2.6 RESISTOR

O resistor é um bipolo passivo cuja função característica é dada por:

$$i = \frac{1}{R} v \tag{2.8}$$

onde R é denominada *resistência* do resistor. Na maioria das situações consideraremos o valor de R constante, independente de qualquer outra grandeza (por exemplo, temperatura).

Define-se ainda a condutância do resistor (G) como sendo o inverso de sua resistência, ou seja:

$$G = \frac{1}{R} \tag{2.9}$$

R em ohms (Ω)
G em Siemens (S)

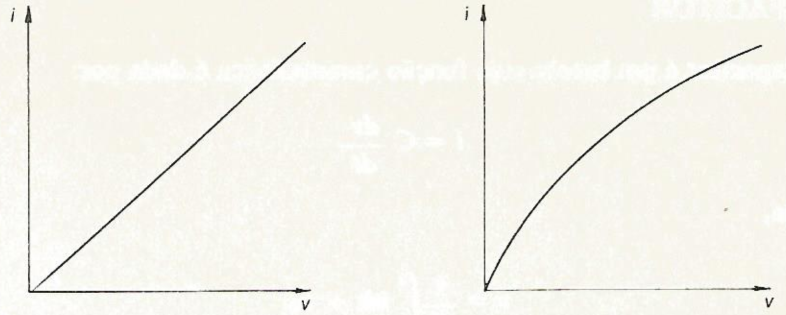
Fig. 2.9 Símbolos de um resistor.

Na Fig. 2.10*a* está representada a curva característica de um resistor linear (R = cte), e na Fig. 2.10*b*, a de um resistor não-linear.

Na Fig. 2.10*a* o inverso do coeficiente angular da reta é numericamente igual à resistência R do resistor.

A potência elétrica instantânea dissipada será:

$$p = v \cdot i, \quad \text{mas} \quad v = R \cdot i = \frac{I}{G}$$



(a) Linear ou ôhmico (b) Não-linear

Fig. 2.10 Curvas características de um resistor.

logo:

$$p = v \cdot i = R \cdot i^2 = \frac{v^2}{R} = \frac{i^2}{G} \tag{2.10}$$

2.7 INDUTOR

O indutor é um bipolo cuja função característica é dada por:

$$v = L \frac{di}{dt} \tag{2.11}$$

ou, ainda,

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t v dt + i_0 \tag{2.12}$$

i_0 = corrente no indutor no instante $t = 0$.

Desta forma, o indutor fica caracterizado por sua indutância L, medida em henry (H) no Sistema Internacional.

Sua representação gráfica é apresentada na Fig. 2.11.

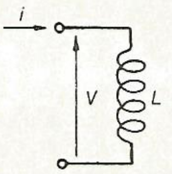


Fig. 2.11 Representação do indutor.

A energia armazenada em um indutor no instante em que sua corrente é i é dada por:

$$W = \int_{t_0}^{t} vidt = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2} Li^2 \tag{2.12a}$$

2.8 CAPACITOR

O capacitor é um bipolo cuja função característica é dada por:

$$i = C \frac{dv}{dt} \qquad (2.13)$$

ou, ainda,

$$v = \frac{1}{C}\int_0^t idt + v_0 \qquad (2.14)$$

v_0 = tensão no capacitor no instante $t = 0$.

Desta forma, o capacitor fica caracterizado por sua capacitância C, medida em Farad (F) no Sistema Internacional.

É usual utilizarem-se submúltiplos desta unidade, tais como:

1 mF = 10^{-3} F (milifarad)
1 μF = 10^{-6} F (microfarad)
1 nF = 10^{-9} F (nanofarad)
1 pF = 10^{-12} F (picofarad)

Sua representação gráfica é dada na Fig. 2.12.

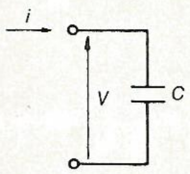


Fig. 2.12 Representação do capacitor.

A energia elétrica armazenada no capacitor no instante em que a sua tensão é v será:

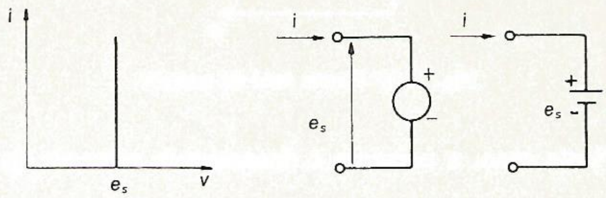
$$W = \int_{t_0}^{t} p \cdot dt = \int_{t_0}^{t} vidt = \int_{t_0}^{t} v \cdot C \frac{dv}{dt} \cdot dt$$

ou

$$W = \int_0^v Cv \cdot dv = \frac{1}{2} Cv^2 \qquad (2.15)$$

2.9 FONTES IDEAIS DE TENSÃO E DE CORRENTE

Fonte ideal de tensão ou gerador ideal de tensão é aquele cuja tensão e_S em seus terminais não depende da corrente. A tensão e_S, também denominada força eletromotriz da fonte, poderá ser uma função do tempo. A curva característica de uma fonte ideal de tensão está representada na Fig. 2.13*a* e as alternativas para a representação esquemática da fonte são apresentadas na Fig. 2.13*b*.

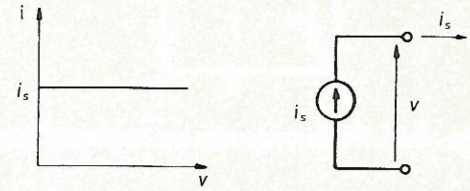


(a) Curva característica (b) Representações possíveis

Fig. 2.13 Fonte ideal de tensão.

Fonte ideal de corrente ou gerador ideal de corrente é aquele que fornece uma corrente constante em seus terminais independente da tensão.

Sua curva característica e sua representação gráfica estão apresentadas na Fig. 2.14.



(a) Curva característica (b) Representação

Fig. 2.14 Fonte ideal de corrente.

2.10 FONTE REAL DE TENSÃO

A fonte de tensão real possui uma resistência interna r e pode ser considerada como sendo associação de uma fonte ideal de tensão em série com essa resistência (Fig. 2.15).

Na resistência interna da fonte teremos uma queda de tensão $v_r = R \cdot i$.

Dessa forma, a tensão entre os terminais A e B, ou seja, a tensão de saída da fonte, será:

$$v = e_S - v_r \quad \text{ou} \quad v = e_S - R \cdot i \tag{2.16}$$

A expressão (2.16) representa a equação característica da fonte real de tensão, onde e_S é a força eletromotriz.

Quando $i = 0$, ou seja, a fonte está em vazio, a tensão em seus terminais será igual à sua força eletromotriz, também denominada tensão em vazio, $v = e_S$.

Se os terminais são colocados em curto-circuito (Fig. 2.16), a tensão será nula,

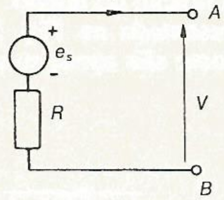


Fig. 2.15 Fonte real de tensão.

assim $v = 0$. Neste caso, a corrente é denominada corrente de curto-circuito, valendo:

$$0 = e_S - Ri_{cc} \tag{2.17}$$

$$i_{cc} = \frac{e_S}{R} \ (p/v = 0) \tag{2.18}$$

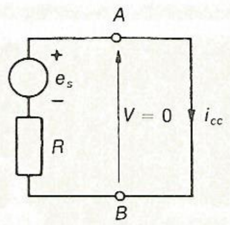


Fig. 2.16 Fonte de tensão em curto-circuito.

Na Fig. 2.17 apresentamos a curva característica da fonte real de tensão. A potência útil fornecida pela fonte é dada por:

$$p = v \cdot i \tag{2.19}$$

Sendo $v = e_S - R \cdot i$, então,

$$p = e_S \cdot i - R \cdot i^2 \tag{2.20}$$

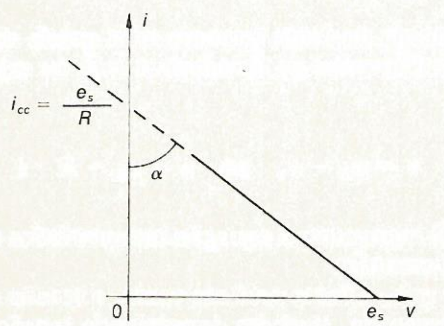


Fig. 2.17 Curva característica da fonte real de tensão.

Analisando a expressão (2.20), verifica-se que a potência é nula em duas situações:

$$p = 0, \text{ então } e_S \cdot i - R \cdot i^2 = 0 \quad \text{ou} \quad i \cdot (e_S - R \cdot i) = 0$$

donde:

$$i = 0 \text{ (fonte em vazio)}$$

ou

$$e_S - R \cdot i = 0 \qquad (2.21)$$

Logo $i = \dfrac{e_S}{R} = i_{cc}$ (fonte em curto-circuito)

Assim, a fonte não fornece potência quando estiver em vazio ou quando em curto-circuito.

Vamos agora determinar qual a máxima potência que a fonte pode fornecer. Derivando-se a potência em relação à corrente e igualando-se essa derivada a zero, obtém-se a corrente correspondente à potência máxima.

Assim:

$$\frac{dp}{di} = e_S - 2R \cdot i = 0.$$

Donde:

$$i = \frac{e_S}{2R} = \frac{i_{cc}}{2} \qquad (2.22)$$

Em resumo, a potência fornecida será máxima quando a corrente for a metade da sua corrente de curto-circuito.

Substituindo (2.22) em (2.20) e (2.16), respectivamente, obtemos a máxima potência que pode ser fornecida pela fonte e a tensão quando está fornecendo esta potência. Assim:

$$P_{máx} = e_S \cdot \frac{e_S}{2R} - r\left(\frac{e_S}{2R}\right)^2 \text{ ou } P_{máx} = \frac{e_S^2}{4R} \qquad (2.23)$$

e

$$v = e_S - R \cdot \left(\frac{e_S}{2r}\right) \quad \text{ou} \quad v = \frac{e_S}{2} \qquad (2.24)$$

Representando a expressão (2.20) em um diagrama cartesiano, obtemos a curva de potência da fonte (Fig. 2.18).

Da relação (2.20), temos que:

$$Pg = e_S i\text{: potência elétrica gerada} \qquad (2.25)$$

e, ainda:

$$Pd = Ri^2\text{: potência dissipada} \qquad (2.26)$$

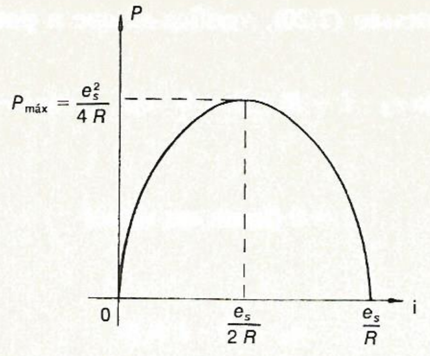


Fig. 2.18 Curva de potência da fonte.

Assim, definimos rendimento elétrico da fonte como sendo a relação entre a potência útil e a potência elétrica gerada; deste modo, ficamos com:

$$\eta = \frac{P}{Pg} = \frac{vi}{e_S i} = \frac{v}{e_S} \tag{2.27}$$

Substituindo (2.16) em (2.27), resulta:

$$\eta = \frac{e_S - Ri}{e_S} = 1 - \frac{R}{e_S} i \tag{2.28}$$

Na Fig. (2.19) está representado o rendimento da fonte em função da corrente. Deve-se ressaltar que o rendimento não é definido para fonte em vazio ($i = 0$). Por outro lado, o rendimento é nulo na situação de curto-circuito ($v = 0$).

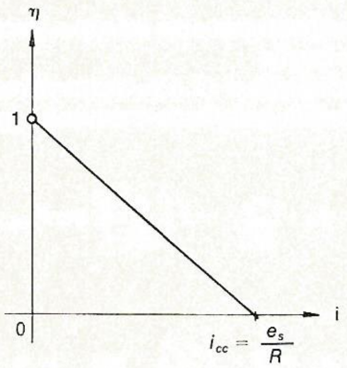


Fig. 2.19 Rendimento em função da corrente.

O rendimento da fonte quando ela está fornecendo a máxima potência será:

$$\eta = \frac{v}{e_S}, \text{ mas, em vista de (2.24), } v = \frac{e_S}{2}, \text{ donde}$$

$$\eta = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ ou } 50\% \tag{2.29}$$

Ao colocarmos um resistor R' nos terminais da fonte (Fig. 2.20), a corrente é dada por:

$$i = \frac{v}{R'} \tag{2.30}$$

mas, de (2.16), temos que:

$$i = \frac{e_S - v}{R} \tag{2.31}$$

Como sabemos, o rendimento do gerador é dado por:

$$\eta = \frac{v}{e_S} \tag{2.32}$$

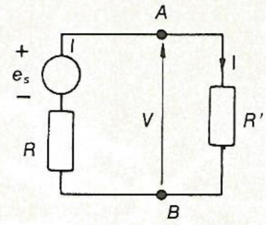


Fig. 2.20 Fonte de tensão alimentando um resistor.

Igualando as expressões (2.30) e (2.31), obtemos:

$$\frac{v}{R'} = \frac{e_S - v}{R} \tag{2.33}$$

que resulta,

$$v = \frac{R' \, e_S}{R' + R} \tag{2.34}$$

Substituindo (2.34) em (2.32), obtemos:

$$\eta = \frac{R'}{R + R'} \tag{2.35}$$

A tensão v e a corrente i também podem ser obtidas graficamente. Traçando-se em um mesmo diagrama cartesiano as curvas características do gerador e do resistor, elas se interceptarão em um ponto P (Fig. 2.21), denominado ponto de operação, cujas coordenadas são a tensão e a corrente desejada.

Se o resistor for não-linear, procede-se de forma análoga (Fig. 2.22).

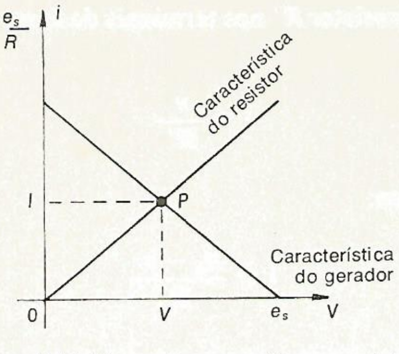


Fig. 2.21 Ponto de operação no resistor.

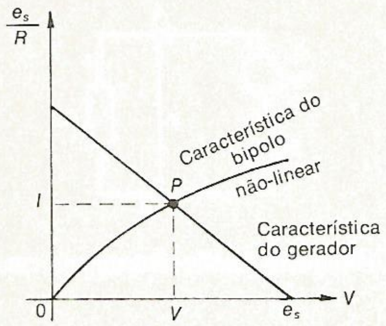


Fig. 2.22 Ponto de operação em bipolo não-linear.

Sabemos que, quando o gerador está fornecendo a máxima potência, o seu rendimento é 0,5 ou 50%; introduzindo esse valor na expressão (2.35), obtemos:

$$\frac{R'}{R + R'} = 0{,}5$$

donde:

$$R = R' \tag{2.36}$$

Concluímos então que um gerador fornece a máxima potência quando a resistência de carga é igual à sua resistência interna.

Para finalizar, vamos representar a tensão no gerador, o seu rendimento e a potência por ele fornecida em função da sua resistência de carga R (Fig. 2.23a, b, c).

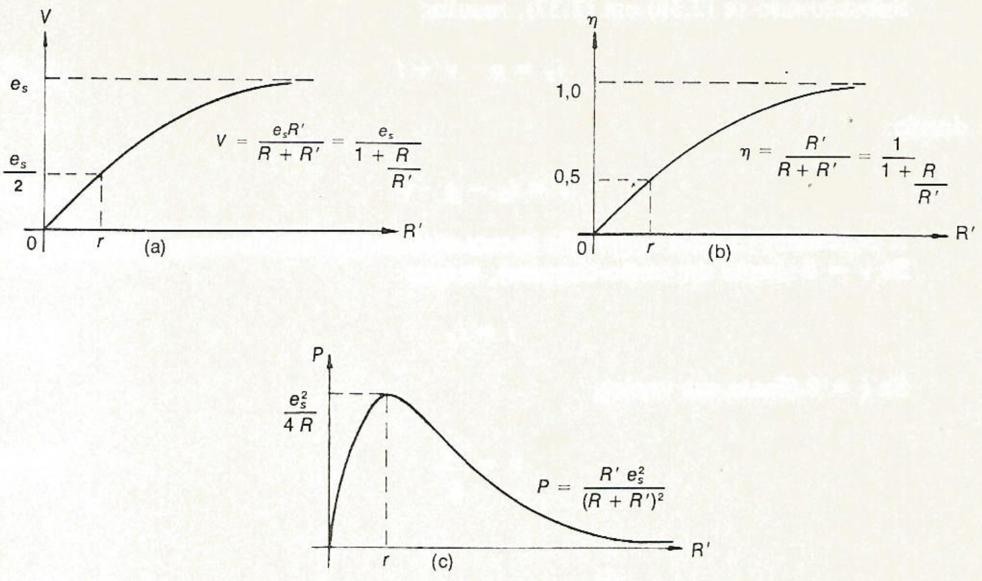


Fig. 2.23 Fonte real de tensão.
(a) Tensão em função de resistência de carga
(b) Rendimento em função da resistência de carga
(c) Potência útil em função da resistência de carga

2.11 FONTE REAL DE CORRENTE

A fonte real de corrente pode ser considerada como sendo a associação em paralelo de uma fonte ideal de corrente com uma resistência r ou condutância $g = \frac{1}{r}$, denominada resistência interna ou condutância interna da fonte (Fig. 2.24).

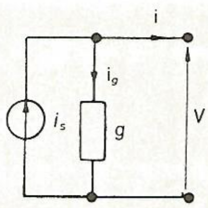


Fig. 2.24 Fonte real de corrente.

Considerando as correntes da Fig. 2.24, podemos escrever:

$$i_S = i_g + i \tag{2.37}$$

Sendo:

$$i_g = g \cdot v \tag{2.38}$$

Substituindo-se (2.38) em (2.37), resulta:

$$i_S = g \cdot v + i \tag{2.39}$$

donde:

$$i = i_S - g \cdot v \tag{2.40}$$

A expressão (2.40) é a equação característica da fonte de corrente (Fig. 2.25). Se $v = 0$ (fonte em curto-circuito), temos

$$i = i_S \tag{2.41}$$

Se $i = 0$ (fonte em vazio),

$$v = \frac{i_S}{g} \tag{2.42}$$

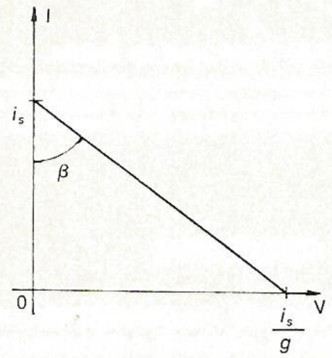


Fig. 2.25 Curva característica da fonte real de corrente.

A potência útil fornecida pela referida fonte vale:

$$p = v \cdot i = v\,(i_S - gv) \tag{2.43}$$

ou

$$p = v \cdot i_S - g \cdot v^2 \tag{2.44}$$

Da relação (2.44), temos que:

$$P_G = v \cdot i_S\text{: potência elétrica gerada} \tag{2.45}$$

e, ainda,

$$P_d = gv^2\text{: potência dissipada} \tag{2.46}$$

Para determinar a máxima potência da fonte real de corrente, basta derivar a potência útil (2.44) em relação à tensão e igualar a zero, donde se obtém a tensão correspondente à situação de máxima potência.

Deste modo,

$$\frac{dp}{dv} = i_S - 2g \cdot v = 0 \tag{2.47}$$

ou

$$v = \frac{i_S}{2g} \tag{2.48}$$

Substituindo-se (2.48) em (2.44), obtém-se a potência máxima, como segue:

$$P_{máx} = \frac{i_S^2}{4g} \tag{2.49}$$

O gráfico da potência em função da tensão está representado na Fig. 2.26. Verifica-se que a potência é nula quando $v = 0$ (fonte em curto-circuito) ou quando $v = \frac{i_S}{g}$ (fonte em vazio).

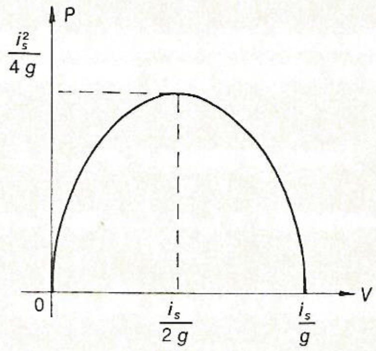


Fig. 2.26 Potência em função da tensão.

O rendimento da fonte real de corrente é dado por:

$$\eta = \frac{P_u}{P_g} = \frac{v \cdot i}{v \cdot i_S} \tag{2.50}$$

logo:

$$\eta = \frac{i}{i_S} \tag{2.51}$$

Substituindo-se (2.40) em (2.51), vem:

$$\eta = \frac{i_S - g \cdot v}{i_S} \tag{2.52}$$

ou

$$\eta = 1 - g\,\frac{v}{i_S} \qquad (2.53)$$

2.12 EQUIVALÊNCIA ENTRE FONTES

Sejam as fontes de tensão e corrente representadas na Fig. 2.27.

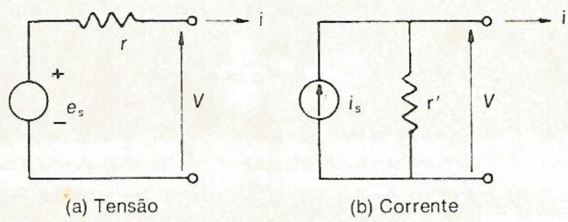


Fig. 2.27 Fontes.

A condição necessária e suficiente para que as fontes das Figs. 2.27*a* e 2.27*b* sejam equivalentes é que as relações entre tensão e corrente em seus terminais sejam iguais. Assim:

$$\text{Fonte de tensão } v = e_S - ri \qquad (2.54)$$

$$\text{Fonte de corrente } i = i_S - \frac{1}{r'}v \text{ ou } v = i_S r' - r'i \qquad (2.55)$$

Identificando as expressões (2.54) e (2.55), temos:

$$r = r' \qquad (2.56)$$

$$e_S = i_S \cdot r' \qquad (2.57)$$

As expressões (2.56) e (2.57) serão em tudo quanto se segue as *condições de equivalência* entre uma fonte real de tensão e uma fonte real de corrente.

Exemplo 2.1

Dada a fonte de tensão da Fig. 2.28, transformá-la em uma fonte de corrente equivalente.

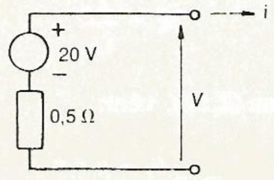


Fig. 2.28 Circuito do Ex. 2.1.

Das condições de equivalência:

$$r' = r = 0{,}5\ \Omega$$

donde:

$$g = \frac{1}{r'} = 2\ \text{S (siemens)}$$

$$i_S = \frac{e_S}{r} = \frac{20}{0{,}5} = 40\ \text{A}$$

Assim, a fonte de corrente equivalente é a apresentada na Fig. 2.29.

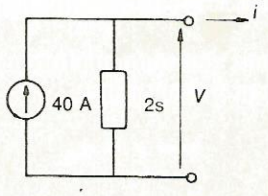


Fig. 2.29 Fonte de corrente equivalente.

Exemplo 2.2

Dada a fonte de corrente (Fig. 2.30), transformá-la em uma fonte de tensão equivalente.

$$g = 0{,}02\ \text{siemens}$$

Das condições de equivalência, temos

$$r = r' = \frac{1}{g} = \frac{1}{0{,}02} = 50\ \Omega$$

$$e_S = r' \cdot i_S = 50 \times 10 = 500\ \text{V}$$

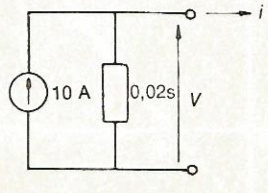


Fig. 2.30 Circuito do Ex. 2.2.

Dessa forma, a fonte de tensão equivalente é a dada na Fig. 2.31.

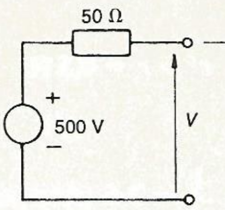


Fig. 2.31 Fonte de tensão equivalente.

2.13 RECEPTOR ATIVO OU MOTOR

O receptor ativo ou motor é um bipolo que consome energia elétrica do circuito e a transforma em outra forma de energia, como, por exemplo, energia mecânica.

Ele é representado por uma fonte de tensão ideal em série com uma resistência interna (Fig. 2.32).

A tensão e para o receptor é denominada força contra-eletromotriz (f.c.e.m.).

Sua equação característica é dada por:

$$v = e + v_R \tag{2.58}$$

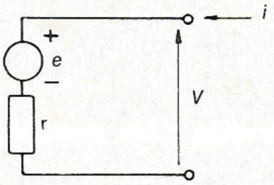


Fig. 2.32 Receptor ativo.

ou, ainda,

$$v = e + ri \tag{2.59}$$

A curva característica do receptor ativo está representada na Fig. 2.33.

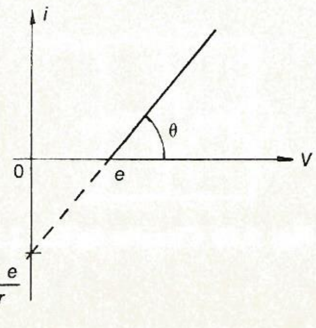


Fig. 2.33 Curva característica do receptor ativo.

A potência elétrica consumida pelo receptor será:

$$p = vi \tag{2.60}$$

Substituindo (2.59) em (2.60), resulta em:

$$p = ei + ri^2 \tag{2.61}$$

Analisando a expressão (2.61), observamos que:

$$P_u = ei\text{: potência útil do receptor} \tag{2.62}$$

$$P_d = ri^2\text{: potência dissipada} \tag{2.63}$$

O rendimento do receptor ativo é definido pela relação entre a potência útil e a potência elétrica consumida, ou seja:

$$\eta = \frac{e \cdot i}{v \cdot i} \tag{2.64}$$

ou:

$$\eta = \frac{e}{v} \tag{2.65}$$

Suponhamos um receptor de força contra-eletromotriz e e resistência interna r' alimentado por um gerador de força-eletromotriz e_S e resistência interna r (Fig. 2.34).

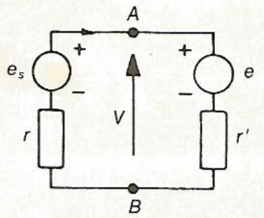


Fig. 2.34 Gerador alimentando um receptor ativo.

A tensão no gerador é a mesma que no receptor; logo, em vista das expressões (2.16) e (2.59), vem:

$$v = e_S - r \cdot i = e + r' \cdot i \tag{2.66}$$

Assim, a corrente que percorre o conjunto vale:

$$i = \frac{e_S - e}{r + r'} \tag{2.67}$$

A tensão no gerador e no receptor fica sendo:

$$v = e_S - r \cdot i = e_S - r \left(\frac{e_S - e}{r + r'} \right) \qquad (2.68)$$

ou

$$v = \frac{e_S \cdot r' + e \cdot r}{r + r'} \qquad (2.69)$$

A potência elétrica fornecida pelo gerador e, conseqüentemente, consumida pelo receptor vale:

$$p = vi \qquad (2.70)$$

Em vista das expressões (2.67) e (2.69), obtém-se:

$$p = \frac{(e_S \cdot r' + e \cdot r)}{(r + r')} \cdot \frac{(e_S - e)}{(r + r')} \qquad (2.71)$$

ou

$$p = \frac{(e_S - e)(e_S \cdot r' + e \cdot r)}{(r + r')^2} \qquad (2.72)$$

O rendimento elétrico do gerador vale:

$$\eta_G = \frac{v}{e_S} = \frac{e_S \cdot r' + e \cdot r}{e_S (r + r')} \qquad (2.73)$$

O rendimento elétrico do receptor é:

$$\eta_R = \frac{e}{v} = \frac{e\,(r + r')}{e_S \cdot r' + e \cdot r} \qquad (2.74)$$

O rendimento elétrico do sistema fica sendo:

$$\eta = \eta_G \cdot \eta_R = \frac{e}{e_S} \qquad (2.75)$$

2.14 LEI DE OHM PARA UM TRECHO DE CIRCUITO

Consideremos o trecho de circuito *AB* constituído por resistores, elementos geradores e elementos receptores (Fig. 2.35).

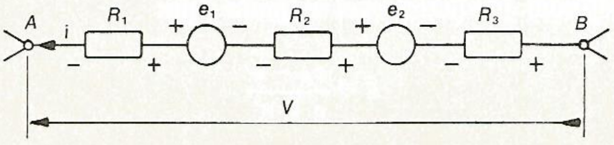


Fig. 2.35 Trecho de circuito.

Nos resistores devemos preferencialmente adotar a convenção de receptor (referencial de tensão oposto ao referencial de corrente).

A tensão total v no trecho AB é igual à soma algébrica das tensões nos elementos componentes, ou seja:

$$V_{AB} = v = -R_1 i + e_1 - R_2 i - e_2 - R_3 i \qquad (2.76)$$

ou

$$v = e_1 - e_2 - (R_1 + R_2 + R_3) \cdot i \qquad (2.77)$$

Genericamente, para um ramo qualquer de circuito:

$$v = \sum_{j=1}^{n} e_j - i \cdot \sum_{k=1}^{m} R_K$$