

Problema 1.8. Sejam x, y, z o número de unidades das mercadorias A, B e C consumidas por uma pessoa. Sejam $\$\,2,00$, $\$\,3,00$ e $\$4,00$ os preços unitários de A, B e C respectivamente. Descreva em coordenadas euclidianas o espaço dos números de unidades das mercadorias, quando a despesas para mercadorias é $\$\,100,00$ e esboce tal conjunto.

Problema 1.9. Escreva uma equação do plano definido pelos pontos:

(a) $A = (2, -1, 3)$, $B = (0, 2, 1)$ e $C = (1, 3, 2)$

(b) $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (1, 0, 0)$

(c) $A = (0, 0, 2)$, $B = (1, 2, 2)$ e $C = (1, 0, 2)$

Problema 1.10. Determine a distância do ponto $(2, 1, 3)$ a cada um dos planos:

(a) $x - 2y + z = 1$

(b) $x + y - z = 0$

(c) $x - 5z = 8$

Problema 1.11. Considere $a = (1, 2, 3)$, $b = (1, 3, 1)$ e $c = (2, 6, 4)$.

(a) Determine a equação cartesiana do plano contendo os pontos a, b, c.

(b) Distância do ponto $p = (1, 1, 1)$ ao plano contendo os pontos a, b e c.

Problema 1.12. Considere $a = (0, 1, 5)$, $b = (2, 2, 3)$ e $c = (3, 3, 4)$.

((a) Determine a equação cartesiana do plano contendo os pontos a, b, c.

(b) Distância do ponto $p = (1, 2, 1)$ ao plano contendo os pontos a, b e c.

Problema 1.13. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma **aplicação linear**, i.e., $T(x) = Ax$. Determine a matriz A sabendo que $T((1, 0)) = (2, 3, 4)$ e $T((0, 1)) = (4, 6, 8)$

Problema 1.14. Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_3 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4)$$

Determine a matrix A tal que $F(x) = Ax$.

Problema 1.15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear $T(x) = Ax$ onde A é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule um vetor normal ao plano que é a imagem de T, i.e., o espaço coluna de A (sub espaço gerado pelas colunas de A).

(b) Calcule a área do paralelogramo contido na imagem de T que tenha como arestas as colunas da matriz A.

(c) Dado $p = (2, 2, 0)$ determine a projeção ortogonal de p no plano que é a imagem de T.

Problema 1.16. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear $T(x) = Ax$ onde A é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule um vetor normal ao plano que é a imagem de T, i.e., o espaço coluna de A (sub espaço gerado pelas colunas de A).

(b) Calcule a área do paralelogramo contido na imagem de T que tenha como arestas as colunas da matriz A.

(c) Dado $p = (4, 1, 3)$ determine a projeção ortogonal de p no plano que é a imagem de T.

Problema 1.17. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear $T(x) = Ax$ onde A é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule um vetor normal ao plano que é a imagem de T, i.e., o espaço coluna de A (sub espaço gerado pelas colunas de A).

(b) Calcule a área do paralelogramo contido na imagem de T que tenha como arestas as colunas da matriz A.

(c) Dado $p = (1, 2, -1)$ determine a projeção ortogonal de p no plano que é a imagem de T.

1.2 Respostas da Parte 1

Problema: 1.1: $(7, -1) = (4, -4) + (3, 3)$

Problema 1.2:

(a) 14

(b) $\arccos(\frac{7\sqrt{170}}{170})$

Problema 1.3: (a), (b) não , pois $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. (c) Sim, pois colocando os vetores como colunas de uma matriz A três por três, podemos observar que A é não singular. (d) Não pois colocando os vetores como colunas de uma matriz A observamos que $Ax = 0$ admite mais de uma solução.

Problema 1.4: $P(v) = (-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$

Problema: 1.5

(a) $-3x + y = -2$

(b) $-4x + 2y = -6$

(c) $x + 2y = 7$

(d) $x - 5y = -13$

Problema: 1.6: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |, 2x + 3y = 10, x \geq 0, y \geq 0\}$

Problema 1.7

(a) $9x - 2y - z = 2$

(b) $3x - 4y + z = 1$

(c) $6x - 2y + 3z = 16$

(d) $3x - 4y + z = 6$

Problema 1.8 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |, 2x+3y+4z = 100, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

Problema 1.9:

(a) $x - z + 1 = 0$

(b) $z = 0$

(c) $z = 2$

Problema 1.10

(a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(b) 0

(c) $\frac{21}{\sqrt{26}}$

Problema 1.11

(a) $9x - 2y - z = 2$

(b) $\frac{2\sqrt{86}}{43}$

Problema 1.12:

((a) $3x - 4y + z = 1$

(b) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$

Problema 1.13: $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Problema 1.14: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$

Problema 1.15

(a) $(-4, 2, 0)$

(b) $2\sqrt{5}$

(c) $(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, 0)$

Problema 1.16

(a) $(1, 2, -1)$

(b) $\sqrt{6}$

(c) $(\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{2})$

Problema 1.17

(a) $(-3, -1, 2)$

(b) $\sqrt{14}$

(c) $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$

2 Parte 2:

2.1 Conjuntos abertos, fechados e aplicações contínuas

Problema 2.1. Esboce as regiões abaixo e diga se os conjuntos são abertos, fechados ou nenhum dos dois:

(1) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 3, 0 \leq x \leq 4y\}$

(2) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y^2, x + y < 2\}$

(3) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 > 1\}$

Problema 2.2. Ache e esboce o maior domínio onde a função f possa estar definida

(1) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$

(2) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

(3) $f(x, y) = \tan(x - y)$

2.2 Curvas planas

Problema 2.3. Para cada uma das equações abaixo, identifique a curva representada, coloque a equação na forma canônica apropriada e esboce a curva.

(1) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$

(2) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y = 1$

(3) $xy - 4y = -4$

(4) $2x^2 + y^2 = 50$

(5) $3x^2 - y^2 - 12x - 6y = 0$

(6) $x^2 + 9y^2 - 8x + 7 = 0$

(7) $y^2 - 3x^2 = 27$

(8) $5x^2 + 4y = 12$

(9) $y^2 - 2y - 8x + 25 = 0$

(10) $3y^2 + 2x = 0$

Problema 2.4. Muitos processos de produção industriais podem permitir mais de um produto, por exemplo, artigos que são semelhantes, mas de tipos ou de qualidades diferentes. Uma curva de produção ou transformação de produtos expressa a relação entre as quantidades de dois artigos diferentes (produtos conjuntos) produzidos pela mesma firma, usando-se em comum as matérias-primas e as verbas para mão-de-obra. Suponha que uma companhia produz quantidades x e y de duas espécies diferentes de doces, usando o mesmo processo de produção e que a curva de transformação de produtos para o insumo usado é dado por

$$5x^2 + 2y^2 = 98$$

(1) Esboce a curva de transformação (lembre-se que x e y não podem ser negativos).

(2) Quais são as maiores quantidades x e y que podem ser produzidas?

(3) Que quantidade x e y devem ser produzidas de maneira a se ter $y = \frac{3}{4}x$?

2.3 Superfícies

Problema 2.5.

Diga se a superfície abaixo é gráfico (em relação ao plano XY), cilindro sobre curva (em relação ao eixo Z) e/ou superfície de revolução (em relação ao eixo Z). Utilizando tais informações, esboce a superfície.

(1) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x^2\}$

(2) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x^2 + 3y^2 = z^2\}$

(3) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -\ln(x^2 + y^2)\}$

Problema 2.6. Esboce as superfícies abaixo:

(1) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = 3x^2 + 4y^2 - 12\}$

(2) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13\}$

(3) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 + 4y + z = 4\}$

2.4 Respostas da Parte 2

Problema 2.1

(1) fechado

(2) aberto

(3) não é fechado, não é aberto.

Problema 2.2

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq x\}$

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$

(3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Problema 2.3

(1) Circunferência : $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$

(2) Circunferência: $(x-1)^2 + (y+\frac{2}{3})^2 = (\frac{4}{3})^2$

(3) Hipérbole: $y(x-4) = -4$

(4) Elipse: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(5\sqrt{2})^2} = 1$

(5) Hipérbole: $(x-2)^2 - \frac{(y+3)^2}{3} = 1$

(6) Elipse: $\frac{(x-4)^2}{9} + y^2 = 1$

(7) Hipérbole: $\frac{y^2}{(3\sqrt{3})^2} - \frac{x^2}{9} = 1$

(8) Parábola: $x^2 = -\frac{4}{5}(y-3)$

(9) Parábola: $(y-1)^2 = 8(x-3)$

(10) Parábola $y^2 = -\frac{2}{3}x$

Problema 2.4

(2) A maior quantidade de produto x é obtida quando $y = 0$. Assim $x = \frac{7}{5}\sqrt{10}$. A maior quantidade de produto y é obtida quando $x = 0$. Assim $y = 7$.

(3) $x = 4$ e $y = 3$

Problema 2.5:

(1) Cilindro sobre curva.

(2) Superfície de revolução.

(3) Gráfico e superfície de revolução.

Problema 2.6: completando quadrados, encontramos as quádricas abaixo:

(1) $(x^2/4) + (y^2/3) + (z^2/12) = 1$ (elipsoide)

(2) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 4(z + 1)^2 = 22$ (hiperboloide de uma folha)

(3) $z = (y - 2)^2 - x^2$ (parabolóide hiperbólico)

3 Parte 3

3.1 Derivada de função

Problema 3.1. Seja $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}} \exp(\operatorname{sen}(x^2y))$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

Problema 3.2. Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto q.

(1) $f(x,y) = y^2 - x^2, \quad q = (-4,5,9)$.

(2) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}, \quad q = (1,-1,1)$.

(3) $f(x,y) = \ln(2x+y), \quad q = (-1,3,0)$.

Problema 3.3. Determine o plano que passa por $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$. Existe apenas um?

Problema 3.4. Determine a derivada $d\,f$

(1) $f(t,\theta) = \exp(t)\operatorname{sen}(\theta)$

(2) $f(x,y,z) = \ln(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

Problema 3.5. Considere $f(x,y,z) = x\exp(y/z)$ e $\alpha(t) = (t^2, 1-t, 1+2t)$. Determine $\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)$.

Problema 3.6. Sejam $g(x,y) = \arctan(2x+y)$ e $F(s,t) = (s^2t, s\ln(t))$. Determine $\frac{\partial g\circ F}{\partial s}$.

Problema 3.7. Sejam $g(x,y) = y^2 \tan(x)$ e $F(t,u,v) = (t^2 u\, v, u + t\, v^2)$ Determine $\frac{\partial g \circ F}{\partial t}(2,1,0)$.

Problema 3.8. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$, onde f atende a equação abaixo.

(1) $x^2 - x\, f(x) + f(x)^3 = 8$

(2) $x\, y^2 + y\, f(x,y)^2 + f(x,y)x^2 = 3$

Problema 3.9. Determine a taxa de variação máxima de $f(x,y) = x \exp(-y) + 3y$ no ponto $(1,0)$ e a direção e sentido que isso ocorre.

Problema 3.10. Determine a direção onde $f(x,y) = x^4 y - x^2 y^3$ decresce mais rápido no ponto $(2,-3)$.

Problema 3.11. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A = (1,3)$, $B = (3,3)$, $C = (1,7)$ e $D = (6,15)$. A derivada direcional em A na direção do vetor AB é 3 e a derivada direcional em A na direção AC é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor AD.

Problema 3.12. Seja r a reta tangente a curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas tangentes que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela a reta r.

Problema 3.13 (*)**.** Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função de classe C^2. Considere a aplicação $F(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$. Calcule $DF(p)$.

Problema 3.14 (*)**.** Seja $\psi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\mathrm{sen}\,(\theta))$. Calcule $D\psi(2,\pi/3)$.

Problema 3.15 (*). Enuncie o teorema da função inversa.

Problema 3.16. Uma *função de utilidade* é uma maneira de atribuir um (único) número real a cada possível cesta de consumo, de modo que uma cesta (x_1, x_2) é preferida a outra cesta (y_1, y_2) se, e somente se $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$. Aqui, x_1 designa a quantidade do bem 1 e x_2 a quantidade do bem 2.
Sendo assim, as *curvas de nível* da função de utilidade são *curvas de indiferença* do consumidor, onde se situam as cestas as quais o consumidor é indiferente consumir.
Desenhe as curvas de indiferença para as seguintes funções de utilidade: (lembre que $x_1, x_2 \geq 0$)

(a) $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

(b) $u(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2$

(c) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$

(d) $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$

Problema 3.17. A inclinação da curva de indiferença em determinado ponto é chamada *taxa marginal de substituição* (TMS), que mede a taxa à qual o consumidor está propenso a substituir um bem pelo outro. Considerando que a TMS seja estritamente negativa, a curva de indiferença pode ser descrita como gráfico de uma função do tipo $x_2(x_1)$, e assim a TMS adquire a forma:

$$\text{TMS} = \frac{dx_2}{dx_1}$$

Sendo $u(x_1, x_2)$ função utilidade, mostre que:

(a)

$$\text{TMS} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}$$

Os valores $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ são chamados respectivamente de *utilidade marginal* do bem 1 e do bem 2.

(b) Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente e $v(x_1, x_2)$ uma outra função de utilidade tal que

$$v(x_1, x_2) = f(u(x_1, x_2))$$

Mostre que, neste caso, a TMS continua sendo a mesma descrita no item (a), ou seja, que a TMS independe da representação da utilidade.

Problema 3.18. Considere dois bens, os quais chamamos bem 1 e bem 2, com respectivos preços p_1 e p_2. Seja w a renda do consumidor e $x = (x_1, x_2)$ a cesta contendo quantidade x_1 do bem 1 e x_2 do bem 2.
Uma *função demanda* é uma função que associa a cada tripla (p_1, p_2, w) uma (única) cesta $X(p_1, p_2, w) = (x_1(p_1, p_2, w), x_2(p_1, p_2, w))$. Dizemos que esta função satisfaz a *Lei de Walras* se, para cada $p_1, p_2, w > 0$, tivermos

$$p_1 \cdot x_1(p_1, p_2, w) + p_2 \cdot x_2(p_1, p_2, w) = w$$

Mostre que, se a função demanda atende a Lei de Walras, então:

(a)
$$p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + x_1 = 0$$

(b)
$$p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_2} + x_2 = 0$$

(c)
$$p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial w} = 1$$

Problema 3.19. Uma função demanda é dita *homogênea de grau 0* se

$$X(\alpha \cdot p_1, \alpha \cdot p_2, \alpha \cdot w) = X(p_1, p_2, w)$$

para qualquer $\alpha > 0$, ou seja, caso os preços e a renda do consumidor cresçam na mesma proporção, a cesta se mantém a mesma. Mostre que se uma função demanda é homogênea de grau 0, então:

(a)
$$p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + w \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w} = 0$$

(b)

$$p_1 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_2} + w \cdot \frac{\partial x_2}{\partial w} = 0$$

(c) Se além disso ela satisfaz a lei de Walras, então:

$$p_2 \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_2} - \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \right) + w \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w} = x_1$$

Problema 3.20. Vamos considerar a *representação logarítmica da função de utilidade de Cobb-Douglas*:

$$u(x_1, x_2) = a \cdot \ln x_1 + b \cdot \ln x_2$$

onde $a, b > 0$ descrevem as preferências do consumidor. Para tais constantes, a *função demanda de Cobb-Douglas* é dada por $X(p_1, p_2, w) = (x_1, x_2)$ sendo:

$$x_1(p_1, p_2, w) = \frac{a}{a+b} \frac{w}{p_1}$$

e

$$x_2(p_1, p_2, w) = \frac{b}{a+b} \frac{w}{p_2}$$

Definindo:

$$v(p_1, p_2, w) = u(x_1(p_1, p_2, w), x_2(p_1, p_2, w))$$

Calcule $\frac{\partial v}{\partial p_1}$, $\frac{\partial v}{\partial p_2}$ e $\frac{\partial v}{\partial w}$.

3.2 Respostas da Parte 3

Problema 3.1: $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = -2$.

Problema 3.2

(1) $8x + 10y - z = 9$

(2) $x - 2y + z = 4$

(3) $2x + y - z = 1$

Problema 3.3: Existe um único plano que satisfaz as condições exigidas. A equação deste plano é

$$z = 3/2 + 1/2(x-3) + 3(y-1/2)$$

Problema 3.4

(1) $d\,f = \exp(t)\,\mathrm{sen}\,(\theta)d\,t + \exp(t)\cos(\theta)d\,\theta$

(2) $d\,f = (x^2+y^2+z^2)^{-1}(x\,d\,x + y\,d\,y + z\,d\,z)$

Problema 3.5
$\exp((1-t)/(1+2t))[2t - ((t^2/(1+2t)) - (2t^2(1-t)/(1+2t)^2)]$

Problema 3.6
$\frac{\partial g \circ F}{\partial s} = \frac{4st + \ln(t)}{1+(2s^2t + s\ln(t))^2}$

Problema 3.7
$\frac{\partial g \circ F}{\partial t} = 0$

Problema 3.8

(1) $\frac{f-2x}{3f^2-x}$

(2) $-\frac{y^2+2xf}{2yf+x^2}$

Problema 3.9
$\sqrt{5}$ e $(1,2)$

Problema 3.10: $(-12, 92)$

Problema 3.11
327/13

Problema 3.12
$4x+5y=14$ e $-4x-5y=14$

Problema 3.13: $DF(p) = \text{Hess} f(p)$.

Problema 3.14:

$$D\psi(2, \pi/3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3.15 *Seja $F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ aplicação de classe C^1. Suponha que $DF(p)$ é invertível para $p \in \Omega$. Então existe uma vizinhança U de p e uma vizinhança V de $F(p)$ tais que $F : U \to V$ é um difeomorfismo de classe C^1, i.e., $F : U \to V$ é bijeção de classe C^1 com inversa de classe C^1.*

Problema 3.16

Como as curvas de indiferença são as curvas de nível da função utilidade, basta fixar um nível k e traçar a curva $u(x_1, x_2) = k$. Tome alguns valores para o k e obtenha estas curvas de nível. Por exemplo, no item (a), desenhe as curvas $x_1 \cdot x_2 = 1$, $x_1 \cdot x_2 = 2$ e assim por diante. Preste atenção ao fato de que, como lidamos com quantidade, x_1 e x_2 não podem ser negativos.

Problema 3.17

(a) Neste caso, convém escrever $u(x_1, x_2(x_1))$, visto que x_2 está em função de x_1. Assim, fixando um nível k, obtemos a curva de indiferença:

$$u(x_1, x_2(x_1)) = k \tag{3.1}$$

Derivando ambos os lados da equação (3.1) com relação a x_1, temos:

$$\frac{d}{dx_1} u(x_1, x_2(x_1)) = \frac{d}{dx_1} k$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

Disso segue o resultado.

(b) Basta notar que:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

E substituir na expressão da TMS (provada no item a), lembrando que supomos $f'(u) > 0$.

Problema 3.18

(a) Basta derivar a Lei de Walras com relação a p_1:

$$\frac{d}{dp_1}[p_1 \cdot x_1(p_1, p_2, w) + p_2 \cdot x_2(p_1, p_2, w)] = \frac{d}{dp_1} w$$

Usando a regra do produto para derivadas, obtém-se o resultado.

(b) Idêntico ao (a), mas derivando com relação a p_2.

(c) Também como o item (a), mas agora derivando com relação a w.

Problema 3.19
Lembre que:

$$X(\alpha \cdot p_1, \alpha \cdot p_2, \alpha \cdot w) = (x_1(\alpha \cdot p_1, \alpha \cdot p_2, \alpha \cdot w), x_2(\alpha \cdot p_1, \alpha \cdot p_2, \alpha \cdot w))$$

e

$$X(p_1, p_2, w) = (x_1(p_1, p_2, w), x_2(p_1, p_2, w))$$

Assim, para resolver o item (a), use que:

$$x_1(\alpha \cdot p_1, \alpha \cdot p_2, \alpha \cdot w) = x_1(p_1, p_2, w)$$

e derive ambos os lados desta expressão com relação a α:

$$\frac{d}{d\alpha} x_1(\alpha \cdot p_1, \alpha \cdot p_2, \alpha \cdot w) \quad = \quad \frac{d}{d\alpha} x_1(p_1, p_2, w)$$

Use a regra da cadeia e obtenha imediatamente o resultado.
O item (b) se resolve da mesma forma que o item (a). No caso do item (c), junte as igualdades provadas no item (a) deste exercício e no item (a) do exercício anterior.

Problema 3.20

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} = -\frac{a}{p_1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_2} = -\frac{b}{p_2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial w} = \frac{a+b}{w}$$