MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Correção de exercícios da prova

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Comentários sobre questões da prova:

Determinar base do espaço gerado pelos vetores:

$A = (1\ -2\ 0\ -1)$, $B = (1,-1,a,0)$ $C = (1,0,b-a,c-2)$ $D = (0,3,b,c)$

Escalonando por linhas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & b-a & c-2 \\ 0 & 3 & b & c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & b-a & c-1 \\ 0 & 3 & b & c \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & b-3a & c-3 \\ 0 & 0 & b-3a & c-3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & b-3a & c-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto D é combinação linear de A, B, C.

Caso $c=3$ e $b=3a$, temos C combinação linear de A e B.

Neste caso, o espaço é de dimensão 2, gerado por $\{A, B\}$ (base)

Caso contrário, $\{A\ B\ C\}$ ou $\{A\ B\ D\}$ bases.

Por Colunas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a & b-a & b \\ -1 & 0 & c-2 & c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & b-a & b \\ 0 & 1 & c-1 & c \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & b-3a & b-3a \\ 0 & 0 & c-3 & c-3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & b-3a & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observação: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b-3a \\ 0 \end{pmatrix}$ não é base de $L(\{A,B,C,D\})$!

(Por exemplo se $a=0$ e $b \neq 0$) $(1,0,0,0) \notin L(\{A,B,C,D\})$.

Sejam $A=(1,1,1)$, $B=(2,0,-1)$ e $C=(0,1,d)$

a) Volume do paralelepípedo:

$$V = |A \cdot (B \times C)| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & d \end{pmatrix} \right| = |3-2d|$$

b) Distância de $P = A+B+C$ ao plano $L(\{A,B\})$.

Para tanto determinamos um vetor $N=(a,b,c)$ normal ao plano.

$N \cdot A = N \cdot B = 0 \longrightarrow a+b+c=0 \quad 2a-c=0 \qquad c=2a$

$\longrightarrow 3a+b=0 \qquad b=-3a$

$\therefore N = \alpha(1,-3,2) \longrightarrow$ Fixemos $N=(1,-3,2)$

A distância de P ao plano é dada por $D = \dfrac{|(P-Q) \cdot N|}{\|N\|}$, sendo

Q um ponto qquer do plano. Por exemplo, $Q = A+B$.

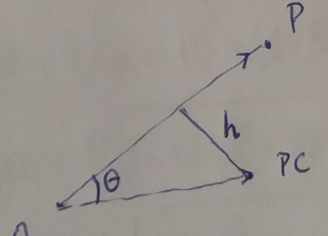
Assim, $D = \dfrac{|C \cdot N|}{\|N\|} = \dfrac{|2d-3|}{\sqrt{14}}$

c) Equação cartesiana do plano:

O plano é composto pelos pontos (x,y,z) ortogonais a N.

A equação resultante é $x-3y+2z=0$

d) Distância de $PC = (A+B)/2$ à reta $L = O + tP$



Temos que $\|P \times PC\| = \|P\| \, \|PC\| \sin\theta$

Mas $\sin\theta = \dfrac{h}{\|PC\|} \rightarrow \|P \times PC\| = \|P\| \, h$

$\therefore h = \dfrac{\|P \times PC\|}{\|P\|}$

$P = A+B+C = (3,2,d) \qquad PC = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$$P \times PC = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & d \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(-\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$\|P \times PC\| = \sqrt{9+10d^2}/2$

$\|P\| = \sqrt{13+d^2}$

$$h = \frac{\sqrt{9+10d^2}}{2\sqrt{13+d^2}}$$

Forma alternativa:

A distância h é dada por $h = \frac{|(PC-Q).N|}{\|N\|}$, onde N é normal à reta $\overrightarrow{OP}$ no plano contendo P e PC, e Q um ponto qquer da reta $\overrightarrow{OP}$.

! A normal deve pertencer ao plano !!

Podemos obter a normal como $N = PC - \frac{PC.P}{P.P} P$

$$N = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \frac{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).(3,2,d)}{(3,2,d).(3,2,d)} (3,2,d)$$

$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \frac{11/2}{13+d^2}(3,2,d) = \frac{1}{2(13+d^2)}(6+3d^2, d^2-9, -11d)$$

Vamos avaliar h, escolhendo $Q=0$ e tomando o vetor normal como $N = (6+3d^2, d^2-9, -11d)$

Assim $h = \frac{|PC.N|}{\|N\|}$

$$PC.N = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).(6+3d^2, d^2-9, -11d) = \frac{9}{\cancel{6}} + \frac{9d^2}{2} + \frac{d^2}{2} - \frac{9}{2} = \frac{9+10d^2}{2}$$

$$\|N\| = \sqrt{(6+3d^2)^2 + (d^2-9)^2 + (11d)^2}$$

$$\|N\| = \sqrt{36+36d^2+9d^4+d^4-18d^2+81+121d^2}$$

$$\|N\| = \sqrt{10d^4+139d^2+117}$$

$$\|N\| = \sqrt{(10d^2+9)(d^2+13)}$$

e $$h = \frac{(9+10d^2)}{2\sqrt{9+10d^2}\sqrt{13+d^2}} = \frac{\sqrt{9+10d^2}}{2\sqrt{13+d^2}}$$

Algoritmo de Gram-Schmidt modificado

Dados $\{u_1, \dots u_n\}$ base de V_n.

Original

$v_1 = u_1$

Para $i = 2, \dots n$ faça

$v_i = u_i$

para $j = 1$ a $i-1$ faça

$$v_i = v_i - \frac{u_i \cdot v_j}{v_j \cdot v_j} v_j$$

Modificado:

$v_1 = u_1$

Para $i = 2, \dots n$ faça

$v_i = u_i$

para $j = 1$ a $i-1$ faça

$$v_i = v_i - \frac{v_i \cdot v_j}{v_j \cdot v_j} v_j$$

Ambos são matematicamente equivalentes.

Vejamos: v_i em ambos os casos é inicializado como u_i e após $j=1$ no loop $v_i \cdot v_1 = 0$. A partir deste ponto $v_i \neq u_i$ e temos $v_i = u_i - \alpha_1 v_1$ onde $\alpha_1 = \frac{u_i \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}$.

Este novo v_i é ortogonal a v_1. Depois de $k < i-1$ passos do loop em j, $v_i = u_i - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_k v_k$

Ao calcularmos $v_i \cdot v_{k+1} = u_i v_{k+1} - \alpha_1 v_1 v_{k+1} - \dots - \alpha_k v_k \cdot v_{k+1}$
$= u_i \cdot v_{k+1}$
mostrando a equivalência.