

## A Corrente Alternada

### 5.1 INTRODUÇÃO

Como sabemos, a função do tempo

$$u = U_m \cos \omega t \quad (5.1)$$

representa uma grandeza periódica com variação co-senoidal no tempo. São os seguintes os valores característicos desta grandeza:

$$\begin{aligned} U_m &= \text{valor máximo da grandeza ou amplitude;} \\ \omega &= \text{velocidade angular expressa em radianos por segundo.} \end{aligned}$$

Temos, ainda,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ — período em segundos;}$$

$$f = \frac{1}{T} \text{ — frequência em hertz (Hz).}$$

Seja agora a função

$$u_1 = U_m \cos (\omega t + \theta) \quad (5.2)$$

onde  $\theta$  é denominado ângulo de fase; é evidente que na função (5.1) o ângulo de fase é nulo.

A Fig. 5.1 mostra as duas funções representadas no diagrama cartesiano.

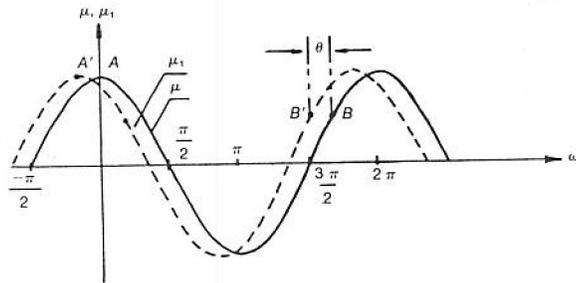


Fig. 5.1 Representação gráfica.

A partir da representação gráfica da Fig. 5.1 nota-se que os estados  $A$  e  $A'$  e  $B$  e  $B'$  ocorrem na função  $u_1$ ,  $(\theta/\omega)$  segundos antes que na função  $u$ . É comum, devido a este fato, dizer que a função  $u_1$  está adiantada de  $\theta$  (graus ou radianos) em relação a  $u$  ou, ainda,  $u$  está atrasada de  $\theta$  de  $u_1$ .

## 5.2 EXCITAÇÃO CO-SENOIDAL (OU SENOIDAL) NOS ELEMENTOS DE CIRCUITO

### 5.2.1 Resistor

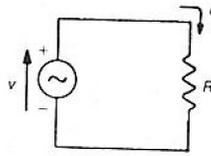


Fig. 5.2 Circuito  $R$ .

No resistor temos:

$$v = Ri \quad (5.3)$$

Vamos admitir que a fonte aplique ao resistor uma tensão co-senoidal do tipo:

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (5.4)$$

em vista disso, resulta:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m}{R} \cos(\omega t + \theta) \quad (5.5)$$

o termo  $I_m = \frac{V_m}{R}$  corresponde ao valor máximo ou amplitude da corrente; verifica-se também que os ângulos de fase da tensão e da corrente são iguais, ou seja, a defasagem entre a tensão e a corrente é nula.

### 5.2.2 Indutor ideal

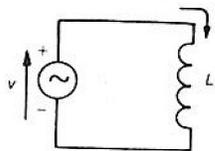


Fig. 5.3 Circuito  $L$ .

No indutor temos:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (5.6)$$

Seendo  $v = V_m \cos(\omega t + \theta)$ , a corrente, que corresponde à resposta a esta excitação, em regime permanente, obedecerá ao mesmo tipo de função; assim, podemos escrever:

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad (5.7)$$

onde  $I_m$  e  $\phi$  são grandezas a serem determinadas.

Substituindo estes valores na expressão (5.6), obtemos:

$$V_m \cos(\omega t + \theta) = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi)^* \quad (5.8)$$

ou melhor:

$$V_m \cos(\omega t + \theta) = \omega L \cdot I_m \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.9)$$

Para que a igualdade se verifique em qualquer instante, devemos ter:

$$V_m = \omega L I_m$$

ou

$$I_m = \frac{V_m}{\omega L} \quad (5.10)$$

e, ainda:

$$\omega t + \theta = \omega t + \phi + \frac{\pi}{2}$$

ou melhor:

$$\psi = \theta - \phi = \frac{\pi}{2} \quad (5.11)$$

O termo  $X_L = \omega L$ , denominado reatância do indutor, é expresso em ohms, e nota-se que a tensão no indutor está adiantada de  $\frac{\pi}{2}$  radianos em relação à corrente que circula pelo mesmo.

### 5.2.3 Capacitor ideal

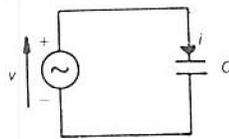


Fig. 5.4 Circuito C.

\*Note que  $-\sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ .

No capacitor, vale a relação:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (5.12)$$

Para  $v = V_m \cos(\omega t + \theta)$ , tem-se

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad (5.13)$$

que resulta:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) = -\omega C V_m \sin(\omega t + \theta)$$

ou, ainda:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) = \omega C \cdot V_m \cos(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}) \quad (5.14)$$

Para que a igualdade se mantenha em qualquer instante  $t$ , devemos ter:

$$I_m = \omega C \cdot V_m \quad \text{ou} \quad I_m = \frac{V_m}{\frac{1}{\omega C}} \quad (5.15)$$

onde  $\frac{1}{\omega C} = X_C$  representa a reatância do capacitor (exprime-se em ohms) e, ainda,

$$\omega t + \phi = \omega t + \theta + \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \phi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

ou então:

$$\psi = \theta - \phi = -\frac{\pi}{2} \quad (5.16)$$

Verifica-se, portanto, que no capacitor a tensão está atrasada de  $\frac{\pi}{2}$  radianos em relação à corrente.

### 5.3 EXCITAÇÃO CO-SENOIDAL (OU SENOIDAL) EM UM CIRCUITO RL-SÉRIE

Consideremos um circuito  $RL$ -série alimentado por fonte (gerador) que lhe fornece tensão do tipo  $v = V_m \cos(\omega t + \theta)$ , denominada excitação. A corrente no circuito ou a tensão em qualquer componente é denominada resposta.

Sejam os referenciais de tensão e corrente indicados na Fig. 5.5, onde  $i = i(t)$  é a corrente e  $v_R = v_R(t)$  e  $v_L = v_L(t)$  são, respectivamente, as tensões no resistor e no indutor num dado instante  $t$ .

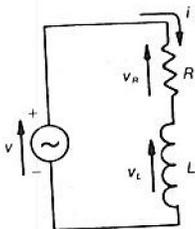


Fig. 5.5 Circuito  $RL$ -série.

Aplicando-se a lei de Kirchoff referente às tensões, obtém-se:

$$v_R + v_L - v = 0$$

ou

$$v_R + v_L = v \quad (5.17)$$

Mas, como sabemos:

$$v_R = Ri \quad (5.18)$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad (5.19)$$

e sendo  $v = V_m \cos(\omega t + \theta)$ , resulta que:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (5.20)$$

Como se trata de um circuito linear (constituído por parâmetros lineares), a corrente  $i = i(t)$  deve ser do mesmo tipo que a excitação, ou seja,  $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$ , onde  $I_m$  é a amplitude da corrente e  $\phi$  é o seu ângulo de fase. De fato, a equação diferencial (5.20) admite solução do tipo considerado.

Vamos agora determinar os valores de  $I_m$  e  $\phi$ .

Substituiremos a corrente  $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$  na Eq. (5.20), obtendo:

$$-\omega L \cdot I_m \sin(\omega t + \phi) + R \cdot I_m \cos(\omega t + \phi) = V_m \cos(\omega t + \theta).$$

Desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned} -\omega L \cdot I_m (\sin \omega t \cos \phi + \sin \phi \cos \omega t) + R \cdot I_m (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) = \\ = V_m (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} (R \cdot I_m \cos \phi - \omega L \cdot I_m \sin \phi) \cdot \cos \omega t - (\omega L \cdot I_m \cos \phi + R \cdot I_m \sin \phi) \cdot \sin \omega t = \\ = V_m \cos \theta \cos \omega t - V_m \sin \theta \sin \omega t \end{aligned}$$

Para que a igualdade se verifique, qualquer que seja  $t$ , devemos ter:

$$R \cdot I_m \cos \phi - \omega L \cdot I_m \sin \phi = V_m \cos \theta \quad (5.21)$$

$$\omega L \cdot I_m \cos \phi + R \cdot I_m \sin \phi = V_m \sin \theta \quad (5.22)$$

Elevando-se as Eqs. (5.21) e (5.22) ao quadrado e somando-se membro a membro, obtém-se:

$$R^2 \cdot I_m^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \omega^2 L^2 \cdot I_m^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = V_m^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

ou

$$R^2 \cdot I_m^2 + \omega^2 L^2 \cdot I_m^2 = V_m^2, \text{ donde: } I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \quad (5.23)$$

Substituindo-se (5.23) em (5.21), vem:

$$\frac{R \cdot V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \cos \phi - \frac{\omega \cdot L \cdot V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \sin \phi = V_m \cos \theta$$

ou

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \cos \phi - \frac{\omega \cdot L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \sin \phi = \cos \theta \quad (5.24)$$

Utilizando-se o seguinte artifício:

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} = \cos \psi \text{ e } \frac{\omega \cdot L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} = \sin \psi, \text{ resulta que:}$$

$$\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi = \cos \theta$$

ou melhor,

$$\cos (\psi + \phi) = \cos \theta \quad (5.25)$$

finalmente,

$$\psi + \phi = \theta$$

ou

$$\psi = \theta - \phi \quad (5.26)$$

$$\text{e sendo } \psi = \text{arc tg} \left( \frac{\omega L}{R} \right) (0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ)$$

segue que:

$$\phi = \theta - \text{arc tg} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \quad (5.27)$$

Resultado idêntico pode ser obtido a partir das expressões (5.22) e (5.23). Assim sendo, a corrente no circuito será dada por:

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \cos \left[ \omega t + \theta - \arctan \left( \frac{\omega L}{R} \right) \right] \quad (5.28)$$

Neste caso diz-se que a corrente (resposta) está atrasada do ângulo  $\psi$  em relação à tensão (excitação) com

$$\psi = \arctan \left( \frac{\omega L}{R} \right) \quad (0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ)$$

Se  $\omega = 0 \rightarrow \psi = 0^\circ$  (excitação contínua)

Se  $L = 0 \rightarrow \psi = 0^\circ$  (circuito não indutivo, puramente resistivo)

Se  $R = 0 \rightarrow \psi = 90^\circ$  (circuito puramente indutivo)

#### 5.4 EXCITAÇÃO CO-SENOIDAL EM UM CIRCUITO RC-SÉRIE

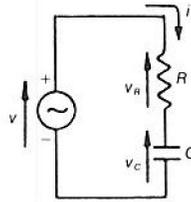


Fig. 5.6 Circuito RC-série.

Da segunda lei de Kirchoff obtemos:

$$v_R + v_C = v \quad (5.29)$$

e sendo

$$v_R = Ri$$

e

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + v_0$$

e lembrando que

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

obtemos

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt + v_0 = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

Derivando-se em relação ao tempo:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = -\omega V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (5.30)$$

A corrente resposta é do tipo:

$$i = I_m \cos (\omega t + \phi)$$

Substituindo-se na Eq. (5.30) e procedendo-se da mesma forma que no circuito *RL*, obtém-se:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 \cdot C^2}}} \quad (5.31)$$

$$\phi = \theta - \psi, \text{ com } \psi = -\text{arc tg} \left( \frac{1}{\omega CR} \right) \quad (-90^\circ \leq \psi \leq 0^\circ)$$

ou seja,

$$\phi = \theta + \text{arc tg} \left( \frac{1}{\omega CR} \right) \quad (5.32)$$

Portanto:

$$i = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos \left[ \omega t + \theta + \text{arc tg} \left( \frac{1}{\omega CR} \right) \right] \quad (5.33)$$

Neste caso a corrente está adiantada de  $\psi = \text{arc tg} \left( \frac{1}{\omega RC} \right)$  em relação à tensão.

## 5.5 EXCITAÇÃO COMPLEXA

Como vimos até aqui, a determinação dos parâmetros que constituem a resposta é bastante trabalhosa. A fim de simplificar os cálculos, vamos utilizar a seguinte identidade:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \text{sen } \alpha \quad (5.34)$$

denominada identidade de Euler.

Vamos agora introduzir o operador *Re* [ $\cdot$ ],\* que, aplicado a um número complexo, nos fornece a parte real deste número. Assim, temos:

$$\text{Re} [e^{j\alpha}] = \cos \alpha \quad (5.35)$$

A excitação complexa consiste em substituir a excitação do circuito, ou seja,

$$v = V_m \cos (\omega t + \theta) \quad (5.36)$$

por uma excitação fictícia complexa cuja parte real corresponde à excitação real do sistema.

\**Re* [ $\cdot$ ] — Parte real de.

Por conveniência, a excitação complexa escolhida que satisfaz as condições impostas é dada por:

$$\dot{v} = V_m \cos(\omega t + \theta) + j \cdot V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (5.37)$$

É fácil observar que

$$\text{Re}[\dot{v}] = v = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (5.38)$$

Aplicando a identidade de Euler, a excitação complexa pode ser representada por:

$$\dot{v} = V_m e^{j\omega t + \theta} \quad (5.39)$$

A corrente resposta à excitação complexa é também uma função complexa cuja *parte real corresponde à corrente real desejada*.

Retomemos o circuito elementar da Fig. 5.2 de um gerador com excitação senoidal alimentando um resistor;

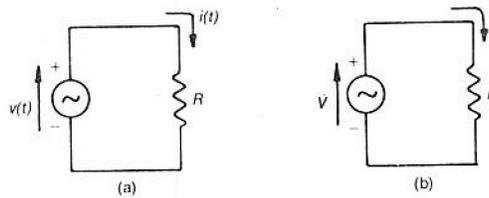


Fig. 5.7 Circuito  $R$  — (a) excitação e respostas reais; (b) excitação e respostas complexas.

Resolvendo o circuito da Fig. 5.7b, com a excitação complexa, podemos escrever:

$$i = \frac{\dot{v}}{R} \quad (5.40)$$

e, sendo  $\dot{v} = V_m e^{j\omega t + \theta}$ , resulta que:

$$i = \frac{V_m}{R} e^{j\omega t + \theta} = \frac{V_m}{R} \cos(\omega t + \theta) + j \frac{V_m}{R} \sin(\omega t + \theta) \quad (5.41)$$

cuja parte real é a verdadeira corrente que passa pelo resistor, ou seja:

$$i(t) = \text{Re}[i] = \frac{V_m}{R} \cos(\omega t + \theta) \quad (5.42)$$

### 5.5.1 Circuito RL-série

Na Seção 5.3 analisamos o comportamento do circuito  $RL$  em regime permanente senoidal, onde foi possível verificar a grande dificuldade encontrada utilizando-se técnicas normais de resolução. Verificaremos agora a enorme vantagem da resolução de circuitos deste tipo com a utilização de excitação complexa; suponha então o circuito da Fig. 5.8.

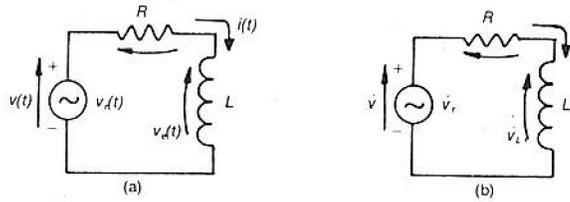


Fig. 5.8 Circuito  $RL$  — (a) excitação real; (b) excitação complexa.

Como sabemos,

$$\dot{v} = \dot{v}_R + \dot{v}_L \quad (5.43)$$

ou, ainda:

$$\dot{v} = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (5.44)$$

e, sendo  $\dot{v} = V_m e^{j(\omega t + \theta)}$ , a corrente complexa será do tipo  $\dot{i} = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$ , que, substituída em (5.44), determinará  $I_m$  e  $\phi$  como segue:

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + jL\omega \cdot I_m e^{j(\omega t + \phi)} = V_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

Dividindo-se ambos os membros por  $e^{j\omega t}$ , resulta:

$$R \cdot I_m e^{j\phi} + j\omega L \cdot I_m e^{j\phi} = V_m e^{j\theta}$$

ou, ainda:

$$R + j\omega L = \frac{V_m}{I_m} e^{j(\theta - \phi)} \quad (5.45)$$

O primeiro membro de (5.45) pode ser colocado na forma exponencial como segue:

$$R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctg \left( \frac{\omega L}{R} \right)} \quad (5.46)$$

Portanto, temos:

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctg \left( \frac{\omega L}{R} \right)} = \frac{V_m}{I_m} e^{j(\theta - \phi)} \quad (5.47)$$

donde se conclui que:

$$\frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

ou

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (5.48)$$

e

$$\theta - \phi = \arctan \left( \frac{\omega L}{R} \right) = \psi \quad (5.49)$$

que são as expressões já obtidas em (5.23) e (5.27).

### 5.5.2 Circuito RC-série

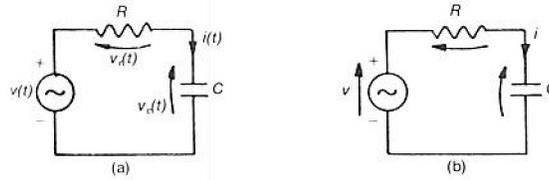


Fig. 5.9 Circuito RC-série — (a) domínio do tempo; (b) excitação complexa.

No circuito com excitação complexa (Fig. 5.9b) podemos escrever:

$$\dot{v} = \dot{v}_R + \dot{v}_C \quad (5.50)$$

ou, ainda,

$$\dot{v} = Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + v_0 \quad (5.51)$$

Derivando-se (5.51) em relação ao tempo, resulta:

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i \quad (5.52)$$

A corrente complexa é do tipo:

$$i = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

que, substituindo em (5.52), resulta:

$$j \cdot R \cdot I_m \omega e^{j(\omega t + \phi)} + \frac{I_m}{C} e^{j(\omega t + \phi)} = V_m j \omega e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.53)$$

Dividindo (5.53) por  $e^{j\omega t}$  e multiplicando por  $(-j)$ , resulta:

$$R \cdot I_m \omega e^{j\phi} - j \frac{I_m}{C} e^{j\phi} = V_m \omega e^{j\phi}, \quad (5.54)$$

ou, ainda:

$$R - j \frac{1}{\omega C} = \frac{V_m}{I_m} \cdot e^{j(\theta - \phi)} \quad (5.55)$$

Note que as expressões (5.54) e (5.55), que permitem determinar a corrente no indutor e no capacitor, respectivamente, independem do instante de tempo, visto

que a variável  $t$  é eliminada nesta solução. Este fato será de extrema importância nos capítulos seguintes.

O primeiro membro de (5.55), representado na forma polar, resulta:

$$\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \cdot e^{-j \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{\omega CR} \right)} = \frac{V_m}{I_m} e^{j(\theta - \phi)} \quad (5.56)$$

Da igualdade complexa resulta:

$$\frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad \text{ou} \quad I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \quad (5.57)$$

$$\theta - \phi = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{\omega CR} \right) = \psi \quad (5.58)$$

ou seja:

$$\phi = \theta + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{\omega CR} \right) \quad (5.59)$$

Portanto:

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos \left[ \omega t + \theta + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{\omega CR} \right) \right] \quad (5.60)$$

## 5.6 VALOR EFICAZ OU VALOR MÉDIO QUADRÁTICO

É comum em circuitos de corrente alternada representarem-se as grandezas tensão e corrente em função de seus valores eficazes, isto devido ao fato de que todos os instrumentos de medida (amperímetros e voltímetros) dão a indicação do valor eficaz da grandeza medida.

Define-se valor eficaz de uma função periódica pela relação:

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y(t)^2 dt} \quad (5.61)$$

onde  $T$  é o período desta função.

Para nossas aplicações, é de extremo interesse a determinação do valor eficaz de grandezas variáveis senoidalmente no tempo; para isso, suponhamos que:

$$y(t) = Y_m \cos \omega t \quad (5.62)$$

onde

$$\omega = 2\pi f \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Da aplicação da definição do valor eficaz, obtemos:

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |Y_m \cos \omega t|^2 dt} \quad (5.63)$$

chamando

$$\alpha = \omega t$$

resulta:

$$dt = \frac{1}{\omega} d\alpha$$

e

$$Y_{ef} = Y_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha} \quad (5.64)$$

lembrando que:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} [1 + \cos 2\alpha]$$

a expressão (5.64) se reduz a:

$$Y_{ef} = Y_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right] \cdot d\alpha} \quad (5.65)$$

ou, ainda,

$$Y_{ef} = Y_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\alpha \cdot d\alpha}$$

a segunda integral sob a raiz é nula, resultando, finalmente:

$$Y_{ef} = \frac{Y_m}{\sqrt{2}} \quad (5.66)$$

Para a conceituação física do valor eficaz, suponhamos que um resistor de resistência  $R$  seja percorrido por uma corrente senoidal do tipo:

$$i = I_m \cos \omega t$$

A potência dissipada neste resistor é dada por:

$$p(t) = Ri^2$$

que resulta:

$$p(t) = R \cdot I_m^2 (\cos \omega t)^2$$

ou, ainda:

$$p(t) = R \cdot I_m^2 \frac{1}{2} [1 + \cos 2\omega t]$$
$$p(t) = R \cdot I^2 + R \cdot I^2 \cos 2\omega t \quad (5.67)$$

onde  $I = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$  é o valor eficaz da corrente.

O valor médio de  $p(t)$ , que representa a potência média dissipada, é dado por:

$$P_{méd} = RI^2 \quad (5.68)$$

visto que o segundo termo da expressão (5.67) tem valor médio nulo no tempo.

Verifica-se, portanto, que, num resistor percorrido por corrente senoidal, a potência média dissipada seria igual à potência dissipada pelo mesmo resistor percorrido por uma corrente contínua  $I$ .

## 5.7 FASORES — RELAÇÕES FASORIAIS

Consideremos a excitação complexa

$$\dot{v} = V_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (5.69)$$

que pode ser escrita como segue:

$$\dot{v} = \sqrt{2} \cdot V e^{j\omega t} \cdot e^{j\theta} \quad (5.70)$$

onde:

$$\dot{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \text{ é o valor eficaz da tensão } v(t).$$

Verificamos nas seções anteriores que podemos eliminar o termo  $e^{j\omega t}$  na resolução das equações para a obtenção da resposta. Desta forma, a tensão complexa  $\dot{v}$  pode ser representada apenas pela expressão

$$\dot{V} = V \cdot e^{j\theta} \text{ ou } \dot{V} = V \underline{\theta} \quad (5.71)$$

que é denominado *fasor* da tensão  $v(t)$ .

Este procedimento introduz simplificações substanciais na resolução de circuitos elétricos em corrente alternada.

De forma análoga, a grandeza

$$\dot{I} = I \cdot e^{j\phi} \text{ ou } \dot{I} = I \underline{\phi} \quad (5.72)$$

representa o fasor da corrente  $i(t)$ .

A relação

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} \quad (5.73)$$

e denominada *impedância* do elemento em corrente alternada, medida em ohms.

E o seu inverso, ou seja,

$$\dot{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{V}}$$

é denominado *admitância* do elemento em corrente alternada, sendo medida em siemens (S).

Para os elementos usuais da teoria de circuitos, temos:

### 5.7.1 Resistor

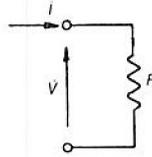


Fig. 5.10 Resistor.

Se  $\dot{V} = V e^{j\theta}$ , da lei de Ohm obtemos:

$$\dot{I} = \frac{V}{R} e^{j\theta} = \frac{V}{R} \angle \theta \quad (5.74)$$

logo, a impedância do resistor é dada por:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R \quad (5.75)$$

### 5.7.2 Indutor

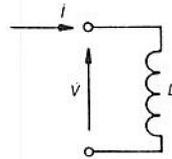


Fig. 5.11 Indutor.

Se  $\dot{V} = V \angle \theta$ , resulta que (ver Seç. 5.2.2):

$$\dot{I} = \frac{V}{\omega L} \angle \theta - \pi/2 \quad (5.76)$$

logo, a impedância do indutor é dada por:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V \angle \theta}{\frac{V}{\omega L} \angle \theta - \pi/2} = \omega L \angle \pi/2$$

ou, finalmente:

$$Z = jX_L \quad (5.77)$$

onde o termo

$$X_L = \omega L \quad (5.78)$$

é denominado reatância do indutor.

### 5.7.3 Capacitor

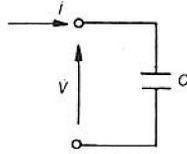


Fig. 5.12 Capacitor.

Se  $\dot{V} = V \angle \theta$ , resulta que (ver Seç. 5.2.3):

$$\dot{i} = \frac{V}{\frac{1}{\omega C}} \angle \theta + \pi/2 \quad (5.79)$$

logo, a impedância do capacitor é dada por:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{i}} = \frac{V \angle \theta}{\frac{V}{\frac{1}{\omega C}} \angle \theta + \pi/2} = \frac{1}{\omega C} \angle -\pi/2$$

ou, finalmente,

$$\dot{Z} = -jX_c \quad (5.80)$$

onde o termo

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \quad (5.81)$$

é denominado reatância do capacitor.

Em vista do já exposto, um circuito em corrente alternada pode ser resolvido aplicando-se as mesmas técnicas usadas na resolução de circuitos em corrente contínua, lembrando apenas que as grandezas — tais como corrente e tensão — são agora grandezas complexas.

Como exemplo, suponhamos que se deseja calcular a corrente em um circuito *RL*-série em corrente alternada, aplicando a técnica fasorial.

A Fig. 5.13 mostra o circuito com as grandezas reais, ou seja, no domínio do tempo:

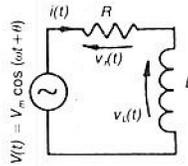


Fig. 5.13 Circuito  $RL$ -série — domínio do tempo.

Para resolvermos aplicando a técnica fasorial, transformamos o circuito, utilizando as seguintes regras:

- a) Substituímos as fontes de tensão reais, pelos seus respectivos fasores.
- b) Substituímos todos os elementos pelas suas respectivas impedâncias.

Desta forma, o circuito da Fig. 5.13, representado na forma complexa, ou no domínio da freqüência, reduz-se a:

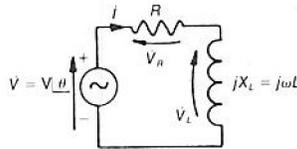


Fig. 5.14 Circuito  $RL$ -série — domínio da freqüência.

- c) Determinamos as respostas aplicando as técnicas já conhecidas de resolução de circuitos.

Para o exemplo em questão, podemos escrever:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L \quad (5.82)$$

Lembrando que:

$$\frac{\dot{V}_R}{\dot{I}} = R \quad \text{ou} \quad \dot{V}_R = R\dot{I}$$

e

$$\frac{\dot{V}_L}{\dot{I}} = jX_L \quad \text{ou} \quad \dot{V}_L = jX_L\dot{I}$$

podemos escrever:

$$\dot{V} = R\dot{I} + jX_L\dot{I}$$

ou

$$\dot{V} = (R + jX_L)\dot{I} \quad (5.83)$$

que resulta:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R + jX_L}$$

Lembrando que na forma polar podemos escrever:

$$R + jX_L = \sqrt{R^2 + X_L^2} \angle \text{arc tg } \frac{X_L}{R} \quad (5.84)$$

ou, ainda,

$$R + jX_L = Z \angle \psi$$

onde

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \text{ é impedância do circuito}$$

e

$$\psi = \text{arc tg } \frac{\omega L}{R} \text{ é a sua defasagem}$$

resulta:

$$i = \frac{V \angle \theta}{Z \angle \psi} = \frac{V}{Z} \angle \theta - \psi \quad (5.85)$$

O termo  $I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$  é o valor eficaz da corrente alternada.

É importante, neste ponto, o leitor comparar o resultado aqui obtido, que, sem dúvida, é relativamente simples, com aquele obtido nas expressões (5.48) e (5.49); é óbvio que os resultados são idênticos.

## 5.8 DIAGRAMA DE FASORES

### 5.8.1 Representação gráfica de um número complexo

Dado o número complexo

$$\dot{A} = a + jb$$

ele pode ser representado no diagrama cartesiano como segue:

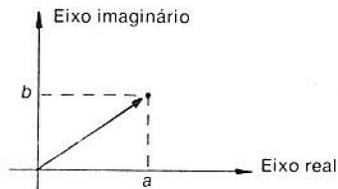


Fig. 5.15 Representação de um número complexo no diagrama cartesiano.

Na forma polar, o mesmo número  $\dot{A}$  é expresso por:

$$\dot{A} = A \angle \theta$$

onde

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5.86)$$

e

$$\theta = \text{arc tg } \frac{b}{a} \quad (5.87)$$

cuja representação no diagrama polar é a seguinte:

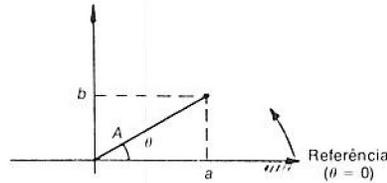


Fig. 5.16 Representação de um número complexo na forma polar.

É claro que a projeção do segmento A na referência (eixo horizontal) corresponde à parte real do número complexo.

Como o fasor nada mais é que um número complexo, sua representação gráfica num diagrama polar é denominada diagrama de fasores. Assim, a grandeza fasorial

$$\dot{V} = V \cdot e^{j\theta} = V \angle \theta$$

será representada graficamente como segue:

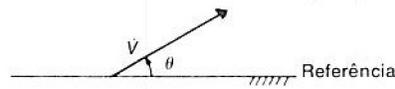


Fig. 5.17 Representação gráfica de  $\dot{V}$ .

ou seja, por uma flecha de comprimento (módulo) V, que é o valor eficaz da grandeza, formando um ângulo  $\theta$  com a referência, que é um eixo adotado arbitrariamente. Assim, os diagramas de fasores para tensões e correntes para os circuitos analisados são representados por:

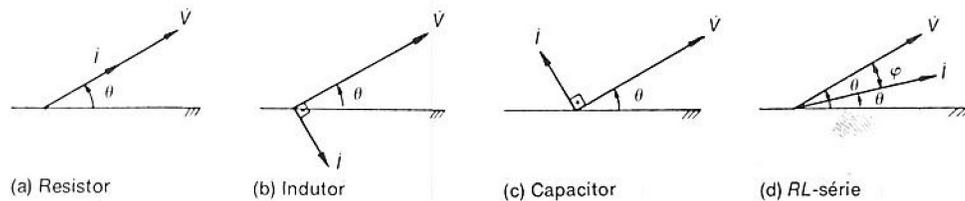


Fig. 5.18 Diagrama de fasores para tensão e corrente.

Como exemplo, vamos determinar a corrente e traçar o diagrama de fasores do circuito da Fig. 5.19.

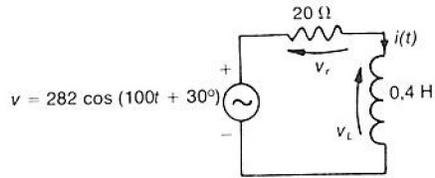


Fig. 5.19 Circuito em análise.

Seguindo o procedimento já indicado, vamos traçar o circuito no domínio da frequência; assim, temos:

Se

$$v(t) = 282 \cos(100t + 30^\circ)$$

então:

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{282}{\sqrt{2}} = 200 \text{ V}$$

e

$$\theta = 30^\circ \text{ com } \omega = 100 \text{ rad/s}$$

logo, o fasor da tensão será:

$$\dot{V} = 200 \angle 30^\circ$$

As impedâncias de cada elemento são dadas por:

Impedância do resistor:  $R = 20 \Omega$

Impedância do indutor:  $jX_L = j\omega L = j100 \times 0,4 = j40 \Omega$

Assim, no domínio da frequência, temos:

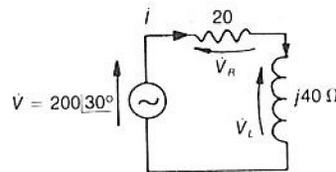


Fig. 5.20 Circuito em análise no domínio da frequência.

Aplicando a lei de Kirchoff das malhas, resulta que:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L$$

ou

$$200\angle 30^\circ = 20\dot{I} + j40\dot{I}$$

que nos fornece

$$\dot{I} = \frac{200\angle 30^\circ}{20 + j40}$$

transformando o numerador para a forma polar, obtém-se

$$\dot{I} = \frac{200\angle 30^\circ}{44,7\angle 63^\circ}$$

resultando, finalmente,

$$\dot{I} = 4,5\angle -33^\circ \quad (\text{A})$$

Então:

$$\dot{V}_R = 20\dot{I} = 90\angle -33^\circ \quad (\text{V})$$

e

$$\dot{V}_L = j40\dot{I} = j40 \times 4,5\angle -33^\circ = 40\angle 90^\circ \cdot 4,5\angle -33^\circ = 180\angle 57^\circ \quad (\text{V})$$

O diagrama de fasores correspondente está indicado na Fig. 5.21.

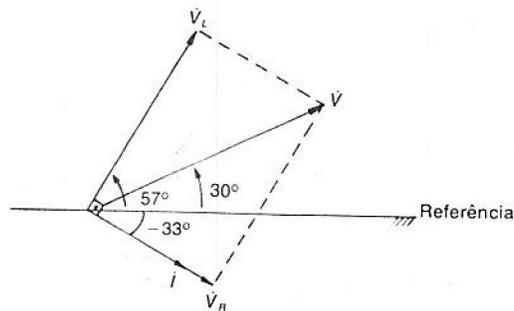


Fig. 5.21 Diagrama de fasores.

A partir da representação fasorial, podemos determinar as grandezas em função como segue:

Sendo

$$\dot{I} = 4,5\angle -33^\circ$$

temos que

$$I_m = \sqrt{2}I = \sqrt{2} \times 4,5 \text{ ou } I_m = 6,4 \text{ A}$$

$$\phi = -33^\circ$$

Logo:

$$i(t) = 6,4 \cos (100t - 33^\circ) \text{ (A)}$$

Analogamente:

$$v_R(t) = 127 \cos (100t - 33^\circ) \text{ (V)}$$

e

$$v_L(t) = 254 \cos (100t + 57^\circ) \text{ (V)}$$

### 5.9 INFLUÊNCIA DA FREQUÊNCIA NOS PARÂMETROS $R$ , $L$ e $C$

A resistência ôhmica de um condutor aumenta com a frequência em vista do efeito pelicular, ou seja, em corrente alternada a densidade de corrente em um condutor é maior junto à superfície e menor junto ao seu eixo. Mas, em frequências baixas, como é o caso das redes de distribuição domiciliares e industriais, o efeito pelicular é muito pequeno e em condutores de pequena seção transversal ele é desprezível. Em vista disso, consideraremos a resistência ôhmica independente da frequência, desde que esta seja relativamente baixa.

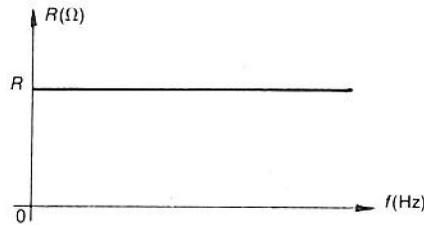


Fig. 5.22 Variação da resistência com a frequência.

Consideraremos agora a influência da frequência nas reatâncias indutiva e capacitiva.

$$\text{Reatância indutiva: } X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot fL$$

$$\text{Reatância capacitiva: } X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot fC}$$

que, representadas graficamente, resultam:

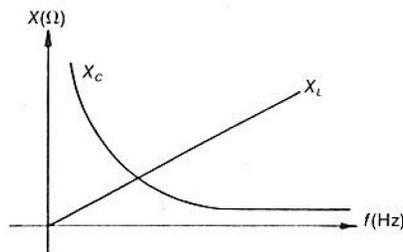


Fig. 5.23 Variação das reatâncias indutivas e capacitivas com a frequência.

## 5.10 ANÁLISE DOS CIRCUITOS RL, RC E RLC-SÉRIE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

### 5.10.1 Circuito RL

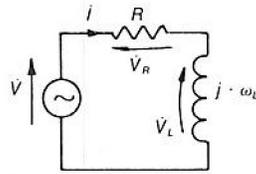


Fig. 5.24 Circuito RL-série — domínio da frequência.

Para este circuito, temos:

$$\dot{V} = R\dot{I} + j\omega \cdot L\dot{I}$$

Sendo  $\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$ , a impedância do circuito RL-série é dada por:

$$Z = R + j\omega \cdot L$$

ou

$$Z = R + jX_L$$

na forma polar, escrevemos:

$$\dot{Z} = Z \angle \psi \quad (5.88)$$

onde:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (5.89)$$

e

$$\psi = \text{arc tg} \left( \frac{X_L}{R} \right) \quad (5.90)$$

*Nota.*  $\psi$  é o ângulo de fase da impedância e fornece a defasagem entre a tensão  $V$  e a corrente  $I$ .

Em função da frequência, temos:

$$Z = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2} \quad (5.91)$$

que, representada graficamente, resulta:

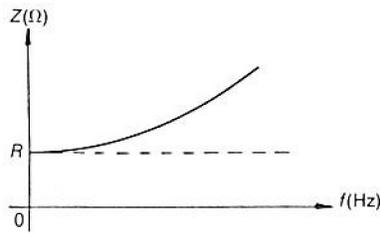


Fig. 5.25 Variação da impedância do circuito  $RL$ -série em função da frequência.

Para a defasagem, podemos escrever:

$$\psi = \text{arc tg} \left( \frac{X_L}{R} \right)$$

e, sendo,  $X_L = 2\pi \cdot fL$ , resulta:

$$\psi = \text{arc tg} \left( \frac{2\pi \cdot fL}{R} \right) \quad (5.92)$$

que, representada graficamente, resulta:

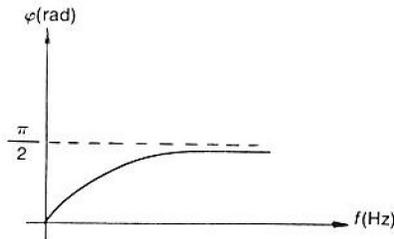


Fig. 5.26 Variação de  $\psi$  com a frequência.

### 5.10.2 Circuito $RC$ -série

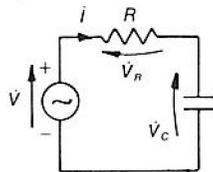


Fig. 5.27 Circuito  $RC$ -série — domínio de frequência.

Para este circuito, temos:

$$\hat{V} = R\hat{I} - j \frac{1}{\omega C} \hat{I}$$

que nos fornece

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R - j \frac{1}{\omega C}$$

ou, ainda,

$$\dot{Z} = R - jX_C \quad (5.93)$$

Na forma polar,

$$\dot{Z} = Z \angle \psi$$

onde

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (5.94)$$

e

$$\psi = \text{arc tg} \left( \frac{-X_C}{R} \right) = - \text{arc tg} \left( \frac{X_C}{R} \right) \quad (5.95)$$

Em função da frequência, resulta:

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2}} \quad (5.96)$$

e

$$\psi = - \text{arc tg} \left( \frac{1}{2\pi \cdot fC \cdot R} \right) \quad (5.97)$$

que, representada graficamente, nos fornece:

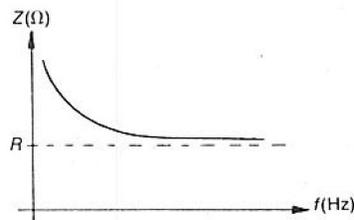


Fig. 5.28 Variação da impedância do circuito RC-série em função da frequência.

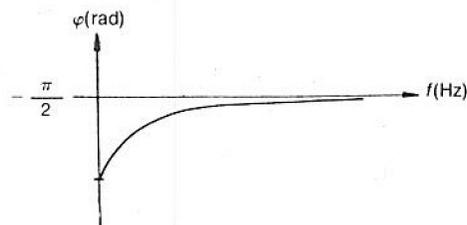


Fig. 5.29 Variação de  $\psi$  com a frequência.

### 5.10.3 Circuito RLC-série

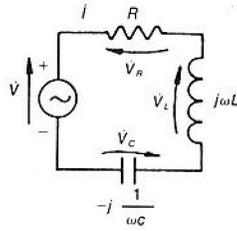


Fig. 5.30 Circuito RLC-série — domínio da frequência.

Para este circuito, temos:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C$$

ou, ainda:

$$\dot{V} = R\dot{I} + j\omega \cdot L\dot{I} - j \frac{1}{\omega C} \dot{I} \quad (5.98)$$

Sendo  $\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$ , resulta

$$\dot{Z} = R + j\omega \cdot L - j \frac{1}{\omega C}$$

ou, ainda,

$$\dot{Z} = R + j(X_L - X_C) \quad (5.99)$$

Fazendo

$$X = X_L - X_C$$

resulta

$$\dot{Z} = R + jX$$

na forma polar temos:

$$\dot{Z} = Z \underline{\psi}$$

com

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (5.100)$$

e

$$\psi = \text{arc tg} \left( \frac{X}{R} \right) = \text{arc tg} \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right) \quad (5.101)$$

É claro que

Se  $X_L > X_C$ , temos  $X > 0$  e o circuito é indutivo, com a corrente atrasada da tensão.  
Se  $X_L < X_C$ , temos  $X < 0$  e o circuito é capacitivo, com a corrente adiantada da tensão.  
Se  $X_L = X_C$ , temos  $X = 0$  e o circuito é resistivo; diz-se, neste caso, que o circuito está em ressonância.

### 5.10.3.1 CÁLCULO DA FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA

Na ressonância temos:

$$X_L = X_C$$

que nos fornece

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

resultando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e sendo  $\omega = 2\pi \cdot f_r$ , onde  $f_r$  é a frequência em que ocorre a ressonância, obtemos, finalmente:

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (5.102)$$

A relação entre a reatância indutiva  $X_L$  e a resistência ôhmica  $R$  do circuito, na frequência de ressonância, é denominada “fator de qualidade” ou “índice de mérito” do circuito na ressonância.

Assim, temos:

$$Q_0 = \frac{X_{Lr}}{R} = \frac{2\pi \cdot f_r L}{R}$$

e, substituindo  $f_r$  pelo seu valor obtido em (5.99), resulta que:

$$Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.103)$$

É claro que, na ressonância, a tensão no resistor  $V_R$  é igual à tensão aplicada ao circuito. Devido a este fato, podemos escrever:

$$V_R = R \cdot I_m = V$$

onde  $I_m$  é a corrente do circuito na ressonância.

Isto posto, resulta que:

$$V_L = X_L \cdot I_m = \frac{X_L}{R} V = Q_0 V$$

ou, ainda,

$$V_L = Q_0 V$$

$$V_C = X_C I_m = \frac{X_C}{R} V$$

ou, ainda,

$$V_C = Q_0 V$$

Portanto, sendo  $V_L = V_C$  na ressonância e somando-se ao fato que  $Q_0$  pode assumir qualquer valor, inclusive maior que a unidade, as tensões no indutor e no capacitor podem resultar bem maiores que a tensão aplicada ao circuito.

Podemos definir ainda a banda passante, ou largura de faixa do circuito, como sendo a amplitude do intervalo de frequências cujas frequências extremas são aquelas nas quais tem-se  $Z = R \sqrt{2}$ . Sejam  $f_1$  e  $f_2$  as frequências extremas da banda passante, demonstra-se que:

$$Q_0 = \frac{f_r}{f_2 - f_1} \quad (5.104)$$

$$f_r = \sqrt{f_1 \cdot f_2} \quad (5.105)$$

#### 5.10.3.2 DIAGRAMA DE FASORES PARA O CIRCUITO RLC-SÉRIE

Circuito indutivo:  $X_L > X_C$

Neste caso, temos:

$$V_L > V_C \text{ e } 0^\circ < \psi < 90^\circ$$

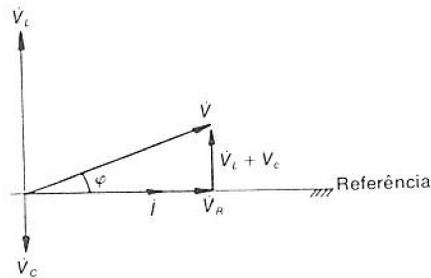


Fig. 5.31 Diagrama de fasores RLC-série ( $X_L > X_C$ ).

Circuito capacitivo:  $X_L < X_C$

Neste caso, temos:

$$V_L < V_C \text{ e } -90^\circ < \psi < 0^\circ$$

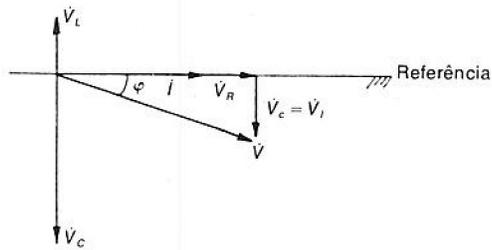


Fig. 5.32 Diagrama de fasores  $RLC$ -série ( $X_L < X_C$ ).

Circuito resistivo:  $X_L = X_C$   
 Neste caso, temos:

$$V_L = V_C \text{ e } \psi = 0^\circ$$

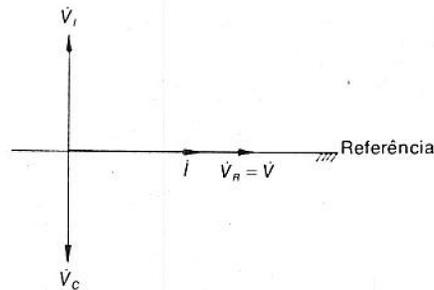


Fig. 5.33 Diagrama de fasores  $RLC$ -série ( $X_L = X_C$ ).

A influência da frequência no valor de impedância está indicada na Fig. 5.34, cujo resultado foi obtido a partir da expressão:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(2\pi \cdot fL - \frac{1}{2\pi \cdot fC}\right)^2}$$

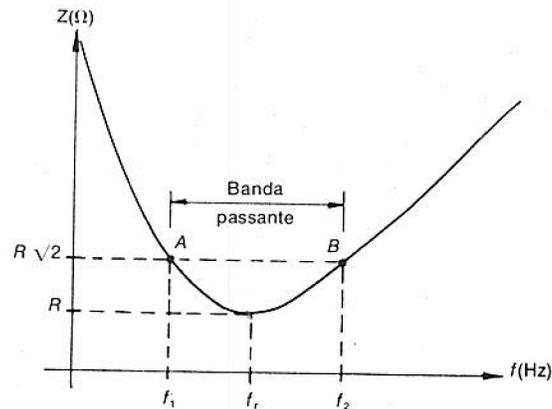


Fig. 5.34 Variação de  $Z$  com a frequência — circuito  $RLC$ -série.

Considerando agora a admitância do circuito, temos:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

ou, ainda,

$$Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi \cdot fL - \frac{1}{2\pi \cdot fC}\right)^2}}$$

que, representada graficamente, resulta:

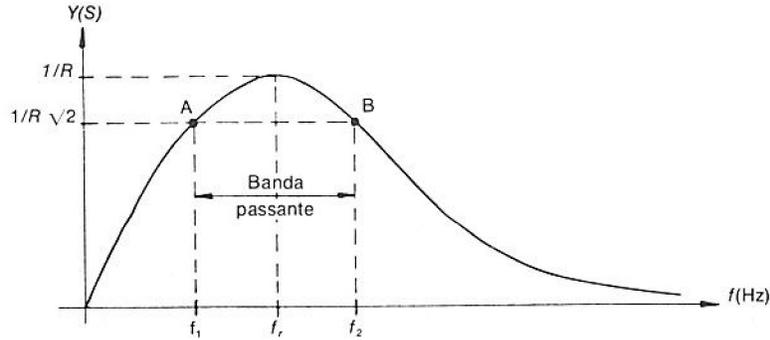


Fig. 5.35 Variação de  $Y$  com a frequência — circuito  $RLC$ -série.

A defasagem é obtida da expressão (5.98) como segue:

$$\psi = \text{arc tg} \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right)$$

ou, ainda,

$$\psi = \text{arc tg} \left( \frac{2\pi \cdot fL - \frac{1}{2\pi \cdot fC}}{R} \right) \quad (5.106)$$

que, representada graficamente, resulta:

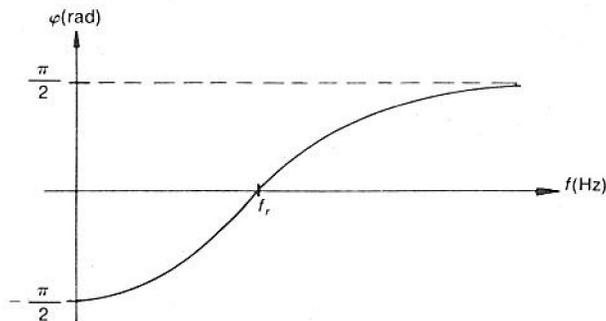


Fig. 5.36 Variação de  $\psi$  com a frequência — circuito  $RLC$ -série.

### 5.10.4 Circuito RL-paralelo

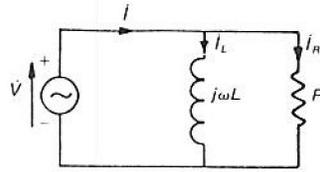


Fig. 5.37 Circuito RL-paralelo.

Da primeira lei de Kirchoff, temos:

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_R \quad (5.107)$$

que resulta:

$$\dot{i} = \frac{\dot{V}}{j\omega L} + \frac{\dot{V}}{R} \quad (5.108)$$

Portanto,

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{j\omega L R}{R + j\omega L} \quad (5.109)$$

que pode ser reescrita como segue:

$$\dot{Z} = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega L \cdot R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (5.110)$$

A admitância é dada por:

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \quad (5.111)$$

Sendo  $G = \frac{1}{R}$  a condutância, e chamando  $B_L = \frac{1}{\omega L}$  de susceptância do indutor, resulta que:

$$\dot{Y} = G - jB_L \quad (5.112)$$

É claro que  $G$  e  $B_L$  são expressos em siemens (S).  
O ângulo de fase da impedância é dado por:

$$\psi = \text{arc tg} \left( \frac{R}{\omega L} \right) \quad (5.113)$$

e da admitância:

$$\psi' = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{R}{\omega L} \right) \quad (5.114)$$

É evidente que  $\psi = -\psi'$ .

A Fig. 5.38 mostra o diagrama de fasores do circuito  $RL$ -paralelo.

O comportamento da admitância em função da frequência é obtido a partir da expressão

$$\dot{Y} = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} \quad (5.115)$$

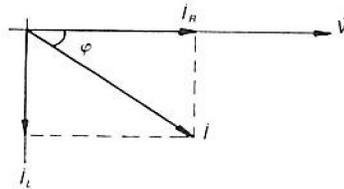


Fig. 5.38 Diagrama de fasores — circuito  $RL$ -paralelo.

que, na forma polar, resulta:

$$\dot{Y} = Y |\psi'$$

onde:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{4\pi^2 \cdot f^2 L^2}} \quad (5.116)$$

e

$$\psi' = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{R}{2\pi \cdot fL} \right) \quad (5.117)$$

que, representado graficamente, resulta:

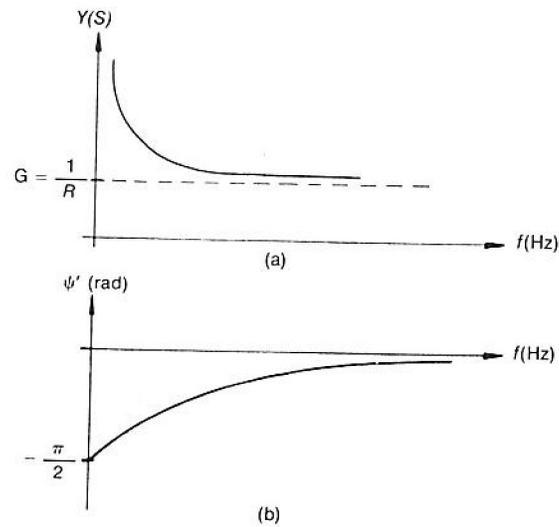


Fig. 5.39 Variação com a frequência — (a) admitância; (b) ângulo de fase de admitância.

### 5.10.5 Circuito RC-paralelo

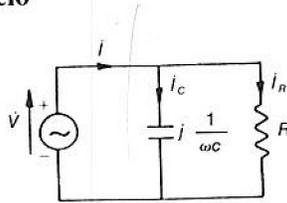


Fig. 5.40 Circuito RC-paralelo.

Da primeira lei de Kirchoff, temos:

$$i = i_C + i_R \quad (5.118)$$

que resulta:

$$i = \frac{\dot{V}}{-j \frac{1}{\omega C}} + \frac{\dot{V}}{R} \quad (5.119)$$

Portanto,

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{i} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{-j \frac{1}{\omega C}}} = \frac{1}{G + j \cdot \omega C} \quad (5.120)$$

Considerando a admitância, obtemos:

$$\dot{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{-j \frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{R} + j \cdot \omega C \quad (5.121)$$

Sendo  $G = \frac{1}{R}$  a condutância, e chamando  $B_C = 1 / \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{X_C}$  de susceptância do capacitor, podemos escrever:

$$\dot{Y} = G + j \cdot B_C \quad (5.122)$$

Na forma polar:

$$\dot{Y} = Y \angle \psi'$$

onde

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} \quad (5.123)$$

e

$$\psi' = \text{arc tg} (\omega C \cdot R) \quad (5.124)$$

que, representado graficamente, resulta:

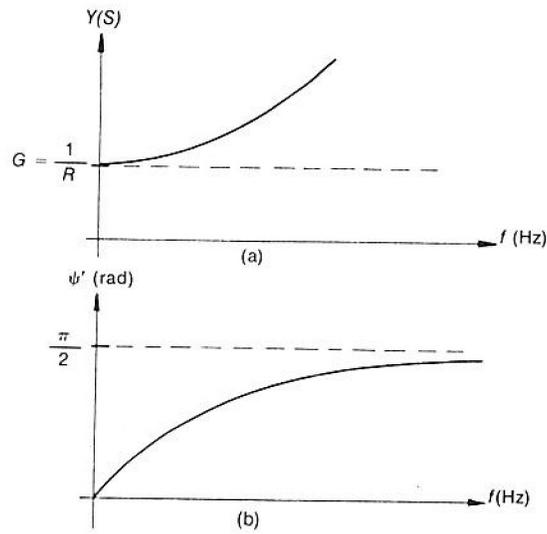


Fig. 5.41 Variação com a frequência — (a) admitância; (b) ângulo de fase da admitância

A Fig. 5.42 mostra o diagrama de fasores para o circuito  $RC$ -paralelo.

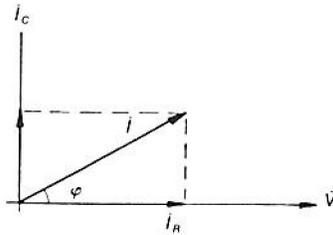


Fig. 5.42 Diagrama de fasores — circuito  $RC$ -paralelo.

### 5.10.6 Circuito RLC-paralelo

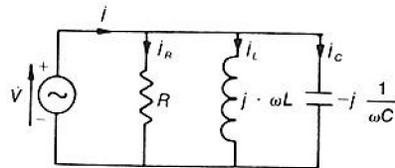


Fig. 5.43 Circuito  $RLC$ -paralelo.

Pela lei de Kirchoff das correntes:

$$\dot{i} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C \quad (5.125)$$

ou, ainda,

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R} + \frac{\dot{V}}{j \cdot \omega L} + \frac{\dot{V}}{-j \frac{1}{\omega C}} \quad (5.126)$$

resultando, para a admitância:

$$\dot{Y} = G + j \cdot B \quad (5.127)$$

onde:

$$G = \frac{1}{R} \text{ (condutância)}$$

$$B = B_C - B_L \text{ (susceptância)}$$

Na forma polar:

$$\dot{Y} = Y \angle \psi' \quad (5.128)$$

com

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} \quad (5.129)$$

e

$$\psi' = \text{arc tg } \frac{B}{G} \quad (5.130)$$

#### 5.10.6.1 CÁLCULO DA FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA

A ressonância se dá quando o circuito é puramente resistivo, para isto devemos ter:

$$B_C = B_L$$

que resulta:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

finalmente,

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

cujo resultado é idêntico ao já obtido anteriormente.

Analogamente, para o circuito  $RLC$ -paralelo definimos como fator de qualidade ou índice de mérito a relação:

$$Q_0 = \frac{R}{X_{Lr}}$$

ou, ainda,

$$Q_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

### 5.10.6.2 DIAGRAMA DE FASORES PARA O CIRCUITO RLC-PARALELO

Circuito capacitivo:  $B_C > B_L$

Neste caso, temos:

$$I_C > I_L \text{ e } 0^\circ < \psi' < 90^\circ$$

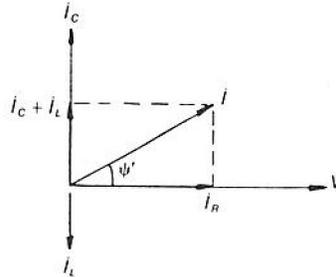


Fig. 5.44 Diagrama de fasores — circuito *RLC*-paralelo ( $B_C > B_L$ )

Circuito indutivo:  $B_C < B_L$

Neste caso, temos:

$$I_L > I_C \text{ e } -90^\circ < \psi' < 0^\circ$$

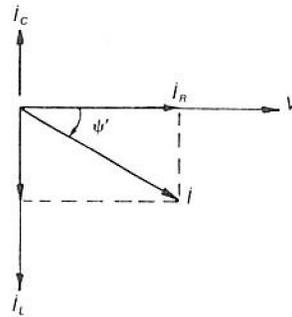


Fig. 5.45 Diagrama de fasores — circuito *RLC*-paralelo ( $B_C < B_L$ )

Circuitos resistivos (ressonância):  $B_C = B_L$

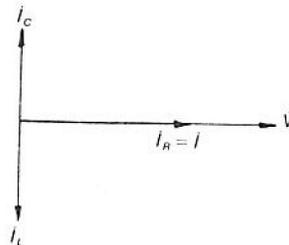


Fig. 5.46 Diagrama de fasores — circuito *RLC*-paralelo ( $B_C = B_L$ ).

A influência da frequência e no valor da admitância está indicada na Fig. 5.47, cujo resultado foi obtido a partir da expressão:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(2\pi \cdot fC - \frac{1}{2\pi \cdot fL}\right)^2}$$

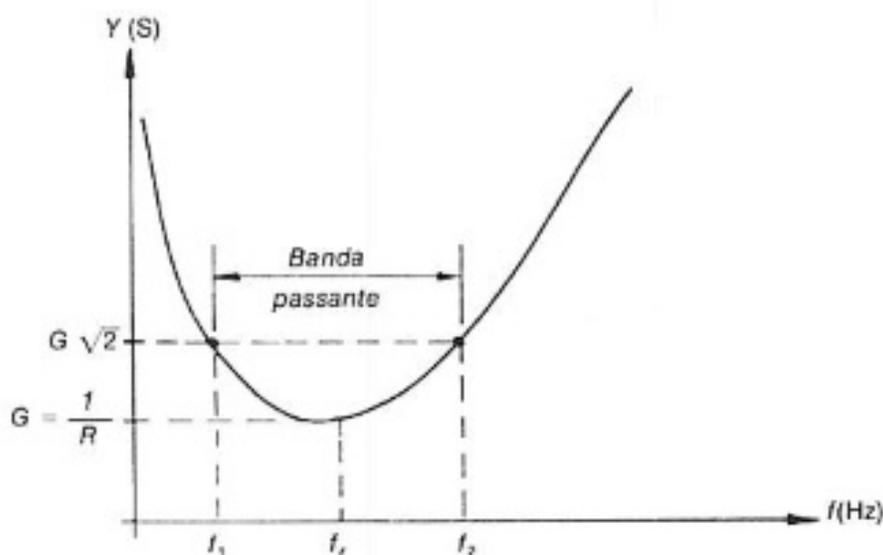


Fig. 5.47 Variação de  $Y$  com a frequência — circuito RLC-paralelo.

A influência da frequência no ângulo de fase da admitância está indicada na Fig. 5.48, cujo resultado foi obtido a partir da expressão:

$$\psi' = \text{arc tg} \left( 2\pi \cdot fRC - \frac{R}{2\pi \cdot fL} \right)$$

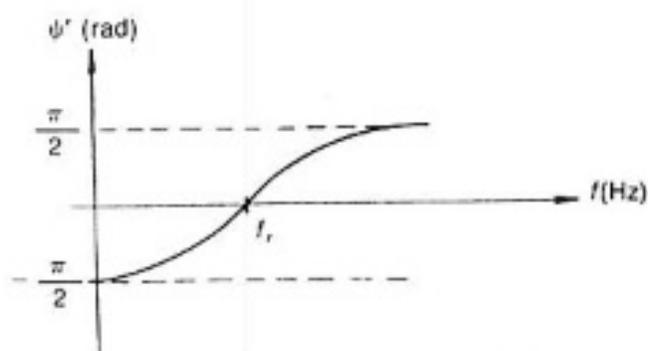


Fig. 5.48 Variação de  $\psi'$  com a frequência — circuito RLC-paralelo.