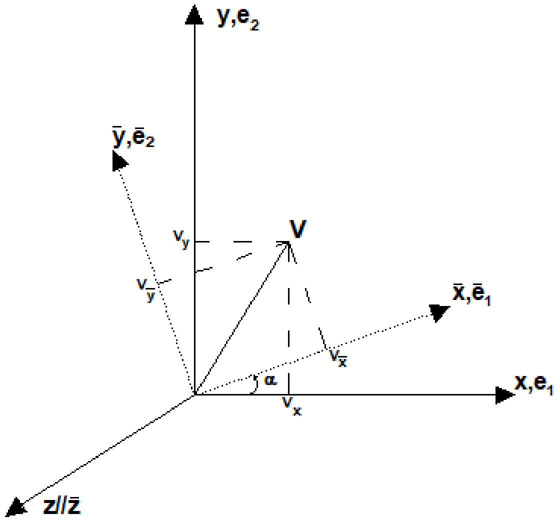
# *PEF – 3528 – Ferramentas Computacionais na Mecânica das Estruturas Criação e Concepção*

## Aula 03

**Valério S. Almeida - 2020**
**valerio.almeida@usp.br**

# TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS PARA PÓRTICO PLANO

Seja um vetor V contido no plano *xy*, de versores $(e_1, e_2)$. Defina-se um sistema cartesiano local $(\bar{x}, \bar{y})$, de versores $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, também contido no plano *xy*, mas rotacionado (sentido positivo dextrorso) de um ângulo $\alpha$ entre o eixo *x* e este novo eixo $\bar{x}$, conforme esquematizado na figura abaixo.




O vetor V pode ser decomposto como:

$$V = V_{\bar{x}} \cdot \bar{e}_1 + V_{\bar{y}} \cdot \bar{e}_2 \qquad (23)$$

E

$$V_x = V_{\bar{x}} \cdot \cos\alpha + (-)V_{\bar{y}} \cdot sen\alpha \qquad V_y = V_{\bar{x}} \cdot sen\alpha + V_{\bar{y}} \cdot \cos\alpha \qquad (24)$$

Assim, a eq. (24) pode ser escrita matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \end{Bmatrix} \qquad (25)$$

A matriz que relaciona as componentes no sistema $(x, y)$ e $(\bar{x}, \bar{y})$ é dita matriz de transformação de bases e é também ortogonal. Sabe-se da álgebra que se uma matriz é ortogonal, por exemplo, a matriz $[A]$, é possível demonstrar que:

$$[A]^{-1} = [A]^T \qquad (26)$$

Ou seja, a inversa de uma matriz é sua transposta. Relembrando que uma matriz transposta é definida conforme um exemplo indicado na relação (27):

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (27)$$

Assim, na relação (25), usando a propriedade de ortogonalidade da matriz de transformação, é possível redigi-la da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} \qquad (28)$$

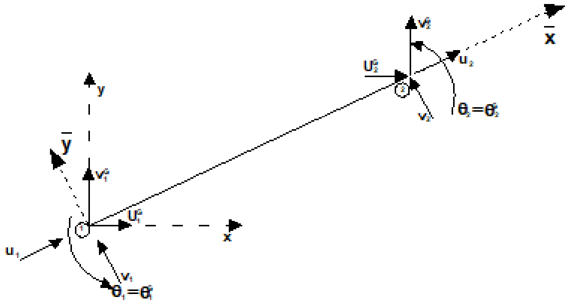
Ou

$$\begin{Bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_{\bar{y}} \end{Bmatrix} = [\hat{R}] \cdot \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} \qquad (29)$$

Onde $\hat{R}$ é dita matriz de rotação.

Voltando para a barra de pórtico plano genérica "j", pode-se transformar os vetores deslocamentos locais para um sistema global.

$$\begin{Bmatrix} U_1^G \\ V_1^G \\ \theta_1^G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \qquad (30)$$




Expandindo para considerar o nó local 2 :

$$\begin{Bmatrix} U_1^G \\ V_1^G \\ \theta_1^G \\ U_2^G \\ V_2^G \\ \theta_2^G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad (31)$$

# TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS PARA PÓRTICO PLANO

Ou

$$\{U\}^e{}_{6x1} = \begin{bmatrix} [\bar{R}]^T & [0] \\ [0] & [\bar{R}]^T \end{bmatrix} \cdot \{\delta\}_{6x1} \rightarrow \{U\}^e{}_{6x1} = [R]^T \cdot \{\delta\}_{6x1} \qquad (32)$$

De maneira correlata, a mesma transformação é aplicada ao vetor de forças, assim:

$$\{F\}^e{}_{6x1} = [R]^T_{6x6} \cdot \{f\}_{6x1} \qquad (33)$$

Com a matriz de rotação transposta definida como:

$$[R]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (34)$$

Ou, definida na forma direta:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde

$\{U\}^e$ : vetor de deslocamentos nodais do elemento, no **sistema global**;

$\{F\}^e$ : vetor de forças nodais equivalentes do elemento, **sistema global.**

A equação (22), deve também ser equacionada para o sistema de referência global.

$$[k]_{6X6} \cdot \{\delta\} = \{f\} \qquad (22)$$

Isto é feito, aplicando as propriedades de ortogonalidade da matriz de rotação sobre as relações (32) e (33) em (22), da seguinte maneira:

$$[k]_{6X6} \cdot \{\delta\} = [R] \cdot \{F\}^e \rightarrow [k]_{6X6} \cdot [R] \cdot \{U\}^e = [R] \cdot \{F\}^e \qquad (35)$$

Pré-multiplicando a relação (35) por $[R]^{-1}$:

$$[R]^{-1} \cdot [k]_{6X6} \cdot [R] \cdot \{U\}^e = [R]^{-1} \cdot [R] \cdot \{F\}^e \qquad (36)$$

Lembrando da álgebra que $[A]^{-1} \cdot [A] = [I]$, onde *I* é a matriz identidade e da definição (26), a expressão (36) resulta em:

$$[R]^T \cdot [k]_{6X6} \cdot [R] \cdot \{U\}^e = \{F\}^e \qquad (37)$$

Ou de modo compacto:

$$[K]^e_{6X6} \cdot \{U\}^e = \{F\}^e \qquad (38)$$

# TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS PARA PÓRTICO PLANO

$$[K]^{e}_{6X6} = [R]^{T} \cdot [k] \cdot [R] \qquad (39)$$

$[K]^{e}$: matriz de rigidez do elemento, no **sistema global**;

Resumindo, para cada elemento:

i) Definem-se carga distribuída, área, inércia, módulo de elasticidade e seus nós inicial e final, de modo que seu sistema local já fique determinado;

ii) Calcula seus cossenos diretores (*cos* e *sen*) e comprimento;

iii) Obtém as forças nodais equivalentes no sistema local;

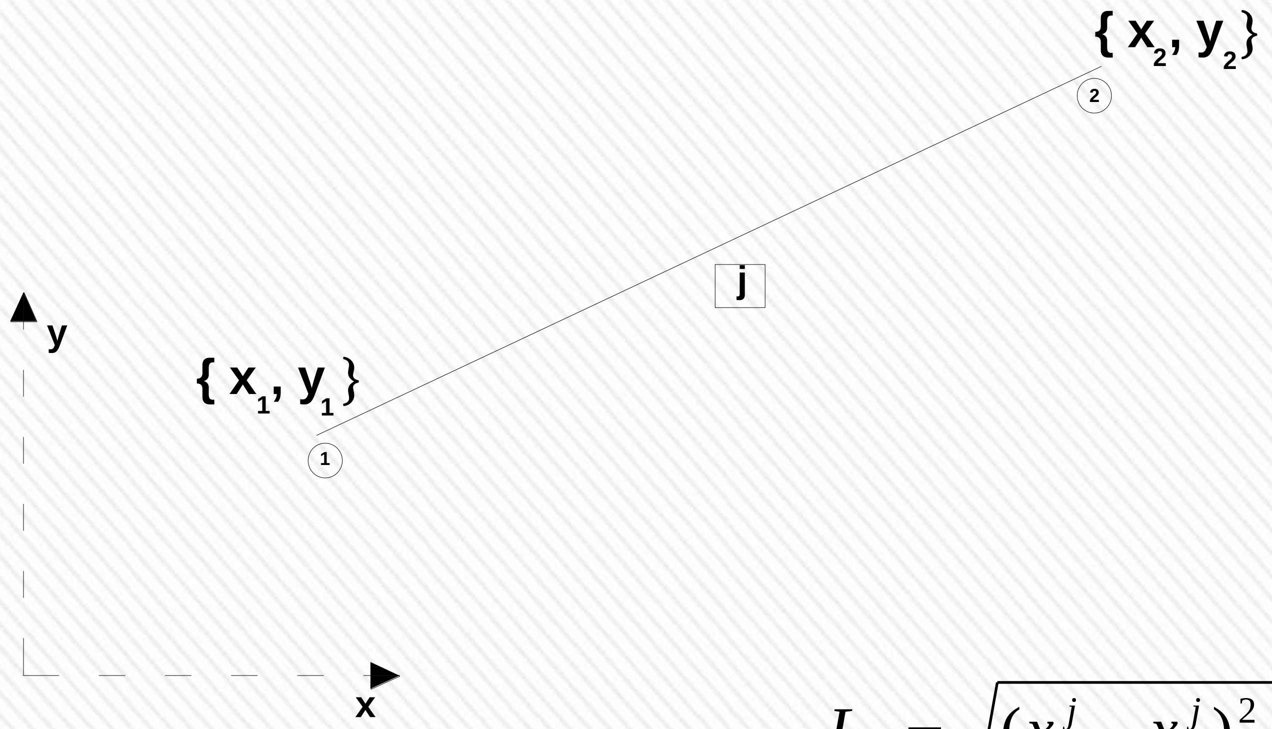
iv) Obtem a matriz de rigidez no sistema local;

v) Obtem a matriz de rotação, relação (34);

vi) Obtém as forças nodais equivalentes no sistema global, eq. (33), usando a relação das forças nodais equivalentes no sistema local;

vii) Obtem a matriz de rigidez no sistema global, eq. (39), usando a matriz de rigidez no sistema local.

# Cálculo da matriz de rotação do elemento




$$L_j = \sqrt{(x_2^j - x_1^j)^2 + (y_2^j - y_1^j)^2}$$

$$(\cos\alpha)_j = \frac{x_2^j - x_1^j}{L_j}$$

$$(sen\alpha)_j = \frac{y_2^j - y_1^j}{L_j}$$

# DADOS DE ENTRADA PARA O PÓRTICO PLANO

**DADOS DE CADA BARRA:**
Conectividade entre barra e nós de extremo:

Elem “j”: no inicial (noi), nó final (nof)

Propriedades de cada barra:

Área (A), Momento de inércia (I), Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)

**GEOMETRIA DOS NÓS:**
Definir coordenadas do nós (x,y)

**Por exemplo:**
Var. inteira: NN, NE, NMAT: nr. total de nós, elementos e material
Vetor real: X(NN), Y(NN): x(3)=9.6; coordenada x do nó 3 é 9.6 (unid.comprimento)

Barra: Matriz inteira: Barra [NE,2]
Barra[4,1] = 6; Barra[4,2] = 2 ; barra 4 tem nó inicial 6 e final 2
Matriz real: SECAO[NE,3]:
SECAO[5,1] = 0.03; SECAO[5,2] = 2.25E-4; SECAO[5,3] = 2
Vetor real: MATERIAL[NMAT]:
MATERIAL[1]: 200000; MATERIAL[2]: 500000; tipo do material 1 tem E = 2e5;

# Pseudocódigos – Parte 1

**Início do Programa Principal**

*Chamar Rotina Ler coordenadas dos nós (NN,X,Y)*

*Chamar Rotina Ler dados das barras (NE, SECAO)*

*Chamar Rotina Ler dados gerais barras ( NE, NMAT, MATERIAL,SECAO)*

***Fazer j de 1 até NE***

*Chamar Rotina Montar Matriz de Rotacao Barra* $(X_1^j, Y_1^j, X_2^j, Y_2^j, L_j, R_j)$

*Chamar Rotina Montar Matriz de Rigidez Barra* $(L_j, E_j, I_j, A_j, k)$

*Chamar Rotina Transposta Matriz* $(Rt_j, R_j, 6,6)$

*Chamar Rotina Multiplica Matriz-Matriz* $(A, Rt_j, k, 6,6,6)$

*Chamar Rotina Multiplica Matriz-Matriz* $(B, A, R_j, 6,6,6)$ $[K]^e_{6X6} = [R]^T \cdot [k] \cdot [R]$

.....

***Fim de Fazer j***

**Fim do Programa Principal**

## Pseudocódigos – Parte 1

**Início da Rotina *Montar Matriz de Rotacao Barra(* $x_1^j, y_1^j, x_2^j, y_2^j, L_j, R_j$ *)***

// calculando características das barras e armazenando nos vetores $\{L\},\{\cos\},\{sen\}$ e
//montar matriz de rotação $R[6,6]$ para cada barra:
// Input:
// x1,y1,x2,y2: coordenadas de inicio e fim da barra
// Output:
// Lj: comprimento da barra
// Rj matriz de rotação da barra

$L_j \leftarrow \sqrt{(x_2^j - x_1^j)^2 + (y_2^j - y_1^j)^2}$

$(\cos)_j \leftarrow (x_2^j - x_1^j)/L_j$

$(sen)_j \leftarrow (y_2^j - y_1^j)/L_j$

$[R]_j \leftarrow 0$

$R(1,1) \leftarrow (\cos)_j$

$R(2,2) \leftarrow (\cos)_j$

$R(4,4) \leftarrow (\cos)_j$

$R(5,5) \leftarrow (\cos)_j$

$R(1,2) \leftarrow (sen)_j$

$R(2,1) \leftarrow -(sen)_j$

$R(4,5) \leftarrow (sen)_j$

$R(5,4) \leftarrow -(sen)_j$

$R(3,3) \leftarrow 1$

$R(6,6) \leftarrow 1$

# Pseudocódigos – Parte 1

**Início da Rotina *Montar Matriz de Rigidez Barra*(** $L_j, E_j, I_j, A_j, \bar{k}$)

// Rotina para montar matriz de rigidez da barra
// calculando matriz de rigidez de cada barra e armazenando ela na matriz *k*, onde *k[6,6]*
// Input:
// Lj,Ej, Ij, Aj: comprimento, módulo Young, Inércia e área da barra
// Output:
// k: matriz de rigidez da barra, sistema local

$[\bar{k}]_j \leftarrow 0$

$\bar{k}(1,1) = E_j \cdot A_j / L_j$

$\bar{k}(1,4) = -\bar{k}(1,1)$

$\bar{k}(4,1) = \bar{k}(1,4)$

$\bar{k}(4,4) = \bar{k}(1,1)$

$\bar{k}(2,2) = 12 \cdot E_j \cdot I_j / L_j^3$

$\bar{k}(2,5) = -\bar{k}(2,2)$

$\bar{k}(5,5) = \bar{k}(2,2)$

$\bar{k}(5,2) = \bar{k}(2,5)$

$\bar{k}(2,3) = 6 \cdot E_j \cdot I_j / L_j^2$

$\bar{k}(2,6) = \bar{k}(2,3)$

$\bar{k}(6,2) = \bar{k}(2,6)$

$\bar{k}(5,3) = -\bar{k}(2,3)$

$\bar{k}(5,6) = \bar{k}(5,3)$

$\bar{k}(3,3) = 4 \cdot E_j \cdot I_j / L_j$

$\bar{k}(6,6) = \bar{k}(3,3)$

$\bar{k}(3,6) = 0{,}5 \cdot \bar{k}(3,3)$

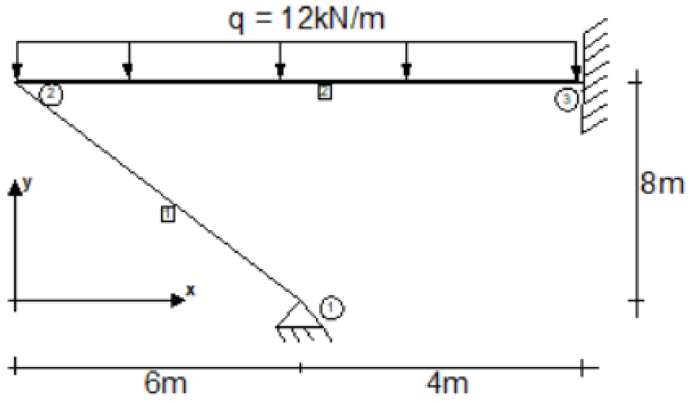
$\bar{k}(6,3) = \bar{k}(3,6)$

$\bar{k}(3,5) = -\bar{k}(2,3)$

$\bar{k}(6,5) = \bar{k}(5,6)$

**Fim da Rotina *Montar Matriz de Rigidez Barra***

**Exemplo:** Para o pórtico do trabalho anterior, obtenha a matriz de rotação e seu comprimento.




Barra 1:

$x_1 = 6\ ,\ y_1 = 0\ ,\ x_2 = 0\ ,\ y_2 = 8$

$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (8-0)^2} = 10m$

$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L} = \frac{0-6}{10} = -0{,}6$

$sen\alpha = \frac{y_2 - y_1}{L} = \frac{8-0}{10} = 0{,}8$

Barra 2:

$x_1 = 0\ ,\ y_1 = 8\ ,\ x_2 = 10\ ,\ y_2 = 8$

$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(10-0)^2 + (8-8)^2} = 10m$

$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L} = \frac{10-0}{10} = 1$

$sen\alpha = \frac{y_2 - y_1}{L} = \frac{8-8}{10} = 0$

$$[R]^1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}8 & -0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R]^2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Sistema Algébrico do Pórtico Plano

$$[k]_{6X6} \cdot \{\delta\} = \{f\}$$

$$[R]^T \cdot [k]_{6X6} \cdot [R] \cdot \{U\}^e = \{F\}^e$$

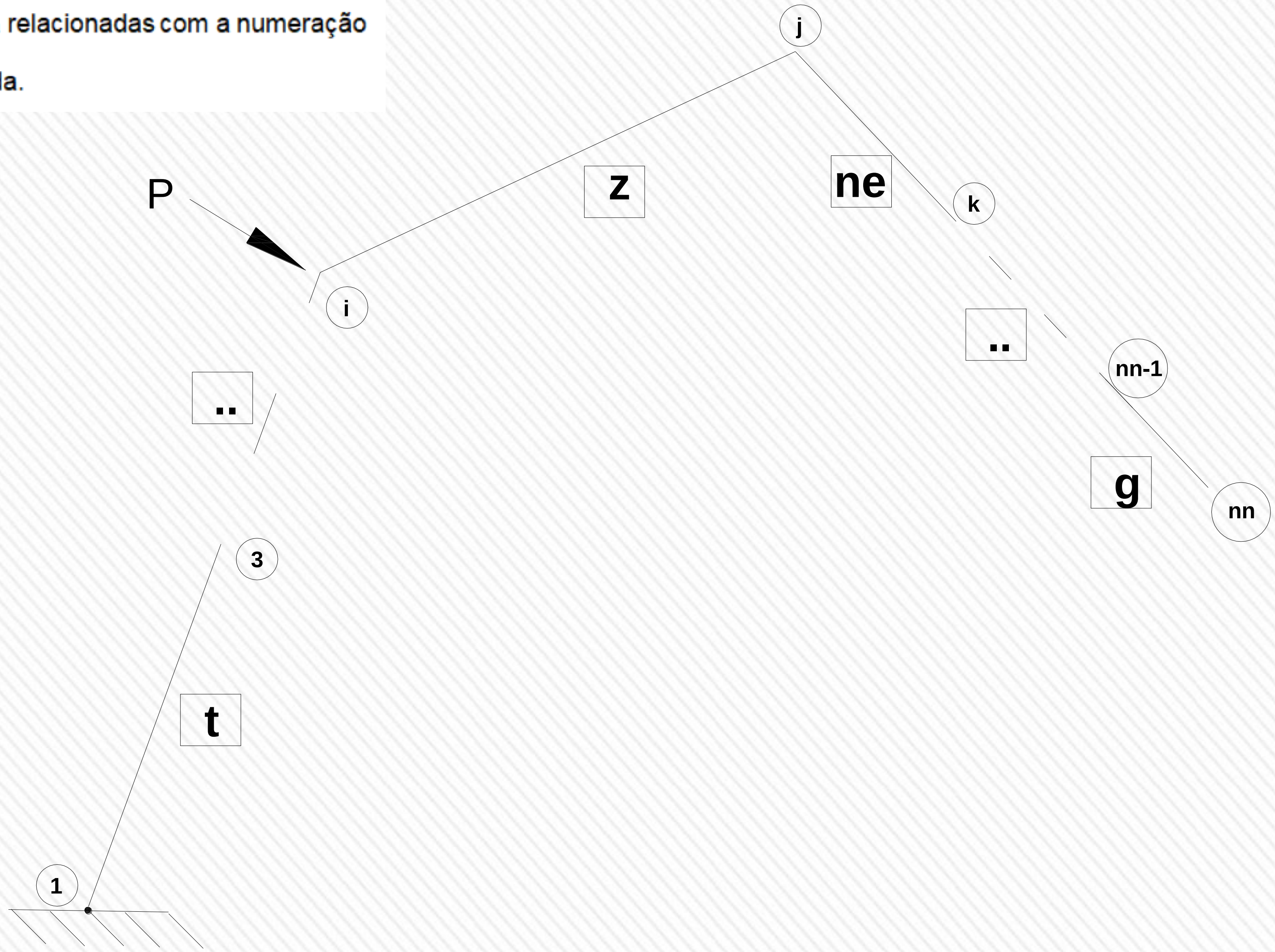
$$[K]_{6x6} = [R]^T . [k]_{6x6} . [R]$$

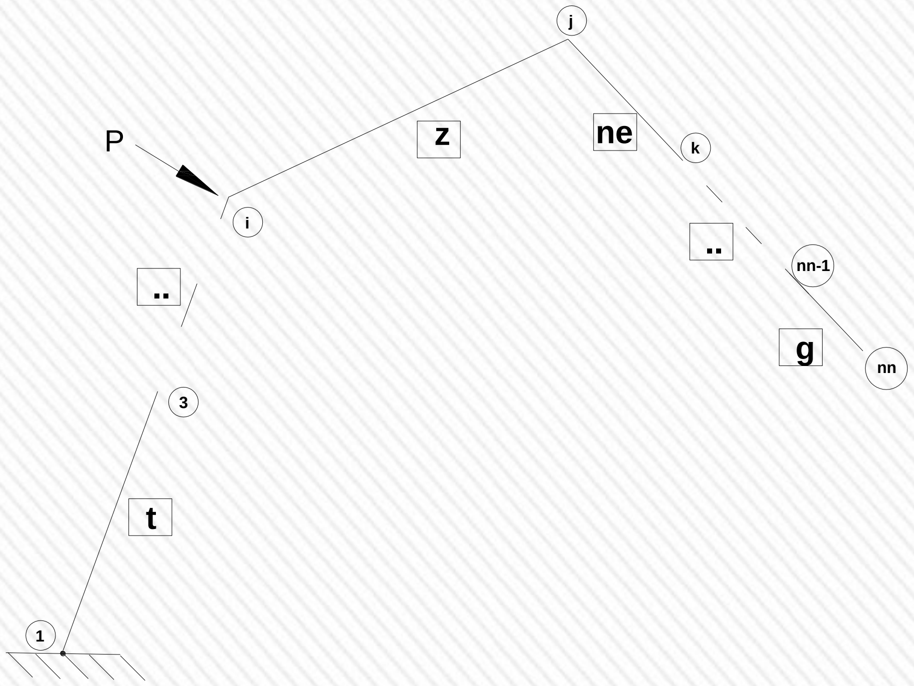
$$\{F\}^e{}_{6x1} = [R]^T_{6x6} \cdot \{f\}_{6x1}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ f_{30} \\ f_{40} \\ f_{50} \\ f_{60} \end{Bmatrix}$$

# Sistema Algébrico do Pórtico Plano

Agora, note que uma estrutura é composta por $nn$ nós e $ne$ barras de modo que estes nós são numerados com valores naturais a partir da unidade. As barras ficam já relacionadas com a numeração dos nós, conforme figura em seguida.






Como cada nó do pórtico plano possui 3 graus de liberdade associado, então, ao todo se tem ***3nn graus de liberdade***.

É necessário, na geração dos dados do pórtico, indicar o numero total de nós, suas coordenadas em relação a um sistema cartesiano, a quantidade de elementos seu nó inicial e final no sistema global, o que se chama de ***incidência*** ou **conectividade**. Esquematicamente, conforme figura anterior, a incidência de cada barra é descrita como:

Tabela de Incidência

| ***Elemento*** | ***Nó inicial*** | ***Nó final*** |
|---|---|---|
| *t* | *1* | *3* |
| *z* | *i* | *j* |
| *g* | *nn-1* | *nn* |
| *ne* | *j* | *k* |

Esta forma de descrever incidência das barras já indica qual é o nó inicial e final local, assim, por exemplo, para o elemento *ne*, seu nó local 1 e 2 são respectivamente os nós globais ***j*** e ***k***.

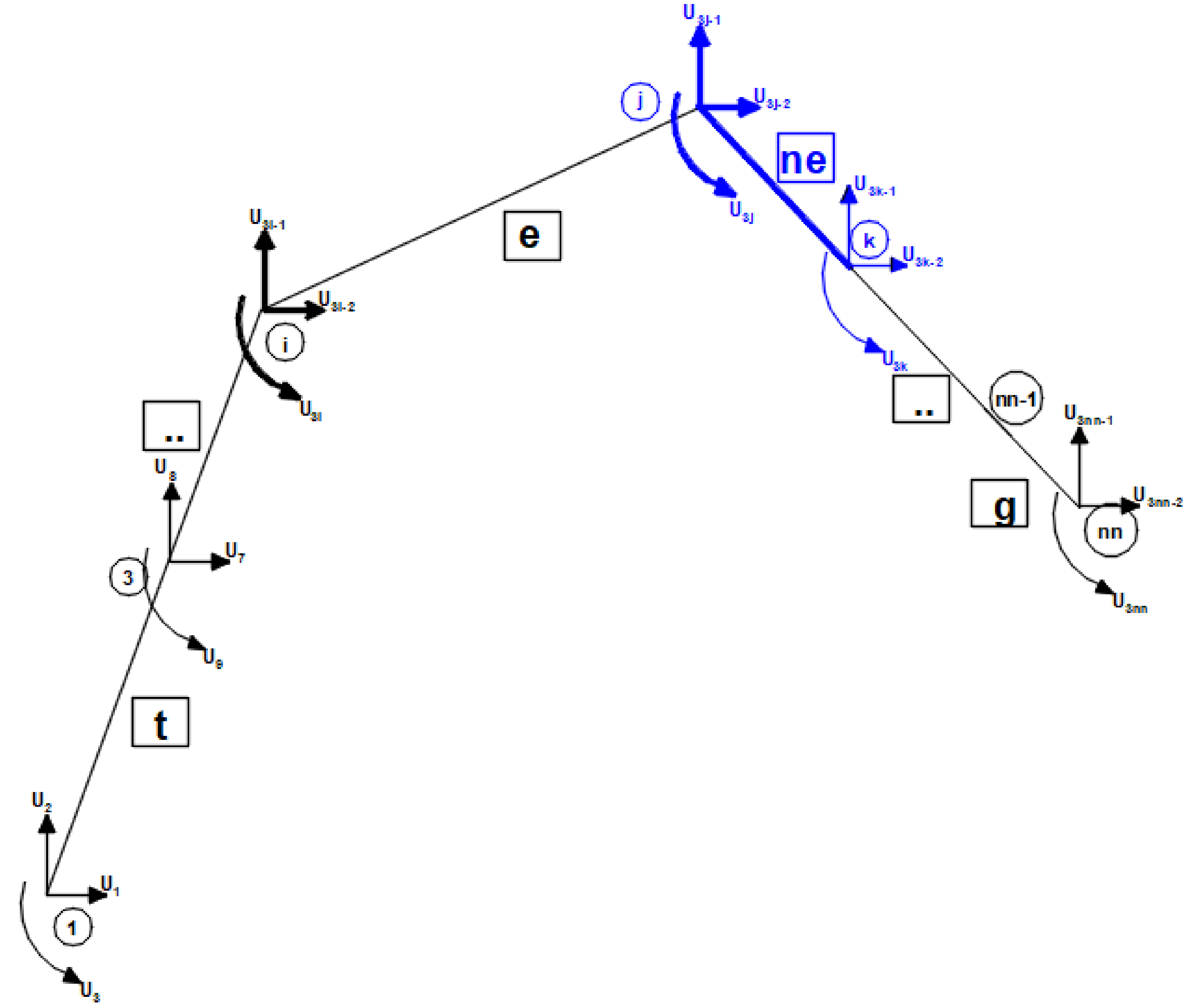
O vetor deslocamento (e de forças) pode ser explicitado da seguinte forma:

$$\{U\}^e = \begin{Bmatrix} U_1^G \\ V_1^G \\ \theta_1^G \\ U_2^G \\ V_2^G \\ \theta_2^G \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}^e \tag{40}$$

Note que na eq. (40), as três primeiras linhas se referem aos deslocamentos do nó inicial e os três últimos ao nó final. Desta forma, pode-se gerar uma **lei de endereçamento** entre os nós locais e globais, conforme tabela de Incidência, da seguinte maneira:

*Elemento ne:*
*Nó inicial → j*
*Nó final → k*

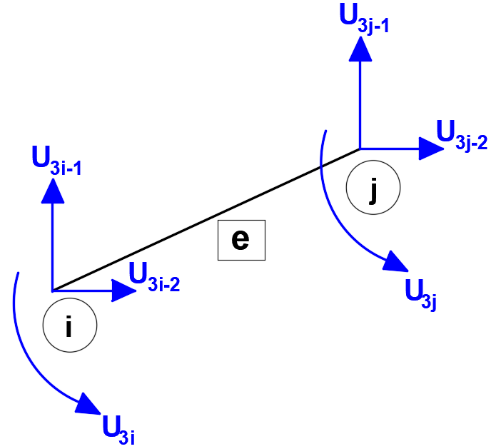
| **Nó Global** | **Posição Local** | **Posição Global** |
|---|---|---|
| ***j*** | **1** | **3·j-2** |
| | **2** | **3·j-1** |
| | **3** | **3·j** |
| ***k*** | **4** | **3·k-2** |
| | **5** | **3·k-1** |
| | **6** | **3·k** |

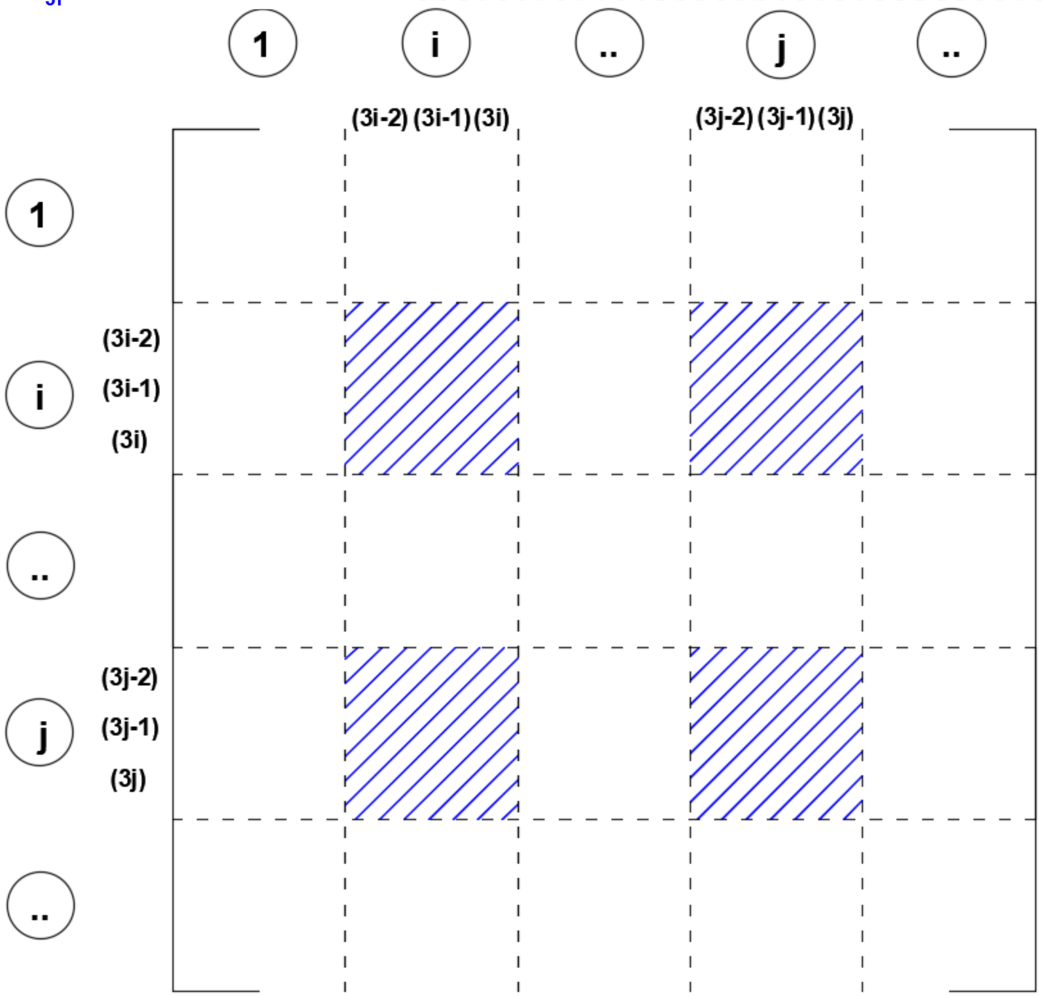


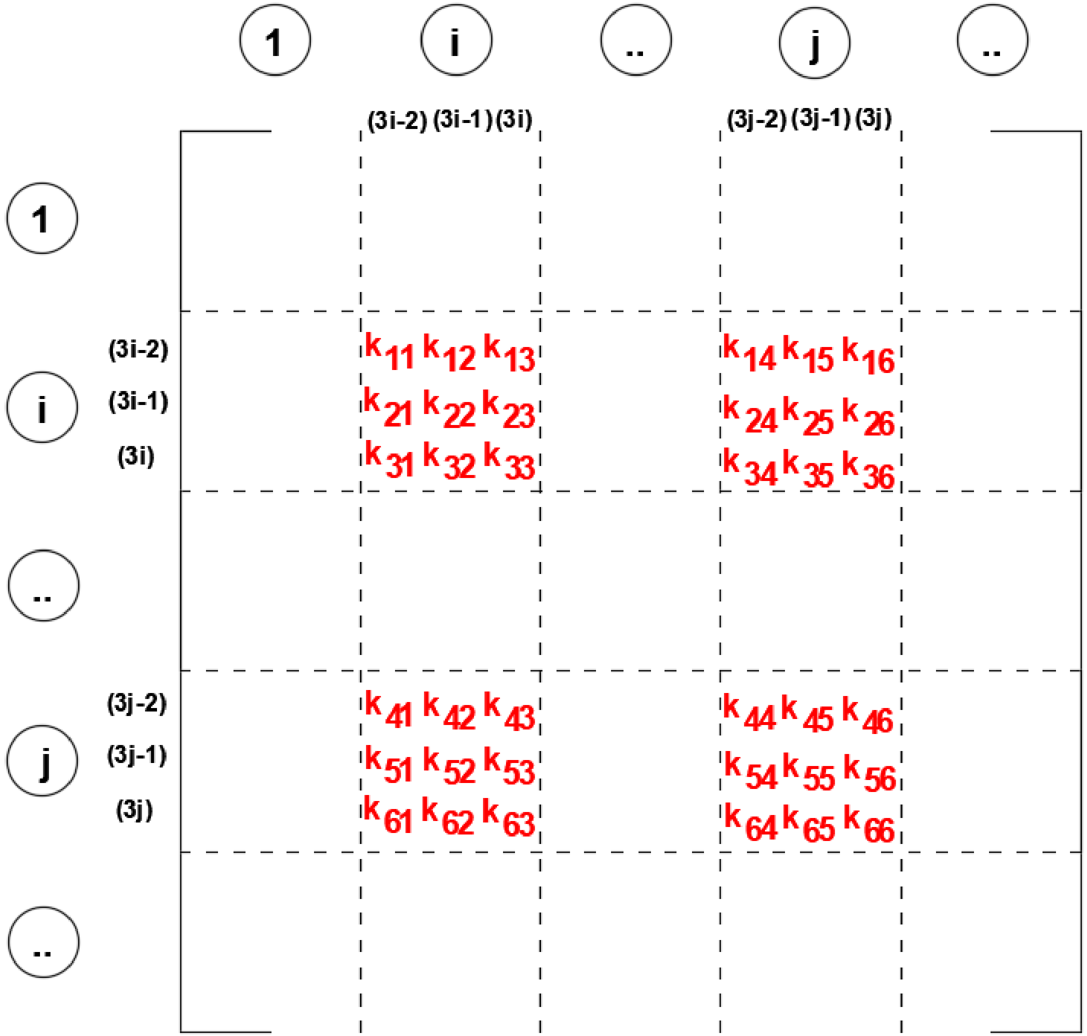

| *Elemento* | *Nó inicial* | *Nó final* |
|---|---|---|
| *t* | *1* | *3* |
| *z* | *i* | *j* |
| *g* | *nn-1* | *nn* |
| *ne* | *j* | *k* |

## Lei de endereçamento: "ne"

| *Nó Global* | *Posição Local* | *Posição Global* |
|---|---|---|
| *j* | *1* | *3·j-2* |
| | *2* | *3·j-1* |
| | *3* | *3·j* |
| *k* | *4* | *3·k-2* |
| | *5* | *3·k-1* |
| | *6* | *3·k* |




$$K = \sum_{i=1}^{n.barras} k^i \qquad F = \sum_{i=1}^{n.barras} f^i$$

Desta forma, escrevendo o sistema algébrico de todas as barras, levando em conta todos os deslocamentos de todas as barras, em termos de posicionamento global, chega-se a um sistema linear da estrutura do tipo:

$$[Kest]_{3 \cdot nn \times 3 \cdot nn} \cdot \{Uest\}_{3 \cdot nn} = \{Fest\}_{3 \cdot nn} \qquad (41)$$

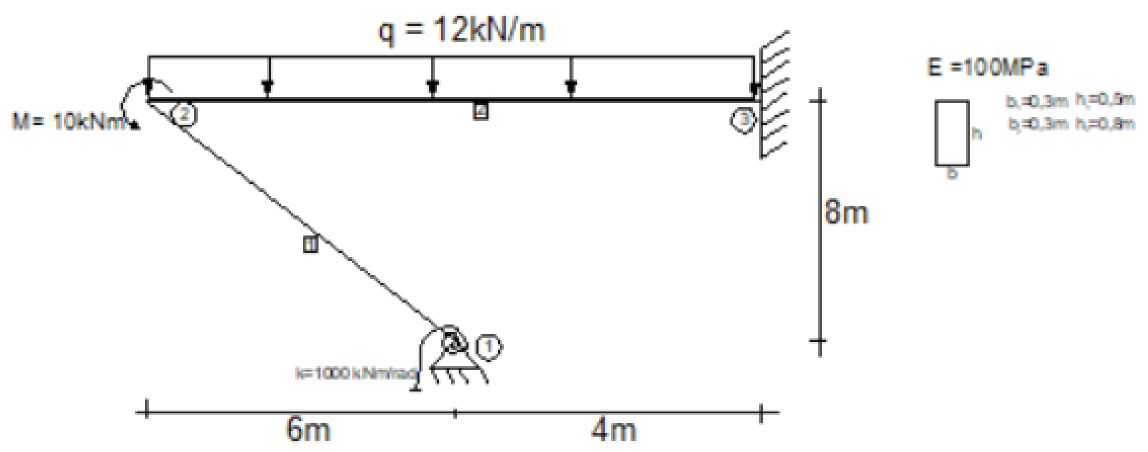
Onde:

$[Kest]_{3 \cdot nn \times 3 \cdot nn}$: matriz de rigidez da estrutura, formada pela influência de cada barra;

$[Uest]_{3 \cdot nn}$: vetor deslocamento de toda a estrutura, coordenadas globais;

$[Fest]_{3 \cdot nn}$: vetor de forças de toda a estrutura, coordenadas globais;

***Exemplo:*** Para o pórtico a seguir, obtenha o sistema linear de toda a estrutura.




Nós da estrutura "1" , "2" e "3" → NN = 3

No. Total de graus de liberdade → NGDL = 3* NN = 9

Barra 1:

Nó inicial = 1 Nó final = 2

Barra 2:

Nó inicial = 2 Nó final = 3

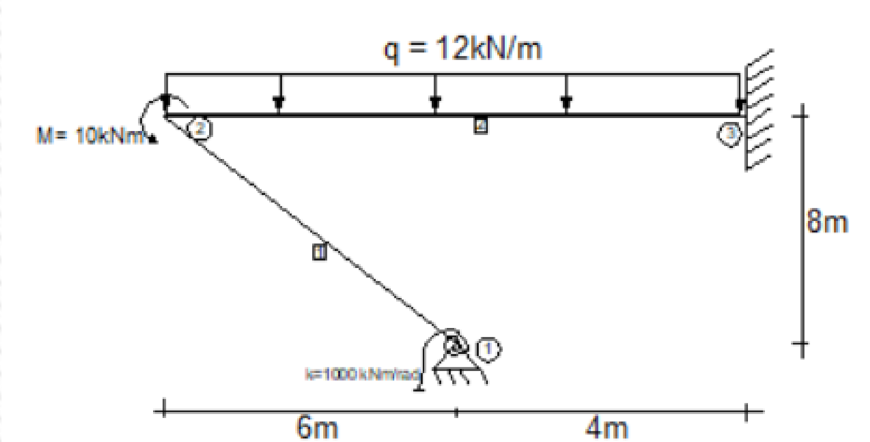
$$[K^G]^1 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|ccc} k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & k^1_{15} & k^1_{16} \\ k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & k^1_{25} & k^1_{26} \\ k^1_{31} & k^1_{32} & k^1_{33} & k^1_{34} & k^1_{35} & k^1_{36} \\ \hline k^1_{41} & k^1_{42} & k^1_{43} & k^1_{44} & k^1_{45} & k^1_{46} \\ k^1_{51} & k^1_{52} & k^1_{53} & k^1_{54} & k^1_{55} & k^1_{56} \\ k^1_{61} & k^1_{62} & k^1_{63} & k^1_{64} & k^1_{65} & k^1_{66} \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & \qquad\qquad 2 \end{array} & \end{array}$$

$$[K^G]^2 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|ccc} k^2_{11} & k^2_{12} & k^2_{13} & k^2_{14} & k^2_{15} & k^2_{16} \\ k^2_{21} & k^2_{22} & k^2_{23} & k^2_{24} & k^2_{25} & k^2_{26} \\ k^2_{31} & k^2_{32} & k^2_{33} & k^2_{34} & k^2_{35} & k^2_{36} \\ \hline k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} & k^2_{45} & k^2_{46} \\ k^2_{51} & k^2_{52} & k^2_{53} & k^2_{54} & k^2_{55} & k^2_{56} \\ k^2_{61} & k^2_{62} & k^2_{63} & k^2_{64} & k^2_{65} & k^2_{66} \end{array}\right] & \begin{array}{c} 2 \\ \\ \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 2 & \qquad\qquad 3 \end{array} & \end{array}$$

$$
[K^e]^1 = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 \\
k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 \\
k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 \\
\hline
k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & k_{45}^1 & k_{46}^1 \\
k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 & k_{54}^1 & k_{55}^1 & k_{56}^1 \\
k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 & k_{64}^1 & k_{65}^1 & k_{66}^1
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ 2 \\ \\ \\ \end{array}
\\
\begin{array}{cc} 1 \qquad\qquad & \qquad\qquad 2 \end{array}
\end{array}
\qquad
[K^e]^2 = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & k_{15}^2 & k_{16}^2 \\
k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{25}^2 & k_{26}^2 \\
k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 & k_{35}^2 & k_{36}^2 \\
\hline
k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 & k_{45}^2 & k_{46}^2 \\
k_{51}^2 & k_{52}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 & k_{55}^2 & k_{56}^2 \\
k_{61}^2 & k_{62}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 & k_{65}^2 & k_{66}^2
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 2 \\ \\ \\ 3 \\ \\ \\ \end{array}
\\
\begin{array}{cc} 2 \qquad\qquad & \qquad\qquad 3 \end{array}
\end{array}
$$

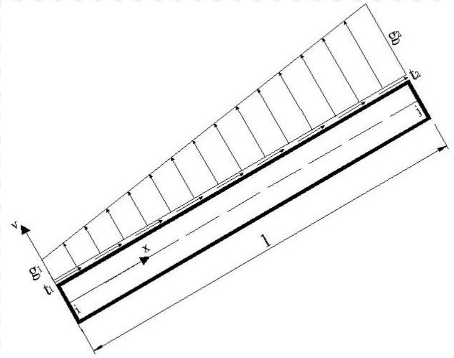
$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 & 0 & 0 & 0 \\
k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 & 0 & 0 & 0 \\
k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & (k_{44}^1+k_{11}^2) & (k_{45}^1+k_{12}^2) & (k_{46}^1+k_{13}^2) & k_{14}^2 & k_{15}^2 & k_{16}^2 \\
k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 & (k_{54}^1+k_{21}^2) & (k_{51}^1+k_{22}^2) & (k_{51}^1+k_{23}^2) & k_{24}^2 & k_{25}^2 & k_{26}^2 \\
k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 & (k_{11}^1+k_{31}^2) & (k_{11}^1+k_{32}^2) & (k_{61}^1+k_{33}^2) & k_{34}^2 & k_{35}^2 & k_{36}^2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 & k_{45}^2 & k_{46}^2 \\
0 & 0 & 0 & k_{51}^2 & k_{52}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 & k_{55}^2 & k_{56}^2 \\
0 & 0 & 0 & k_{61}^2 & k_{62}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 & k_{65}^2 & k_{66}^2
\end{array}\right]
\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ 2 \\ \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}
\\
\begin{array}{ccc} 1 \qquad\qquad & \qquad\qquad 2 \qquad\qquad & \qquad\qquad 3 \end{array}
\end{array}
$$

$$
[Kest] = \begin{bmatrix}
k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 & 0 & 0 & 0 \\
k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 & 0 & 0 & 0 \\
k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 & 0 & 0 & 0 \\
k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & (k_{44}^1+k_{11}^2) & (k_{45}^1+k_{12}^2) & (k_{46}^1+k_{13}^2) & k_{14}^2 & k_{15}^2 & k_{16}^2 \\
k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 & (k_{54}^1+k_{21}^2) & (k_{51}^1+k_{22}^2) & (k_{51}^1+k_{23}^2) & k_{24}^2 & k_{25}^2 & k_{26}^2 \\
k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 & (k_{11}^1+k_{31}^2) & (k_{11}^1+k_{32}^2) & (k_{61}^1+k_{33}^2) & k_{34}^2 & k_{35}^2 & k_{36}^2 \\
0 & 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 & k_{45}^2 & k_{46}^2 \\
0 & 0 & 0 & k_{51}^2 & k_{52}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 & k_{55}^2 & k_{56}^2 \\
0 & 0 & 0 & k_{61}^2 & k_{62}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 & k_{65}^2 & k_{66}^2
\end{bmatrix}
$$




$$\{F\}^{e}_{6x1} = [R]^{T}_{6x6} \cdot \{f_p\}_{6x1}$$

$$\{f_p\} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{3}.t_1 + \frac{1}{6}.t_2\right).\ell \\ \left(\frac{7}{20}.g_1 + \frac{3}{20}.g_2\right).\ell \\ \left(\frac{1}{20}.g_1 + \frac{1}{30}.g_2\right).\ell^2 \\ \left(\frac{1}{6}.t_1 + \frac{1}{3}.t_2\right).\ell \\ \left(\frac{3}{20}.g_1 + \frac{7}{20}.g_2\right).\ell \\ \left(-\frac{1}{30}.g_1 - \frac{1}{20}.g_2\right).\ell^2 \end{Bmatrix}$$



Barra 1: $\{F\}^1 = \{\underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{1} \mid \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{2} \mid \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{3}\}^T$

Barra 2: $\{F\}^2 = \{0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad -60 \quad -100 \mid 0 \quad -60 \quad 100\}^T$

$$\{F_{nodal}\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 10 \mid 0 \quad 0 \quad 0\}$$

$$\{Fest\} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_4^1 + F_1^2 \\ F_5^1 + F_2^2 \\ F_6^1 + F_3^2 \\ F_4^2 \\ F_5^2 \\ F_6^2 \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0+0 \\ 0-60 \\ 10-100 \\ \hline 0 \\ -60 \\ 100 \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ 2 \\ \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}$$

Para procurar entender melhor o endereçamento dos termos das matrizes e vetores de cada barra desse exemplo, veja a seguinte consideração.

Barra 1: o valores dos vetor de forças nodais entraram nas linhas 1,2,3,4,5 e 6 (nós 1 e 2)

Barra 2: o valores dos vetor de forças nodais entraram nas linhas 4,5, 6,7,8 e 9 (nós 2 e 3)

Barra 1:

nó 1 (i)→ referente as linhas (3*i-2), (3*i-1) e (3*i) →(1,2,3)

nó 2 (i)→ referente as linhas (3*i-2), (3*i-1) e (3*i) →(4,5,6)

Barra 2:

nó 2 (i)→ referente as linhas (3*i-2), (3*i-1) e (3*i) →(4,5,6)

nó 3 (i)→ referente as linhas (3*i-2), (3*i-1) e (3*i) →(7,8,9)

Assim, para a barra genérica “k” com nó inicial i e final j, o vetor de forças nodais equivalentes dessa barra $f_6$ depois de rotacionado para as coordenas globais, fica endereça no vetor global da estrutura com a seguinte regra:

$$Fest(3 \cdot i - 2) = Fest(3 \cdot i - 2) + f^k(1)$$

$$Fest(3 \cdot i - 1) = Fest(3 \cdot i - 1) + f^k(2)$$

$$Fest(3 \cdot i) = Fest(3 \cdot i) + f^k(3)$$

$$Fest(3 \cdot j - 2) = Fest(3 \cdot j - 2) + f^k(4)$$

$$Fest(3 \cdot j - 1) = Fest(3 \cdot j - 1) + f^k(5)$$

$$Fest(3 \cdot j) = Fest(3 \cdot j) + f^k(6)$$

| *Nó Global* | *Posição Local* | *Posição Global* |
|---|---|---|
| | *1* | *3·j-2* |
| *j* | *2* | *3·j-1* |
| | *3* | *3·j* |
| | *4* | *3·k-2* |
| *k* | *5* | *3·k-1* |
| | *6* | *3·k* |

Para o **endereçamento da matriz do elemento** – já no sistema global – para a matriz da estrutura, a regra é a mesma, entretanto, endereçada com dois índices, linha e coluna, ficando:

| Nó Global | Posição Local | Posição Global |
|---|---|---|
| j | 1 | 3·j-2 |
| | 2 | 3·j-1 |
| | 3 | 3·j |
| k | 4 | 3·k-2 |
| | 5 | 3·k-1 |
| | 6 | 3·k |

$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i-2)+k^k(1,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i-1)+k^k(1,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot i)+k^k(1,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j-2)+k^k(1,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j-1)+k^k(1,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot i-2,\ 3\cdot j)+k^k(1,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i-2)+k^k(2,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i-1)+k^k(2,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot i)+k^k(2,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-2)+k^k(2,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-1)+k^k(2,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j)+k^k(2,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-2)+k^k(3,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-1)+k^k(3,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i)+k^k(3,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-2)+k^k(2,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j-1)+k^k(2,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot i-1,\ 3\cdot j)+k^k(2,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-2)+k^k(3,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i-1)+k^k(3,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot i)+k^k(3,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j-2)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j-2)+k^k(3,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j-1)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j-1)+k^k(3,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j)=Kest(3\cdot i,\ 3\cdot j)+k^k(3,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i-2)=Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i-2)+k^k(4,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i-1)=Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i-1)+k^k(4,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i)=Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot i)+k^k(4,\ 3)$$

| Nó Global | Posição Local | Posição Global |
|---|---|---|
| j | 1 | 3·j-2 |
| | 2 | 3·j-1 |
| | 3 | 3·j |
| k | 4 | 3·k-2 |
| | 5 | 3·k-1 |
| | 6 | 3·k |

$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j-2) = Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j-2) + k^k(4,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j-1) = Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j-1) + k^k(4,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j) = Kest(3\cdot j-2,\ 3\cdot j) + k^k(4,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i-2) = Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i-2) + k^k(5,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i-1) = Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i-1) + k^k(5,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i) = Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot i) + k^k(5,\ 3)$$

$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j-2) = Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j-2) + k^k(5,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j-1) = Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j-1) + k^k(5,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j) = Kest(3\cdot j-1,\ 3\cdot j) + k^k(5,\ 6)$$

$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i-2) = Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i-2) + k^k(6,\ 1)$$
$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i-1) = Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i-1) + k^k(6,\ 2)$$
$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i) = Kest(3\cdot j,\ 3\cdot i) + k^k(6,\ 3)$$

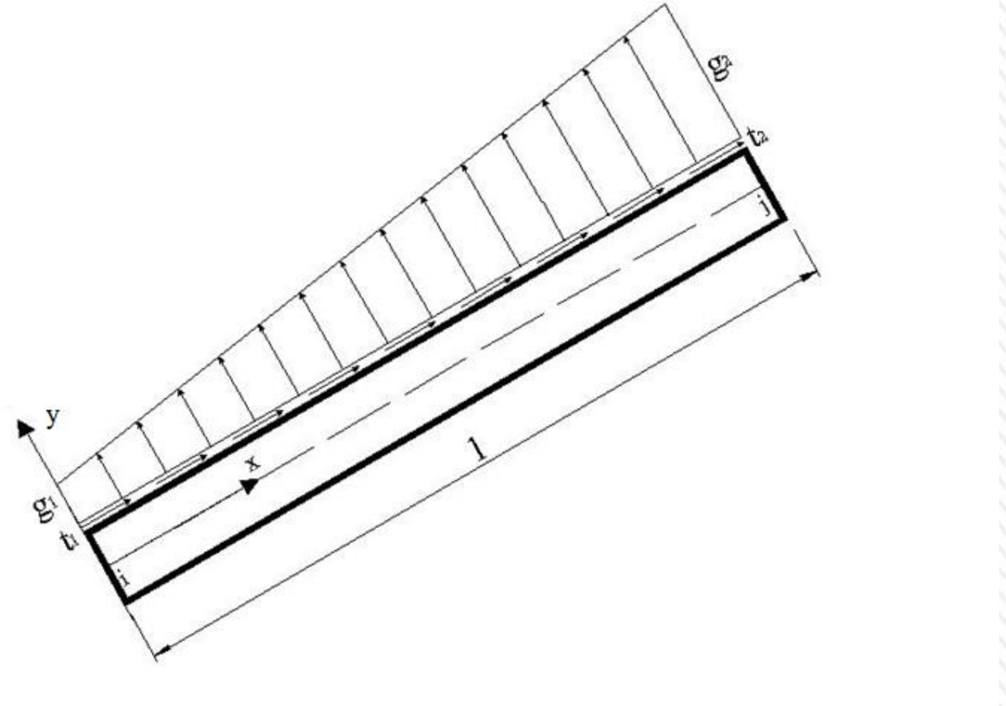
$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j-2) = Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j-2) + k^k(6,\ 4)$$
$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j-1) = Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j-1) + k^k(6,\ 5)$$
$$Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j) = Kest(3\cdot j,\ 3\cdot j) + k^k(6,\ 6)$$

# DADOS DE ENTRADA – PARTE 2

**DADOS DE FORÇAS**

*Concentradas:*
Valores de Fx, Fy, M no nó

Forças distribuídas na barra:
t1,t2,g1,g2




**Por exemplo:**
Var. real: Fconcen (3*NN):
Fconcen (39) = - 4; nó 13 na direção de momento tem um valor de -4 (momento, sentido horário)
Fconcen (7) = 7.9; nó 3 na direção de Fx tem valor de 7.9 (força horiz. aplicado p/ direita)

Var. real: t1(NE), t2(NE), g1(NE), g2(NE)
g1(3) = -12 e g2(3) = -12: força distribuída constantemente de -12 sobre elemento 3
g1(2) = 6 e g2(2) = 0: força distribuída linear de 6 no nó inicial e 0 no nó final do elemento 2

# Pseudocódigos – Parte 2

**Início do Programa Principal**

....

*Chamar Rotina Ler dados acoes (Fconcen, NN , g1 ,g2 ,t1, t2, NE)*

***Fazer j de 1 até NE***

*Chamar Rotina Montar Matriz de Rotacao Barra* ( $X_1^j, Y_1^j, X_2^j, Y_2^j, L_j, R_j$ )

*Chamar Rotina Montar Matriz de Rigidez Barra* ( $L_j, E_j, I_j, A_j, k$ )

*Chamar Rotina Transposta Matriz* ( $Rt_j, R_j, 6, 6$ )

*Chamar Rotina Multiplica Matriz-Matriz* ( $A, Rt_j, k, 6, 6, 6$ )

$$[K]_{6x6} = [R]^T . [k]_{6x6} . [R]$$

*Chamar Rotina Multiplica Matriz-Matriz* ( $B, A, R_j, 6, 6, 6$ )

*Chamar Rotina Monta Vetor Forcas* (g1, g2, t1, t2, $f_{p_j}$, 6)

$$\{F\}^e_{6x1} = [R]^T_{6x6} \cdot \{f_p\}_{6x1}$$

*Chamar Rotina Multiplica Matriz-Vetor* ( $F, Rt_j, f_{p_j}, 6, 6$ )

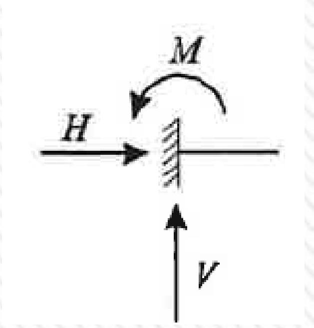
*Chamar enderecamento matriz rigidez elemento* ( $K_{est}$, B)

*Chamar enderecamento vetor forca nodais* ( $F_{est}$, F, $F_{concen}$ )

***Fim de Fazer j***

# Condições de contorno

Forma compacta: $[K]_{3nnx3nn} \cdot \{U\}_{3nn} = \{F\}_{3\cdot nn}$




K: matriz singular, movimento de corpo rígido não impedidos

Prescreve condições de contorno em deslocamentos, equilíbrio estático

Mediante técnicas adequadas

- Partição do sistema
- Zeros e um
- Número grande

## Condições de contorno - Partição do sistema

$\boldsymbol{U_B}$: deslocamentos conhecidos

$\boldsymbol{U_L}$: deslocamentos desconhecidos

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{LL}} & \boldsymbol{K_{LB}} \\ \boldsymbol{K_{BL}} & \boldsymbol{K_{BB}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U_L} \\ \boldsymbol{U_B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F_L} \\ \boldsymbol{F_B} \end{Bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K_{LL}}]\{\boldsymbol{U_L}\} = \{\boldsymbol{F_L} - \boldsymbol{K_{LB}}\boldsymbol{U_B}\}$$

$$\{\boldsymbol{F_B}\} = \boldsymbol{K_{BL}}\boldsymbol{U_L} + \boldsymbol{K_{BB}}\boldsymbol{U_B}$$

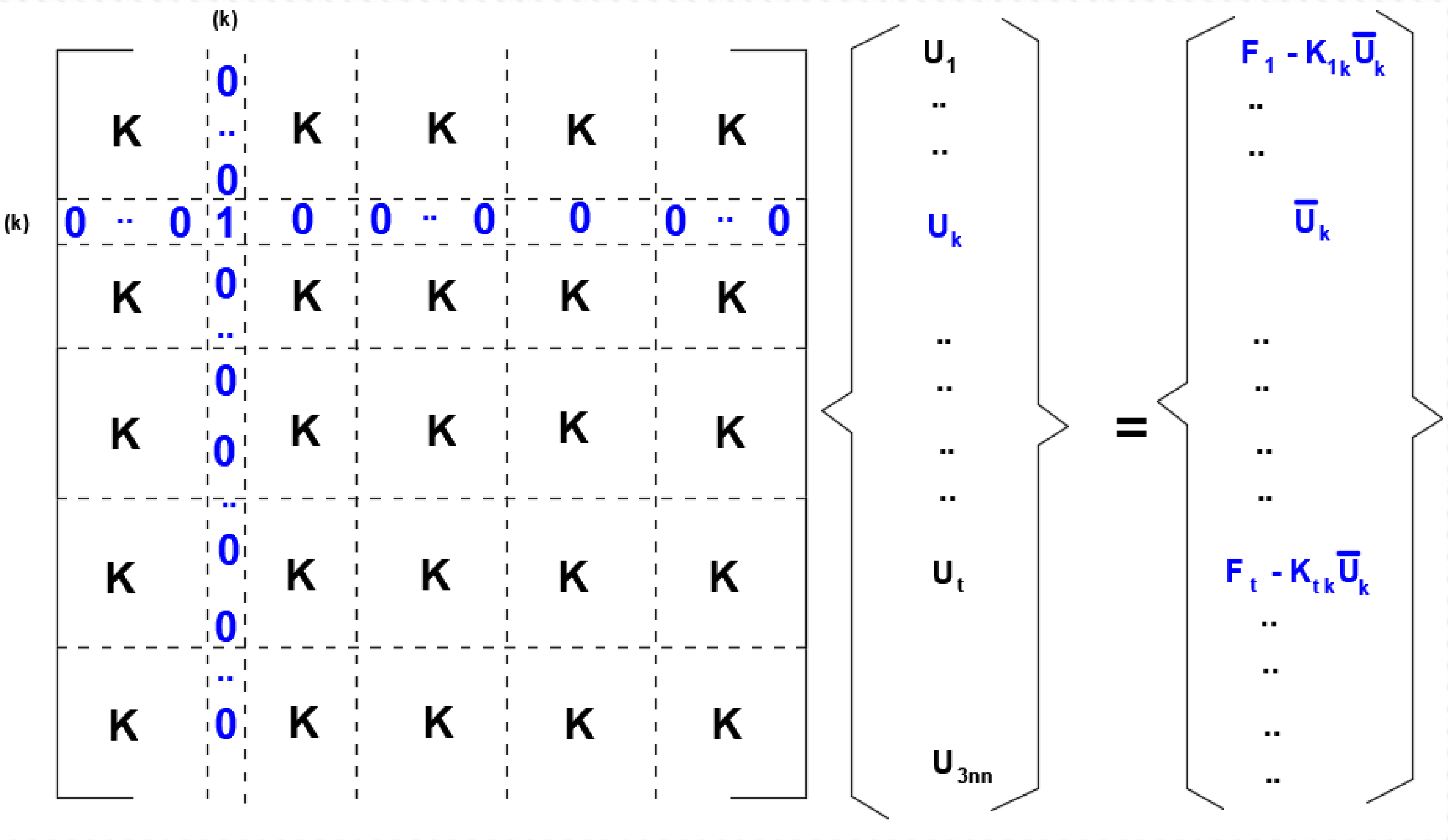
Obtém reações da estrutura

Obtém deslocamentos livres da estrutura

- Adequado para sistemas pequenos, não genéricos (fazer a mão)
- Aumento do comprimento de banda, não adequado para sistemas lineares grandes
- Restringe aplicação de técnicas de minimização de banda, otimização inteira

# Condições de contorno – “zeros e uns”

Valor prescrito: $U_k = \bar{U}_k$




Reações: $F_q = \sum_{p=1}^{3nn} K_{kp}\bar{U}_k$

- Mantem características espectrais da matriz, não afeta seu condicionamento
- Fácil implementação, direto, sem alteração sistema final
- Não aplicado a análise dinâmica

## *Técnica de "zeros e uns"*

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & .. & k_{1j} & k_{13nn} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & .. & k_{2j} & k_{23nn} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & .. & k_{3j} & k_{33nn} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ k_{j1} & k_{j2} & k_{j3} & .. & k_{jj} & k_{j3nn} \\ k_{3nn1} & k_{3nn2} & k_{3nn3} & .. & k_{3nnj} & k_{3nn3nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ .. \\ U_j \\ U_{3nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ .. \\ F_j \\ F_{3nn} \end{Bmatrix} \qquad (42)$$

Suponha-se que os graus de liberdade (deslocamento ou rotação) das posições "2" e "j" sejam nulos, ou seja:

$U_2 = 0$ e $U_j = 0$

Assim, pela técnica de "zeros e uns", o sistema linear final fica:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \phantom{k_{11}} & \text{coluna 2} & \phantom{k_{13}} & \phantom{..} & \text{coluna j} & \phantom{k_{13nn}} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & .. & 0 & k_{13nn} \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & .. & 0 & k_{33nn} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 \\ k_{3nn1} & 0 & k_{3nn3} & .. & 0 & k_{3nn3nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ .. \\ U_j \\ U_{3nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \\ .. \\ 0 \\ F_{3nn} \end{Bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \text{linha 2} \\ \\ \\ \text{linha j} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

# Condições de contorno - Número grande

Valores nulos: $\boldsymbol{U_2 = 0}$

$\boldsymbol{U_j = 0}$

Atribuir valor muito grande para o termo da diagonal a ser anulado

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & .. & k_{1j} & k_{13nn} \\ k_{21} & \infty & k_{23} & .. & k_{2j} & k_{23nn} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & .. & k_{3j} & k_{33nn} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ k_{j1} & k_{j2} & k_{j3} & .. & \infty & k_{j3nn} \\ k_{3nn1} & k_{3nn2} & k_{3nn3} & .. & k_{3nnj} & k_{3nn3nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ .. \\ U_j \\ U_{3nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ .. \\ F_j \\ F_{3nn} \end{Bmatrix}$$

- Inadequado para sistemas resolvidos por métodos que dependem do nr. de condição (autovalores): Gradiente Conjugado
- Fácil implementação, direto, sem alteração sistema final
- Aplicado a análise dinâmica

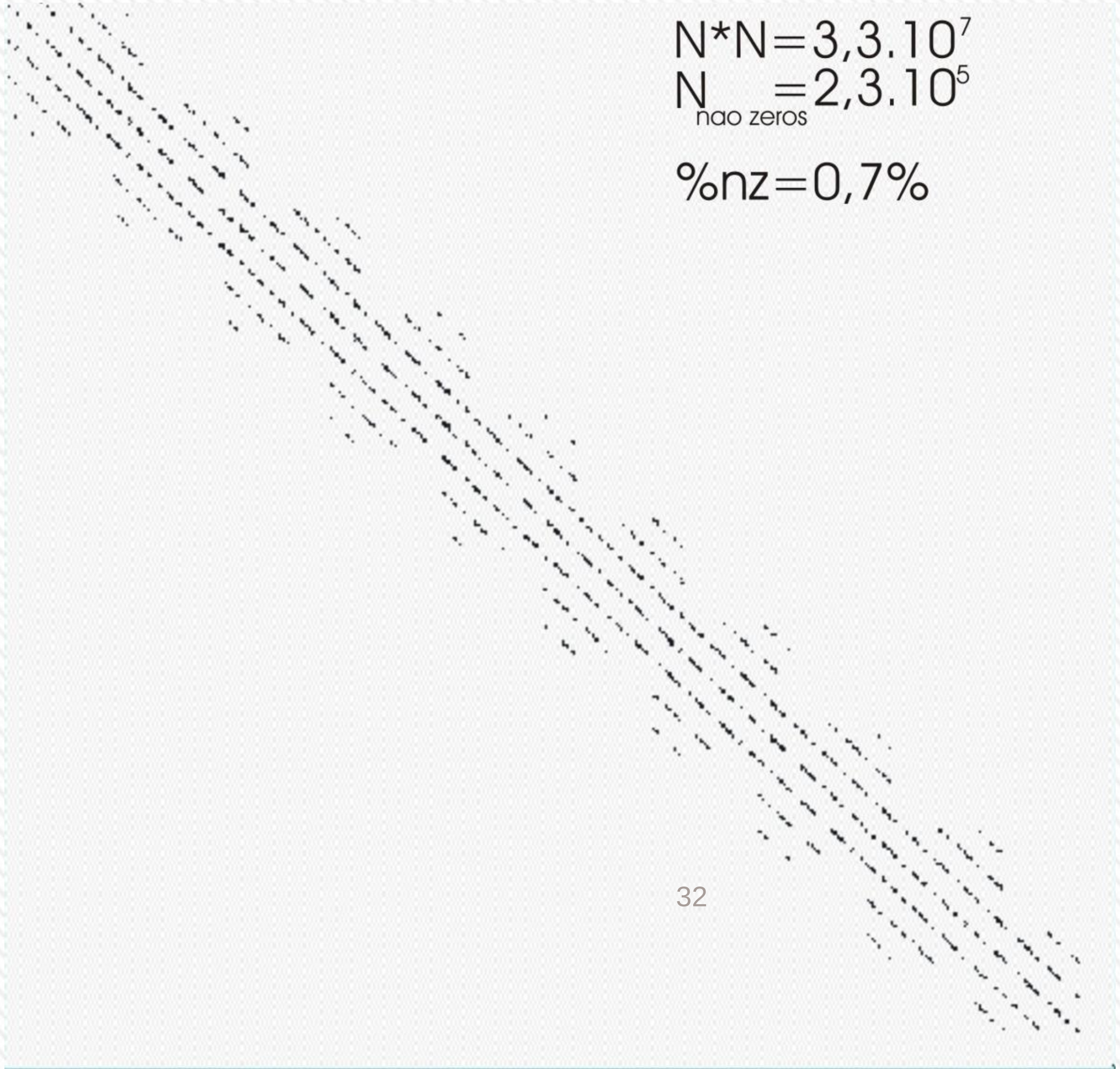
# Características da matriz de rigidez (K)

ser altamente esparsa

ser positiva-semidefinida

ser simétrica

ser bem estruturada





32

# Resolução de sistema linear

Matriz simétrica, positiva definida, esparsa, bem estruturada

**Métodos diretos**

Eliminação de Gauss, Cholesky, Gauss-Jordan

Matriz cheia: $O\left(\frac{n^3}{3}\right)$

Matriz banda: $O(\frac{n.nb^2}{2})$

Armazenamento por faixa
Armazenamento posição efetiva

Minimizar distâncias entre os nós conectados: diminuir efeito *fill-in*

**Métodos iterativos**

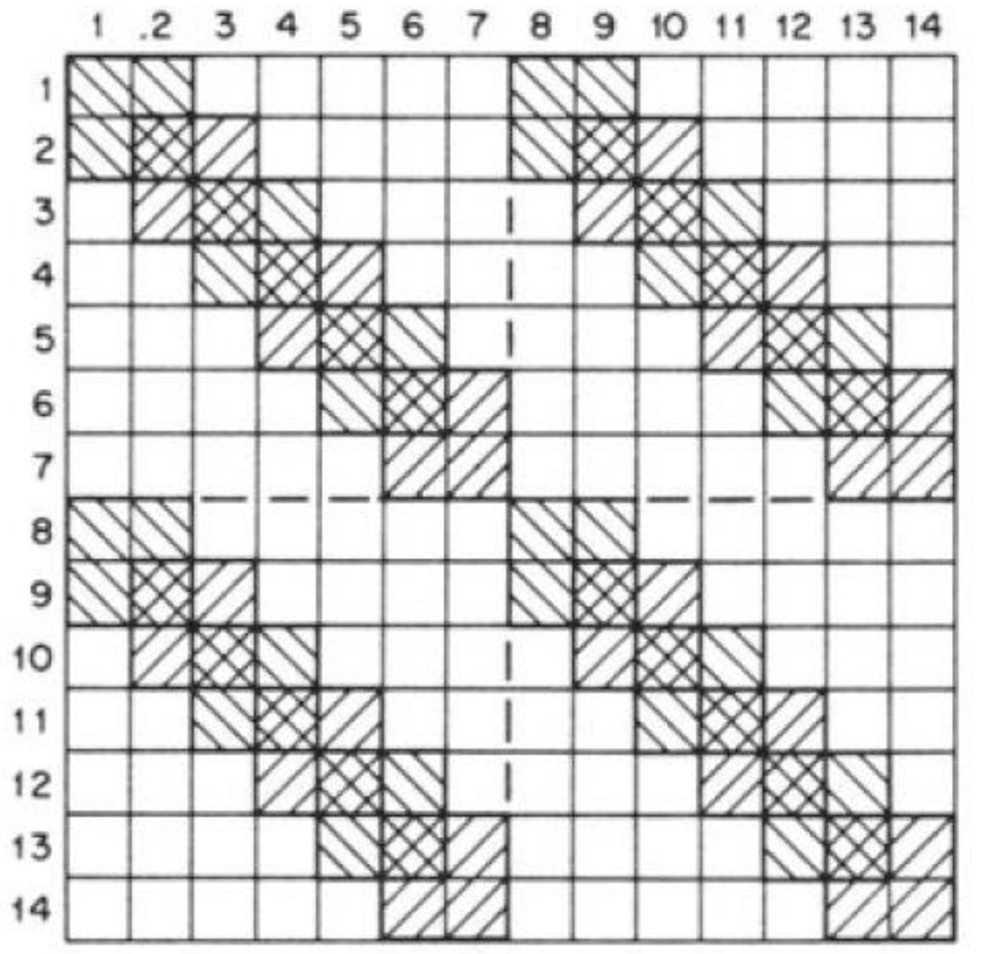
Gauss-Seidel, Jacobi, Quase-Newton, Gradientes Conjugados

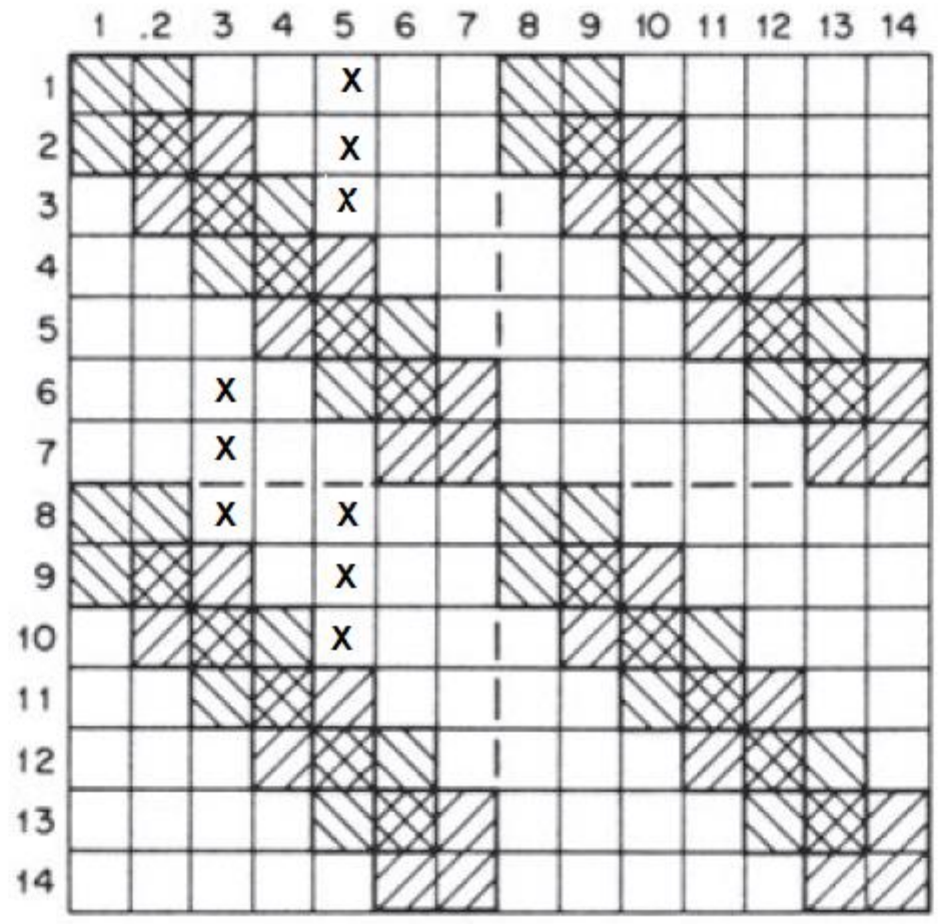
Matriz esparsa: $O(iter.n.nb)$

Dependem mais do condicionamento (autovalores) da matriz

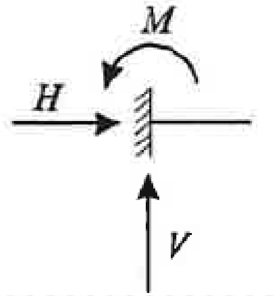
$\boldsymbol{nb \sim (0,01\ a\ 0,1).nn}$

# Efeito *Fill-In*



## DADOS DE ENTRADA – PARTE 3




**Condições de contorno**

Definir tipos de vínculos nos nós restritos

**Por exemplo:**
Var. vetor de inteiros: COND (3*NN):

COND (1) = 1; deslocamento na direção x do nó 1 restrito

COND (12) = 1; rotação do nó 4 restrito
COND (11) = 1; deslocamento na direção y do nó 4 restrito
COND (10) = 1; deslocamento na direção x do nó 4 restrito

Ou seja, o nó 4 é um engaste.

Dica: Gere COND = 0, ou seja, livre para todos os nós e depois indique apenas os restritos com valor "1"

## Pseudocódigos – Parte 3

**Início do Programa Principal**

.........

*Chamar Rotina Ler dados restricao (NN, COND)*

.........

***Fazer j de 1 até NE***

Montando matriz de rigidez e vetor de forças nodais equivalentes da estrutura: Kest, Fest

....

....

....

....

***Fim de Fazer j***

*Chamar condição contorno ($F_{est}$, $K_{est}$, NN, COND)*

Chamar Rotina Resolver Sistema Linear (*$F_{est}$, $K_{est}$, U, NN)*

**Fim do Programa Principal**

```
Início da Rotina CondContZeroUm(Kest,Fest,nn,COND)
// Input:
// Kest: matriz de rigidez da estrutura
// Fest: vetor de forças de toda a estrutura
/ nn: numero de nós da estrutura
//COND: vetor que indica se grau de liberdade está livre (0) ou impedido (1)
// Output:
// Kest: matriz de rigidez da estrutura com condições de contorno
// Fest: vetor de forças de toda a estrutura  com condições de contorno
//Declaração de variáveis
Inteiros nn,Cond(3nn)
Real Kest(3nn,3nn), Fest(3nn)

Fazer i de 1 até 3nn
        Se ( Cond(i) = 1 ) então
                Fazer j de 1 até 3nn
                        Kest(j,i) = 0
                        Kest(i,j) = 0
               Fim de Fazer j
              Kest(i,i) = 1
             Fest(i) = 0
        Fim entao
Fim de Fazer i
```

***Início da Rotina CondContPenalty (Kest, Fest, nn, COND)***

```
// Input:
// Kest: matriz de rigidez da estrutura
// Fest: vetor de forças de toda a estrutura
/ nn: número de nós da estrutura
//COND: vetor que indica se grau de liberdade está livre (0) ou impedido (1)
// Output:
// Kest: matriz de rigidez da estrutura com condições de contorno
// Fest: vetor de forças de toda a estrutura com condições de contorno
//Declaração de variáveis
Inteiros nn, Cond (3nn)
Real Kest(3nn,3nn), Fest(3nn), INF

INF = 0
Fazer i de 1 até 3nn
Fazer j de 1 até 3nn
            INF = Max ( INF, modulo(Kest(i,j) )
Fim de Fazer j
Fim de Fazer i
INF <- INF*1E10
Fazer i de 1 até 3nn
      Se ( Cond(i) = 1 ) então
            Kest(i,i) = INF
      Fim entao
Fim de Fazer i
```