

Exercícios Complementares 2

- 1) Determine equações paramétricas da reta r que passa por $A = (-2, 0, 1)$ e cujo vetor diretor é ortogonal ao vetor $\vec{u} = (1, -2, 1)$. Além disso, r é concorrente com a reta s : $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{3}$.

Dados: $A = (-2, 0, 1)$; $\vec{v}_r \perp \vec{u}$, com $\vec{u} = (1, -2, 1)$; r e s concorrentes

Pede-se: equações paramétricas de r

Resolução:

Seja P o ponto de interseção de r e s : $\{P\} = r \cap s$

Tem-se que $\overrightarrow{AP} \perp \vec{u}$

Por P pertencer a s , tem-se:

$$s: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow P = (2 + 3t', -1 - 4t', 3 + 3t') \text{ para algum } t' \text{ real.}$$

Assim,

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (2 + 3t' + 2, -1 - 4t', 3 + 3t' - 1) = (4 + 3t', -1 - 4t', 2 + 3t')$$

E como $\overrightarrow{AP} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle = 0$

$$\text{Logo, } (1)(4 + 3t') + (-2)(-1 - 4t') + 1(2 + 3t') = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + 3t' + 2 + 8t' + 2 + 3t' = 0$$

$$\text{O que resulta em: } 14t' + 8 = 0 \Leftrightarrow t' = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7}$$

Então, $\overrightarrow{AP} = \left(4 - \frac{12}{7}, -1 + \frac{16}{7}, 2 - \frac{12}{7}\right) = \left(\frac{16}{7}, \frac{9}{7}, \frac{2}{7}\right)$ é um vetor diretor de r .

$$\text{Logo, } r: \begin{cases} x = -2 + \frac{16}{7}\alpha \\ y = \frac{9}{7}\alpha \\ z = 1 + \frac{2}{7}\alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$$

2) Exercício do livro do Boulos, sobre posições relativas de retas.

Estude a posição relativa das retas r e s nos seguintes casos:

$$\text{a) } r: X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1) \quad s: \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$

Dados: duas retas: r na forma vetorial e s na forma de equações “reduzidas” (equações de dois planos secantes)

Pede-se: determinar a posição relativa das retas r e s

Resolução:

De acordo com a equação de r , tem-se:

Ponto de r : $A = (1, -1, 1)$

Vetor diretor de r : $\vec{u} = (-2, 1, -1)$

De acordo com as equações reduzidas de s , determinam-se 2 pontos da reta:

Em (1), para $y = 0$, tem-se $0 + z = 3 \Rightarrow z = 3$

e substituindo os valores de y e z em (2), tem-se: $x + 0 - 3 = 6 \Rightarrow x = 9$

Logo, o ponto $B = (9, 0, 3)$ pertence a s

Em (1), para $y = 1$, tem-se $1 + z = 3 \Rightarrow z = 2$

e substituindo os valores de y e z em (2), tem-se: $x + 1 - 2 = 6 \Rightarrow x = 7$

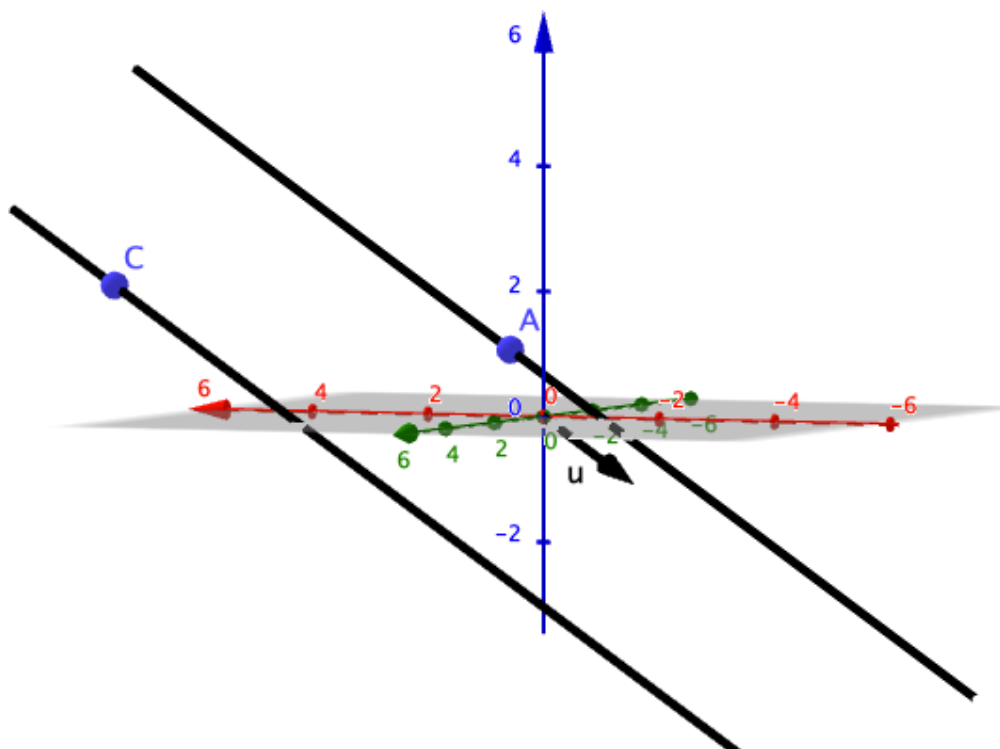
Logo, o ponto $C = (7, 1, 2)$ pertence a s

E com os dois pontos, tem-se: $\overrightarrow{BC} = (-2, 1, -1)$ um vetor diretor de s .

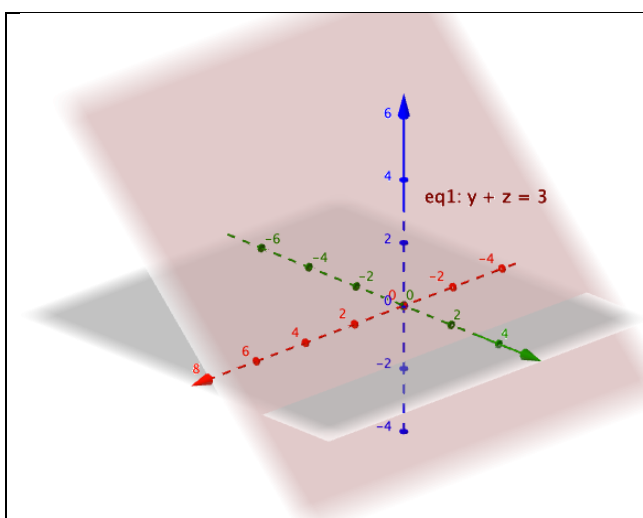
Como $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$, as retas são paralelas (têm mesma direção).

Como $A \notin s$, pois suas coordenadas não satisfazem as equações de s : $\begin{cases} -1 + 1 \neq 3 \\ 1 - 1 + 1 \neq 6 \end{cases}$, as retas r e s são **paralelas distintas**.

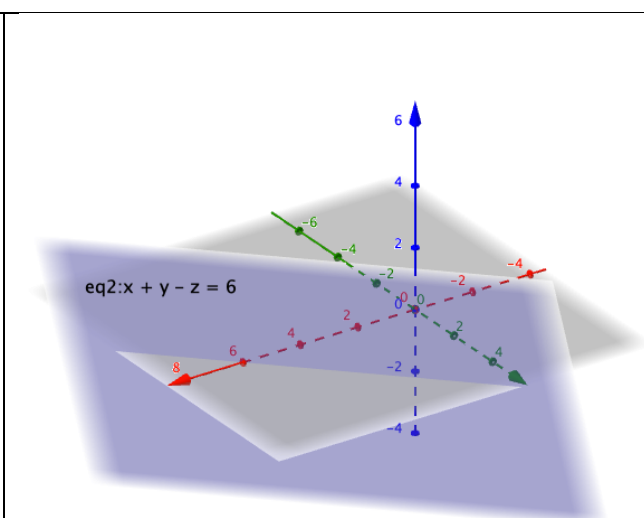
Representação gráfica:



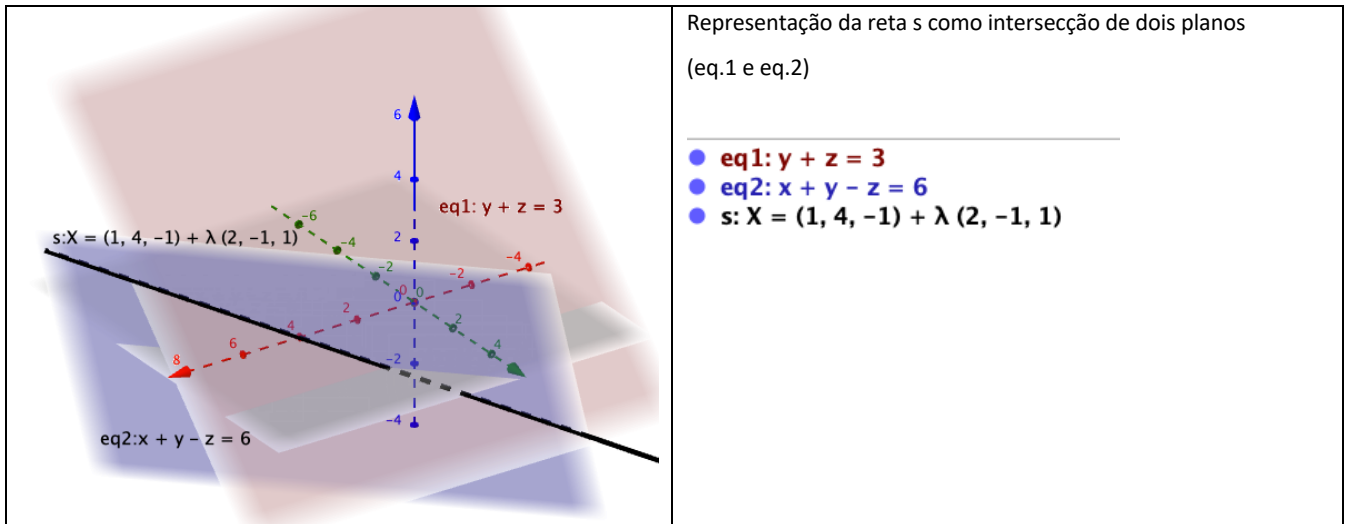
Nota-se que cada equação da reta s representa um plano no espaço e a reta é a intersecção desses planos (cf. figura abaixo).



Eq. 1: representando o plano de equação $y+z=3$



Eq. 2: representando o plano de equação $x+y-z=6$



b) $a: X = (1, 0, 0) + t(2, 2, 2)$ com $t \in \mathbb{R}$ e $b: \begin{cases} y = -x + 5 \\ z = 2x - 4 \end{cases}$

De acordo com a equação de a , tem-se:

Ponto de a : $P = (1, 0, 0)$

Vetor diretor de a : $\vec{v} = (2, 2, 2)$

De acordo com as equações reduzidas de b , determinam-se 2 pontos da reta:

Em (1), para $x = 0$, tem-se: $y = 5$

e em (2) tem-se: $z = -4$

Logo, o ponto $Q = (0, 5, -4)$ pertence a b

Em (1), para $x = 1$, tem-se: $y = 4$

Em (2), tem-se $z = -2$

Logo, o ponto $R = (1, 4, -2)$ pertence a b

E com os dois pontos, tem-se: $\overrightarrow{QR} = (1, -1, 2)$ um vetor diretor de b .

Como $\vec{v} \nparallel \overrightarrow{QR}$ (ou $\{\vec{v}, \overrightarrow{QR}\}$ LI), as retas não são paralelas, isto é: $a \nparallel b$

Verificando a coplanaridade das retas, tem-se:

$$[\vec{v}, \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{RP}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 16 + 4 = 0 \Rightarrow \{\vec{v}, \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{RP}\} LD \text{ (vetores coplanares).}$$

Com isso, as retas a e b são retas coplanares e não paralelas, logo **concorrentes**.

Determinando o ponto de intersecção:

Escrevendo as equações paramétricas da reta a :

$$a: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Seja S o ponto de intersecção de a e b : $\{S\} = a \cap b$

$S = (1 + 2t', 2t', 2t')$, para algum t' real e

Substituindo-se nas equações da reta b , determina-se $2t'$:

$$2t = -(1 + 2t') + 5 \Rightarrow t' = 1$$

$$2t = 2(1 + 2t) - 4 \Rightarrow t' = 1$$

Logo, $S = (3, 2, 2)$

Representação gráfica:

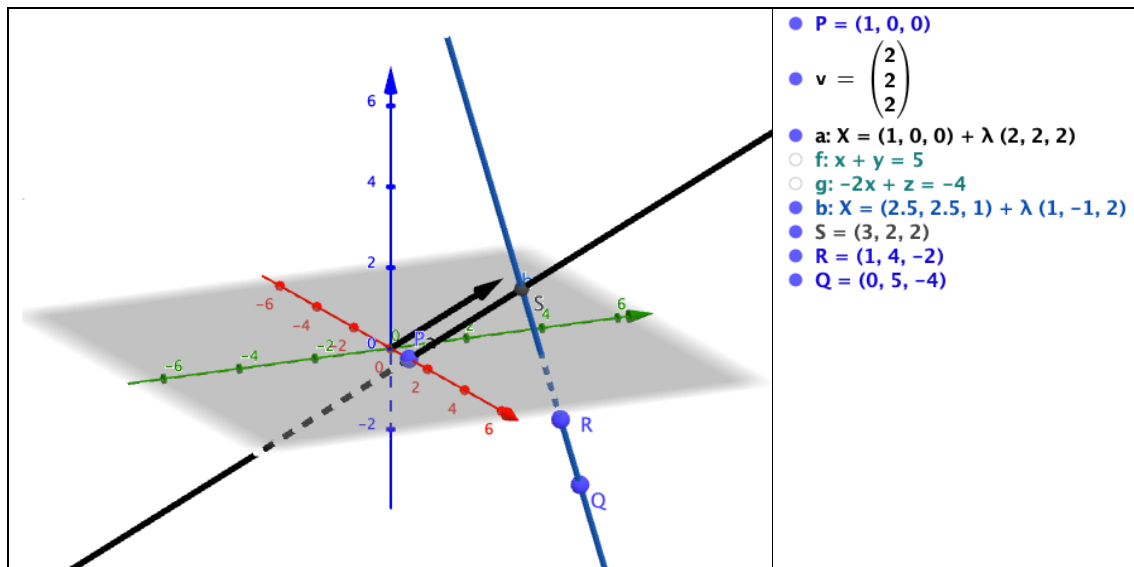


Ilustração do **paralelogramo** formado por **dois vetores** não colineares (LI)

2 retas coplanares – situação plana

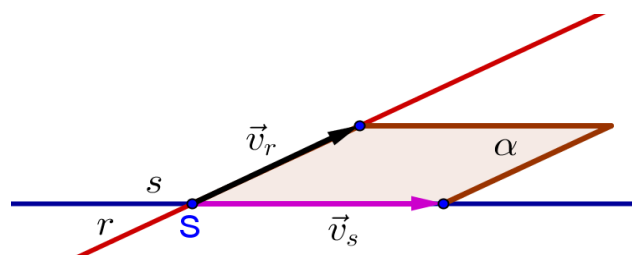


Ilustração do **paralelepípedo** formado por **três vetores** não colineares (LI)

2 retas não coplanares – situação espacial

