

# 4

## Métodos de Resolução dos Circuitos Elétricos

### 4.1 ANÁLISE DE MALHAS

Este método é utilizado para resolver circuitos que em princípio possuam apenas fontes de tensão. No caso de existirem também fontes de corrente, estas devem ser substituídas por fontes de tensão equivalentes antes de ser aplicado o método em questão.

A análise de malhas consiste basicamente na adoção de uma corrente para cada malha, independente do circuito. É evidente que, num ramo comum a duas malhas, a corrente resultante será a superposição das correntes características das duas malhas que admitem esse ramo em comum.

O método tem por base as leis de Kirchoff, o que mostraremos no exemplo apresentado a seguir.

Seja o circuito da Fig. 4.1, no qual as correntes nos ramos são  $i_x$ ,  $i_y$  e  $i_z$ :

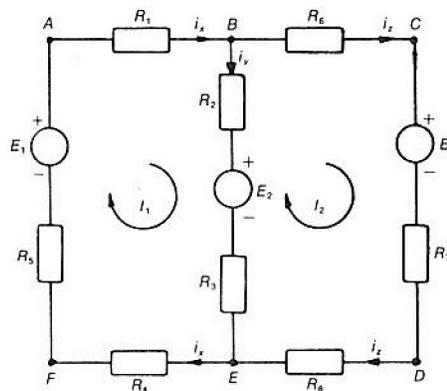


Fig. 4.1 Circuito em análise.

Para a malha  $ABEF$ , adotaremos a corrente  $I_1$  e, para a malha  $BCDE$ , a corrente adotada será  $I_2$ , ambas de mesmo sentido.

Dessa forma temos:

$$i_x = I_1; i_z = I_2 \text{ e } i_y = i_x - i_z = I_1 - I_2$$

Aplicando-se agora a lei das tensões, vem:

Malha ABEF

$$R_1 \cdot I_1 + R_2(I_1 - I_2) + E_2 + R_3(I_1 - I_2) + R_4 \cdot I_1 + R_5 \cdot I_1 - E_1 = 0$$

ou

$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_1 - (R_2 + R_3) \cdot I_2 = E_1 - E_2 \quad (4.1)$$

Malha BCDE

$$R_6 \cdot I_2 + E_3 + R_7 \cdot I_2 + R_8 \cdot I_2 - R_3(I_1 - I_2) - E_2 - R_2(I_1 - I_2) = 0$$

ou

$$-(R_2 + R_3) \cdot I_1 + (R_6 + R_7 + R_8 + R_3 + R_2) \cdot I_2 = E_2 - E_3 \quad (4.2)$$

Nas Eqs. (4.1) e (4.2), faremos:

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 &= R_{11} \text{ (soma das resistências na malha de corrente } I_1) \\ R_2 + R_3 + R_7 + R_8 + R_3 + R_2 &= R_{22} \text{ (soma das resistências na malha de corrente } I_2) \\ R_3 &= R_{12} = R_{21} \text{ (soma das resistências do ramo comum às duas malhas)} \\ E_2 &= \varepsilon_1 \text{ (soma algébrica das tensões das fontes contidas na malha de corrente } I_1) \\ E_3 &= \varepsilon_2 \text{ (soma algébrica das tensões das fontes contidas na malha de corrente } I_2). \end{aligned}$$

Devemos salientar que as parcelas (tensões) que constituem as somatórias  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são precedidas do sinal oposto ao do pólo da fonte que é atingido em primeiro lugar, quando se percorre a malha no sentido estabelecido para a sua corrente característica, isto é, possuem o sinal do pólo de saída da fonte de tensão correspondente.

Assim sendo, as Eqs. (4.1) e (4.2) tomarão os seguintes aspectos:

$$R_{11} \cdot I_1 - R_{12} \cdot I_2 = \varepsilon_1$$

e

$$-R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 = \varepsilon_2$$

ou, em forma matricial:

$$\begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

Resolvendo-se o sistema, obtêm-se as correntes nas malhas  $I_1$  e  $I_2$  e, conseqüentemente, as correntes nos ramos  $i_x$ ,  $i_y$  e  $i_z$ .

No caso geral de um sistema com  $n$  malhas independentes, com as suas correntes  $I_1, I_2, \dots, I_n$  adotadas todas no mesmo sentido, temos:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} & \dots & -R_{1n} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} & \dots & -R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ -R_{n1} & -R_{n2} & -R_{n3} & & R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ou, na forma simplificada:

$$[R] \cdot [I] = [\varepsilon] \quad (4.5)$$

onde os elementos da matriz  $[R]$  são obtidos por inspeção do circuito da seguinte forma:

*Elementos da diagonal principal*

$$R_{ii} = \text{somatória das resistências da malha } i.$$

*Elementos fora da diagonal*

$$R_{ij} = R_{ji} = \text{soma das resistências comuns às malhas } i \text{ e } j.$$

E, para a matriz  $[\varepsilon]$ , temos:

$$\varepsilon_i = \text{soma algébrica das f.e.m.'s das fontes contidas na malha } i.$$

## 4.2 ANÁLISE NODAL

Este método é em princípio utilizado apenas para os circuitos constituídos por fontes de corrente e condutâncias. Na hipótese de haver fontes de tensão, elas devem ser transformadas em fontes de corrente equivalentes. As resistências deverão ser também transformadas em condutâncias equivalentes.

O processo consiste na adoção de um dos nós do circuito como referência, determinando-se as tensões entre os demais nós e o nó de referência.

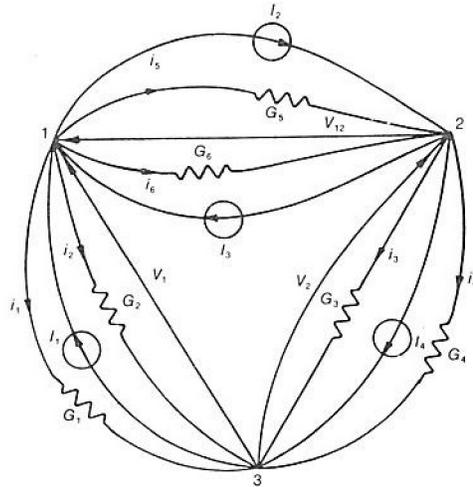


Fig. 4.2 Circuito em análise.

Tomemos como exemplo o circuito da Fig. 4.2, no qual o nó 3 é adotado como nó de referência.

Vamos agora aplicar a lei das correntes.

Para o nó (1), temos:

$$I_1 - I_2 + I_3 - i_1 - i_2 - i_5 - i_6 = 0$$

ou

$$i_1 + i_2 + i_5 + i_6 = I_1 - I_2 + I_3 \quad (4.6)$$

Mas,

$$i_1 = G_1 \cdot v_1; i_5 = G_5 \cdot v_{12} = G_5(v_1 - v_2)$$

e

$$i_2 = G_2 \cdot v_2; i_6 = G_6 \cdot v_{12} = G_6(v_1 - v_2) \quad (4.7)$$

Substituindo em (4.6), vem:

$$G_1 \cdot v_1 + G_2 \cdot v_2 + G_5(v_1 - v_2) + G_6(v_1 - v_2) = I_1 - I_2 + I_3$$

ou

$$(G_1 + G_2 + G_5 + G_6) \cdot v_1 - (G_5 + G_6) \cdot v_2 = I_1 - I_2 + I_3 \quad (4.8)$$

Para o nó (2), temos:

$$I_2 - I_3 - I_4 - i_3 - i_4 + i_5 + i_6 = 0$$

ou

$$i_3 + i_4 - i_5 - i_6 = I_2 - I_3 - I_4 \quad (4.9)$$

Por outro lado,

$$i_3 = G_3 v_2; i_5 = G_5(v_1 - v_2)$$

$$i_4 = G_4 v_2; i_6 = G_6(v_1 - v_2)$$

$$G_3 \cdot v_2 + G_4 v_2 - G_5(v_1 - v_2) - G_6(v_1 - v_2) = I_2 - I_3 - I_4$$

ou

$$-(G_5 + G_6) \cdot v_1 + (G_3 + G_4 + G_5 + G_6) \cdot v_2 = I_2 - I_3 - I_4 \quad (4.10)$$

Retomando-se as Eqs. (4.8) e (4.10) e fazendo-se:

$$G_1 + G_2 + G_5 + G_6 = G_{11} \text{ (soma das condutâncias dos ramos ligados ao nó 1)}$$

$$G_5 + G_6 = G_{12} = G_{21} \text{ (soma das condutâncias dos ramos que interligam os nós 1 e 2)}$$

$$G_3 + G_4 + G_5 + G_6 = G_{22} \text{ (soma das condutâncias dos ramos ligados ao nó 2)}$$

$$I_1 - I_2 + I_3 = J_1 \text{ (soma das correntes das fontes ligadas ao nó 1; as parcelas que chegam ao nó são precedidas do sinais [+ ] e as parcelas que saem do nó são precedidas do sinal [-]).}$$

$$I_2 - I_3 - I_4 = J_2 \quad (\text{Idem com relação ao nó 2.})$$

Assim sendo, as Eqs. (4.8) e (4.10) podem ser escritas da seguinte forma:

$$G_{11} \cdot v_1 - G_{12} \cdot v_2 = J_1$$

e

$$-G_{21} \cdot v_1 + G_{22} \cdot v_2 = J_2$$

ou da forma matricial:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Resolvendo-se esse sistema, obtêm-se as tensões  $v_1$  e  $v_2$  existentes entre os nós (1) e (2), respectivamente, e o nó de referência (3).

O método pode ser generalizado para uma rede com  $n + 1$  nós.

Tomando-se um nó como referência, teremos como incógnitas as  $n$  tensões existentes entre os demais nós e o nó de referência.

Dessa forma, teremos um sistema de ordem  $n$ :

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \dots & G_{1n} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} & \dots & G_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ -G_{n1} & -G_{n2} & -G_{n3} & & G_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ J_n \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

ou

$$[G][V] = [J] \quad (4.13)$$

onde os elementos da matriz  $[G]$  são obtidos por inspeção do circuito da seguinte forma:

*Elementos da diagonal principal*

$G_{ii}$  = somatória das condutâncias dos ramos ligados ao nó  $i$ .

*Elementos fora da diagonal*

$G_{ij} = G_{ji}$  = soma das condutâncias dos ramos que interligam diretamente os nós  $i$  e  $j$ .

E, para a matriz  $[J]$ , temos:

$J_i$  = soma algébrica das correntes das fontes que atingem os nós.

### 4.3 PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

Para as redes lineares, é válido o princípio da superposição, que estabelece o seguinte: "a resposta (corrente ou tensão) em qualquer trecho de um circuito linear

que possui mais de uma fonte independente, de corrente ou tensão ou ainda de ambos os tipos, pode ser obtida somando-se algebricamente as respostas nesses ramos produzidas pela ação de cada uma das fontes atuando sozinha, isto é, estando as demais fontes desativadas”.

Para desativarmos uma fonte de tensão, basta substituí-la por um curto-circuito e, no caso de uma fonte de corrente, por um circuito aberto.

Seja o circuito da Fig. 4.3, onde vamos calcular a corrente  $i_x$  e a tensão  $v_x$  na resistência  $R_2$ , utilizando o princípio da superposição.

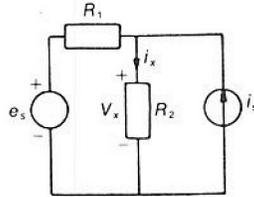


Fig. 4.3 Circuito em análise.

Consideremos inicialmente a fonte de tensão atuando independentemente da fonte de corrente, ou seja, esta última é substituída por um circuito aberto (Fig. 4.4).

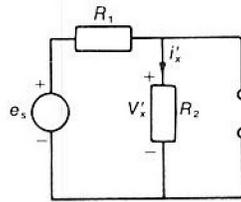


Fig. 4.4

Neste caso, a corrente e a tensão em  $R_2$  valem, respectivamente,  $i'_x$  e  $v'_x$ .

$$\text{Portanto: } i'_x = \frac{e_s}{R_1 + R_2} \quad \text{e} \quad v'_x = R_2 \cdot i'_x = \frac{R_2 \cdot e_s}{R_1 + R_2}$$

Vamos agora fazer a análise do circuito supondo apenas a ação da fonte de corrente, isto é, a fonte de tensão será substituída por um curto-circuito.

Nesta situação, a corrente em  $R_2$  será  $i''_x$  e a tensão,  $v''_x$  (Fig. 4.5).

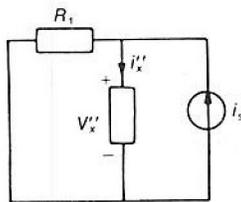


Fig. 4.5

Logo, temos:

$$i_x'' = \frac{R_1 \cdot i_s}{R_1 + R_2},$$

daí:

$$v_x'' = R_2 \cdot i_x'' = \frac{R_2 \cdot R_1 \cdot i_s}{R_1 + R_2}$$

Assim sendo, a corrente e a tensão resultante em  $R_2$  serão, respectivamente:

$$i_x = i_x' + i_x'' = \frac{e_s}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 \cdot i_s}{R_1 + R_2} \quad \text{ou} \quad i_x = \frac{e_s + R_1 \cdot i_s}{R_1 + R_2} \quad (4.14)$$

$$v_x = v_x' + v_x'' = \frac{R_2 \cdot e_s}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot i_s}{R_1 + R_2} \quad \text{ou} \quad v_x = \frac{R_2 \cdot (e_s + R_1 \cdot i_s)}{R_1 + R_2} \quad (4.15)$$

Para confirmarmos o resultado obtido, vamos repetir o cálculo por um outro processo. Inicialmente, substituiremos no circuito original da Fig. 4.3 a fonte de corrente por uma fonte de tensão equivalente, obtendo o circuito representado na Fig. 4.6.

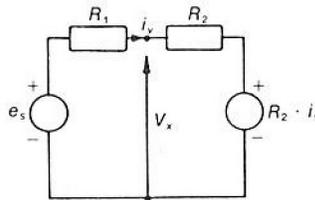


Fig. 4.6

Logo:  $i_y = \frac{e_s - R_2 \cdot i_s}{R_1 + R_2}$

donde:

$$v_x = e_s - R_1 \cdot i_y = e_s - R_1 \left( \frac{e_s - R_2 \cdot i_s}{R_1 + R_2} \right)$$

portanto:

$$v_x = \frac{R_2 \cdot (e_s + R_1 \cdot i_s)}{R_1 + R_2} \quad (4.16)$$

conseqüentemente:

$$i_x = \frac{v_x}{R_2} = \frac{e_s + R_1 \cdot i_s}{R_1 + R_2} \quad (4.17)$$

Os resultados assim obtidos confirmam aqueles encontrados aplicando-se a superposição.

#### 4.4 TEOREMAS DE THÉVENIN

Considerando uma rede linear qualquer, suponhamos essa rede dividida em duas partes,  $A$  e  $B$ , ligadas entre si por meio de condutores de resistência desprezível (Fig. 4.7).

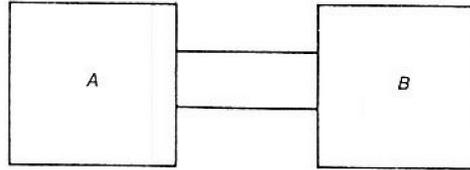


Fig. 4.7 Rede em análise.

Admitindo-se que pelo menos uma dessas partes,  $A$ , por exemplo, possua no mínimo uma fonte independente de tensão ou de corrente, de acordo com o teorema de Thévenin essa parte poderá ser substituída por uma única fonte ideal de tensão em série com um resistor.

O conjunto constituído pela fonte ideal de tensão  $V_{th}$  em série com o resistor de resistência  $R_{th}$  denomina-se Thévenin equivalente — à parte que está sendo substituída (no caso, a parte  $A$ ) (Fig. 4.8).

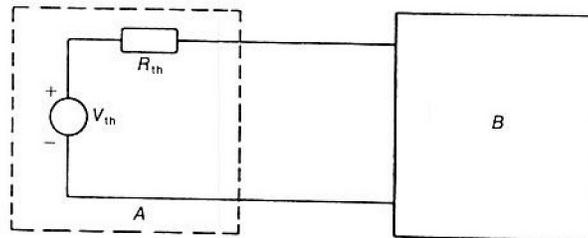


Fig. 4.8 Gerador de Thévenin.

Consideraremos agora a parte  $A$  isolada da parte  $B$  (Fig. 4.9).

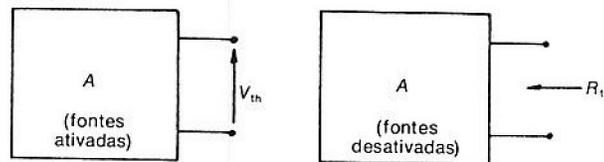


Fig. 4.9 Cálculo do Thévenin equivalente.

A tensão  $V_{th}$  é aquela medida entre os terminais da parte  $A$  quando esta está isolada. Por outro lado, a resistência  $R_{th}$  é aquela medida entre os terminais da parte  $A$ , desligada da parte  $B$  e com suas fontes desativadas, ou seja, fontes de tensão

substituídas por curto-circuitos e fontes de corrente, por circuitos abertos.

Vamos considerar como exemplo a rede da Fig. 4.10, na qual queremos calcular a corrente que passa pela resistência  $R$ .

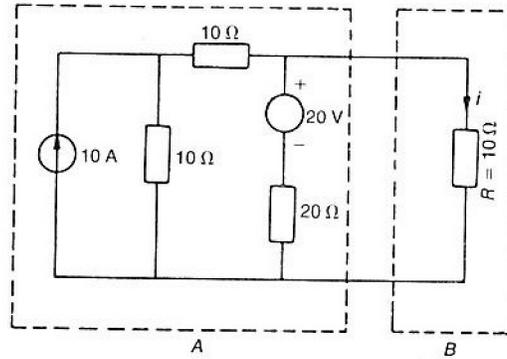


Fig. 4.10 Cálculo do Thévenin equivalente.

Vamos dividir essa rede em duas partes, onde a parte  $B$  será o resistor de resistência  $R$  e o restante constituirá a parte  $A$ , que será substituída por um gerador de Thévenin equivalente.

Isolamos a parte  $A$  da parte  $B$  e desativamos as suas fontes para calcular o valor de  $R_{th}$  (Fig. 4.11).

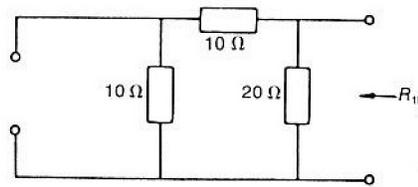


Fig. 4.11 Parte  $A$  desativada.

$$R_{th} = \frac{(10 + 10) \times 20}{(10 + 10) + 20} = 10 \Omega$$

Consideremos ainda a parte  $A$  isolada da parte  $B$ , mas agora com as suas fontes operantes, e calculemos a tensão  $V_{th}$  (Fig. 4.12).

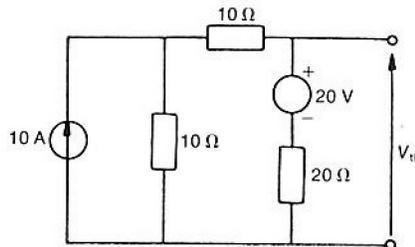


Fig. 4.12 Parte  $A$  — fontes ativas.

Substituindo a fonte de corrente por uma fonte de tensão equivalente, vem:

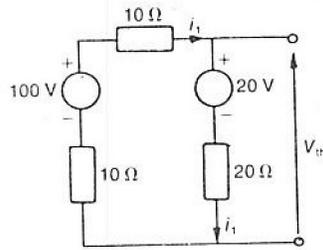


Fig. 4.13

$$i_1 = \frac{100 - 20}{10 + 10 + 20} = 2 \text{ A}$$

donde:

$$V_{th} = 20 + 20 \cdot i_1 = 20 + 20 \times 2 = 60 \text{ V}$$

Assim, o gerador de Thévenin equivalente à parte A será:

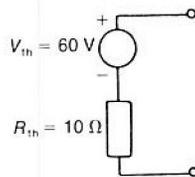


Fig. 4.14

Para calcularmos a corrente  $i$  em  $R$  é suficiente ligar essa resistência ao gerador de Thévenin (Fig. 4.15).

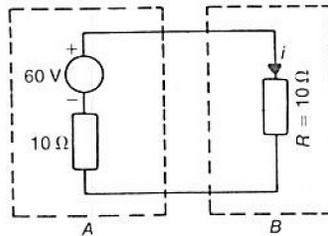


Fig. 4.15 Resistência ligada ao equivalente de Thévenin.

Dessa forma:

$$i = \frac{60}{10 + 10} = 3 \text{ A}$$

“Deve-se ressaltar que a obtenção do Thévenin visto por dois pontos quaisquer é equivalente ao cálculo da fonte de tensão equivalente vista por estes pontos.”

#### 4.5 TEOREMA DE NORTON

O teorema de Norton afirma que uma parte de uma rede linear que possua pelo menos uma fonte de tensão ou corrente (no caso, a parte *A* da Fig. 4.7) pode ser substituída por uma única fonte ideal de corrente em paralelo com um resistor.

Essa fonte de corrente  $I_N$  em paralelo com o resistor de resistência  $R_N$  constitui um gerador de Norton equivalente à parte da rede que está sendo substituída (Fig. 4.16).

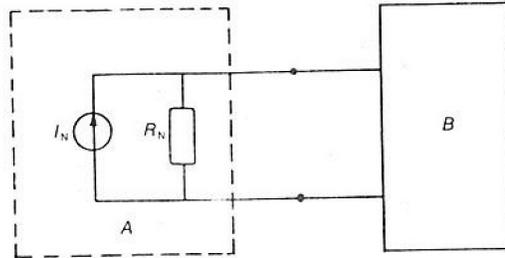


Fig. 4.16 Gerador de Norton.

A resistência  $R_N$  é calculada da mesma forma que a resistência  $R_{th}$  do Thévenin, logo  $R_N = R_{th}$ . A corrente  $I_N$  é a corrente de curto-circuito nos terminais da parte a ser substituída (no caso, a parte *A*), estando a mesma isolada da outra parte (Fig. 4.17).

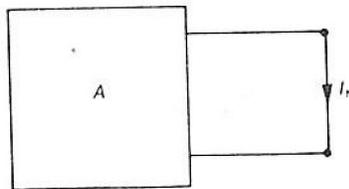


Fig. 4.17 Fontes ativadas.

Retomemos o exemplo anterior e determinemos o gerador de Norton equivalente à parte *A* da rede.

Como já sabemos,  $R_N = R_{th} = 10 \Omega$ .

Colocando-se os terminais da parte considerada em curto-circuito (Fig. 4.18), vem:

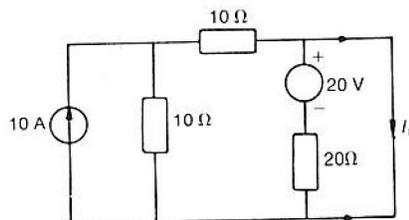


Fig. 4.18 Circuito em curto.

ou

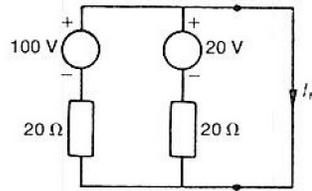


Fig. 4.19

Ou, ainda, transformando-se as fontes em suas equivalentes fontes de correntes:

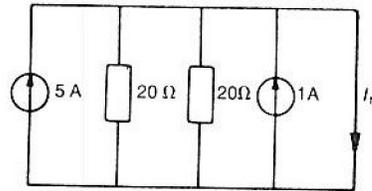


Fig. 4.20

Assim sendo, o gerador de Norton equivalente será:

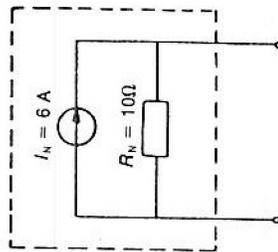


Fig. 4.21 Gerador de Norton.

Finalmente, poderemos obter a corrente  $i$  em  $R$  através do Norton equivalente.

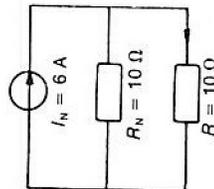


Fig. 4.22

Como  $R = R_N$ , conclui-se que:

$$i = \frac{I_N}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ A.}$$

Os geradores de Thévenin e de Norton equivalentes a uma mesma rede são equivalentes entre si. Portanto, um poderá ser obtido a partir do outro por uma simples equivalência entre fonte de tensão e fonte de corrente (Fig. 4.23).

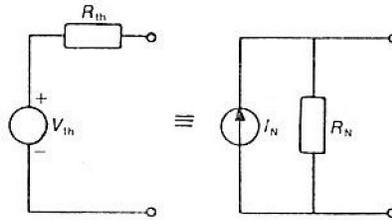


Fig. 4.23 Equivalência entre geradores de Thévenin e de Norton.

Dessa forma, podemos escrever:

$$R_N = R_{th} \text{ e } V_{th} = R_N \cdot I_N = R_{th} \cdot I_N \quad \text{ou} \quad I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$$

No exemplo anterior poderíamos ter obtido diretamente o gerador de Norton do gerador de Thévenin, como mostraremos a seguir.

$$R_N = R_{th} = 10$$

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{60}{10} = 6 \text{ A}$$

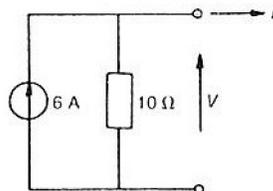


Fig. 4.24 Norton equivalente.

O referencial de corrente no gerador de Norton obedece ao mesmo sentido que o referencial de tensão no gerador de Thévenin que lhe deu origem.

De forma análoga, poderíamos obter o gerador de Thévenin a partir do gerador de Norton.