Uma Análise Intuitiva do Método dos Elementos Finitos

Eletrostática
e
Magnetostática

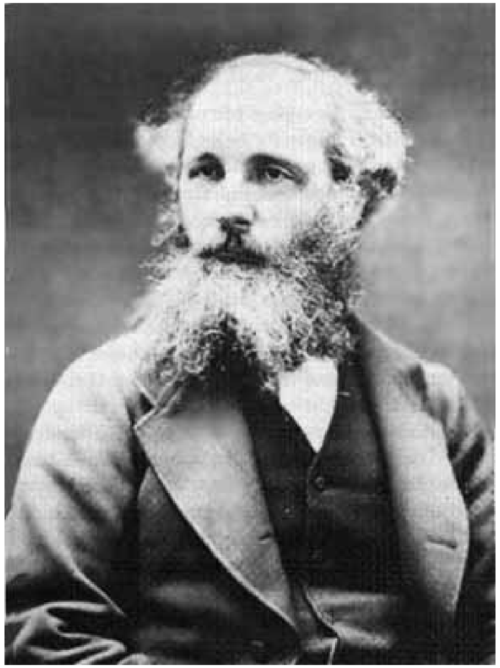
Equações de Maxwell

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_s \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_\Sigma \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_\tau \rho \cdot d\tau$$



(1831 - 1879)

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

Os problemas estáticos

- **Eletrostática**

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_\Sigma \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, d\tau$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

- **Magnetostática**

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Definição de potenciais

- **Eletrostática**

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

- **Magnetostática**

$$\oint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

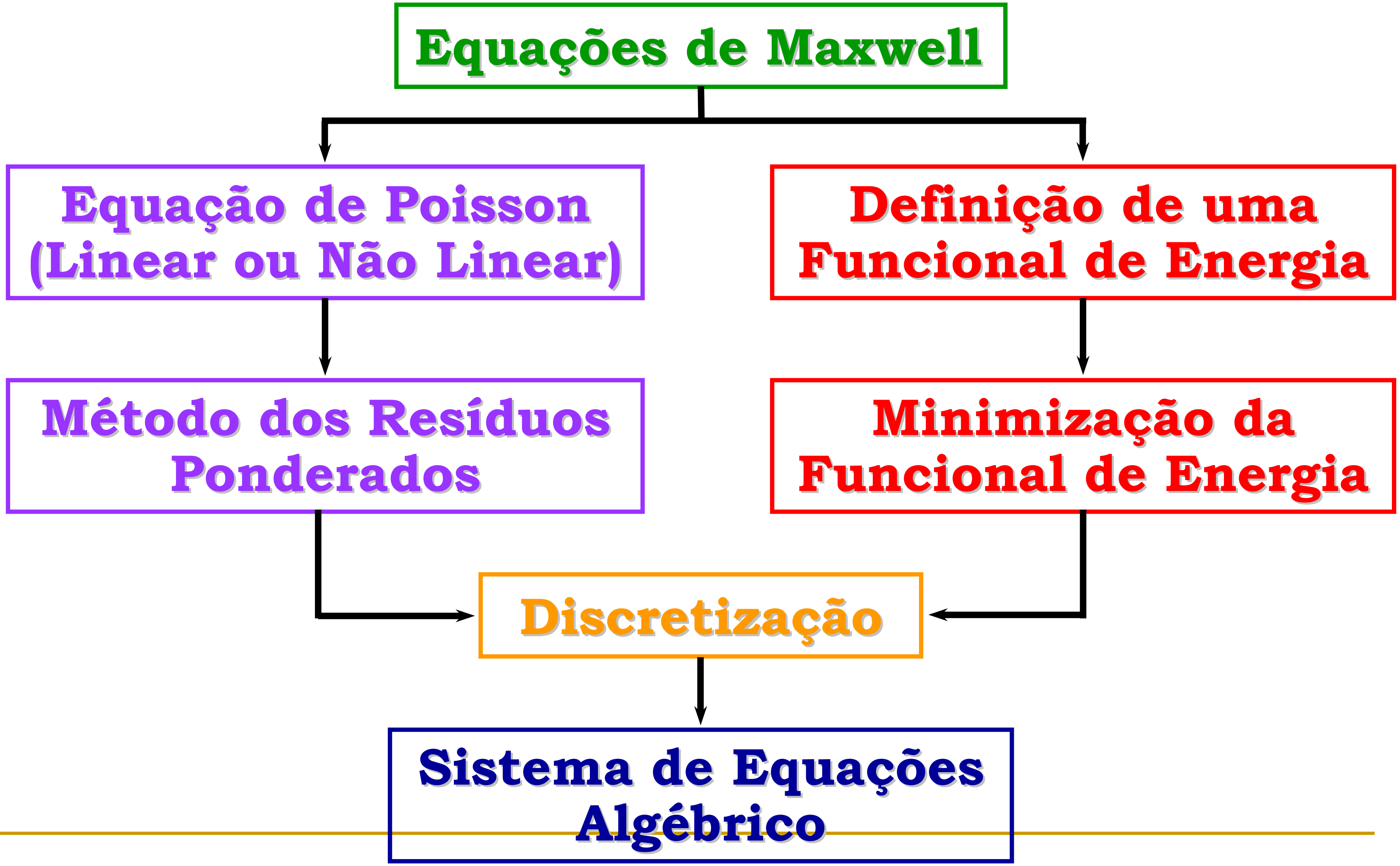
$$\Downarrow$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Método dos Elementos Finitos

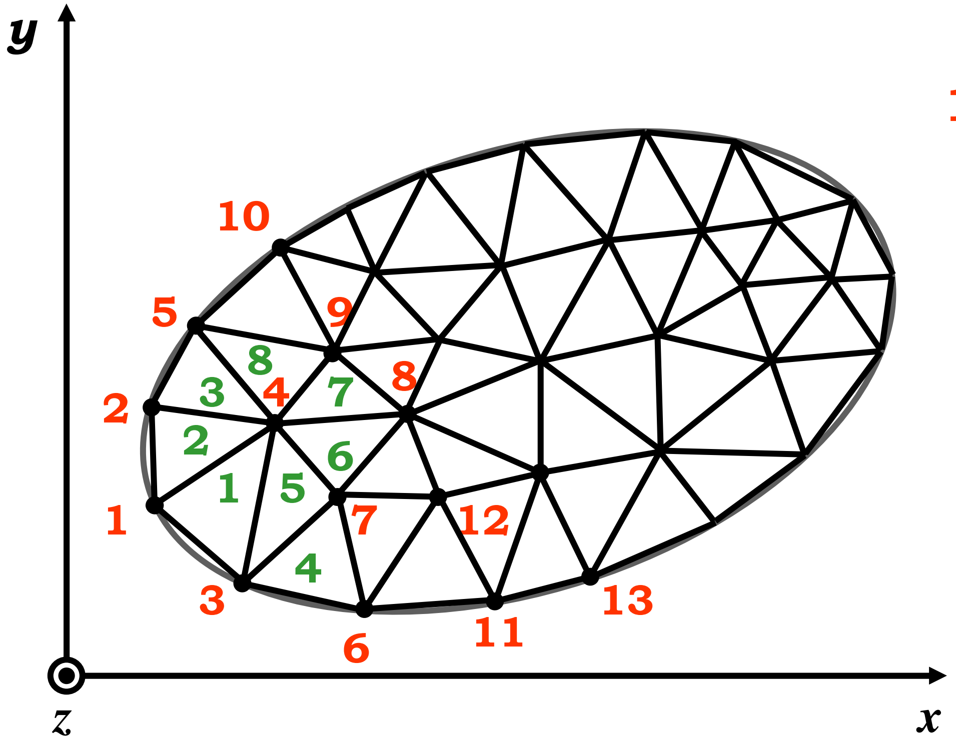
- Algumas Premissas:
- *Os problemas a serem analisados são bidimensionais.*
- *Dividir o domínio em estudo em elementos. No caso triângulos.*
- *Objetivo: determinar o* ***potencial*** *em cada vértice (nó). Posteriormente determinar* ***Campos nos elementos*** *e outras grandezas (<u>Capacitâncias</u>, <u>Indutâncias, Forças</u>, <u>Torques</u>)*
- *Com o potencial:*
  - *Impor o potencial nas fronteiras em que ele é conhecido* ✓
  - *Não será necessário verificar fronteiras em que* $\partial\varphi/\partial n = 0$ ✓

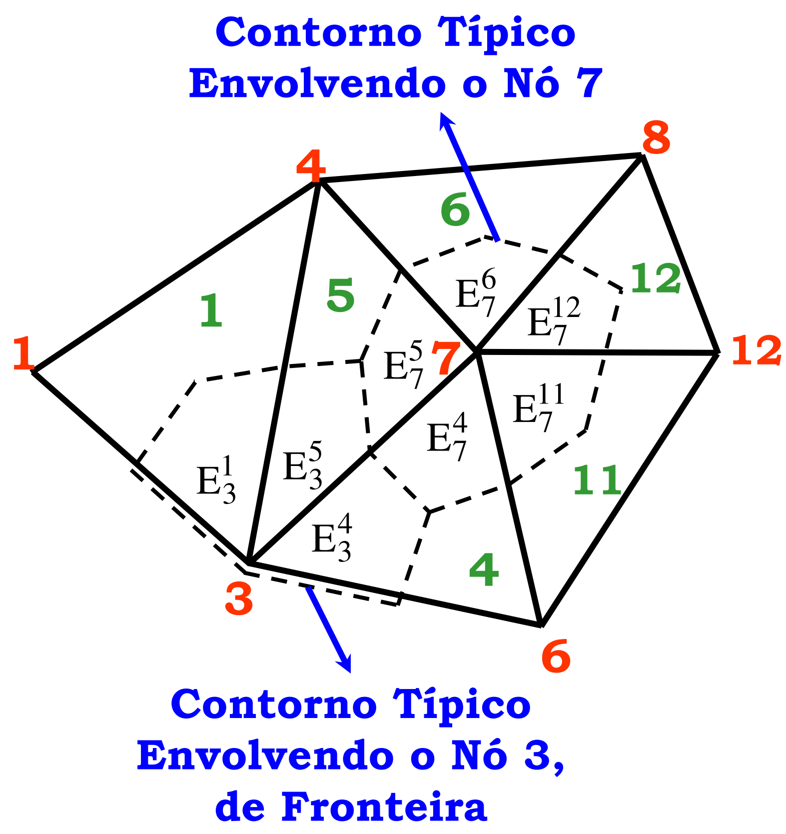
Formulações Clássicas do M.E.F.



Regiões de Controle

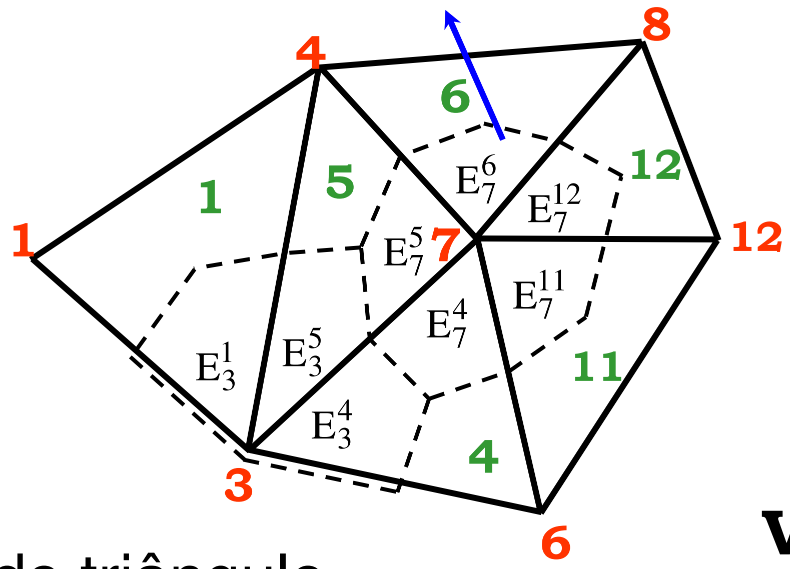
- **Numeração dos Nós**
- **Numeração dos Elementos**





Volume de Controle (Problema Eletrostático)

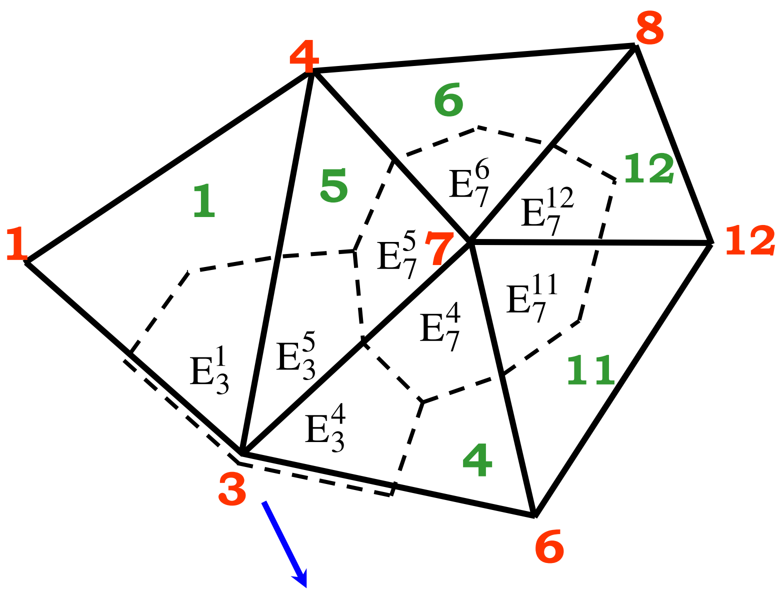
$$E_7^5 + E_7^6 + E_7^{12} + E_7^{11} + E_7^4 = \oint_{\Sigma_7} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$



E_M^N Contribuição do triângulo N ao fluxo em torno do nó M

Válido para qualquer Nó "interno"

Volume de Controle (Problema Eletrostático)



Contorno Típico Envolvendo o Nó 3, de Fronteira

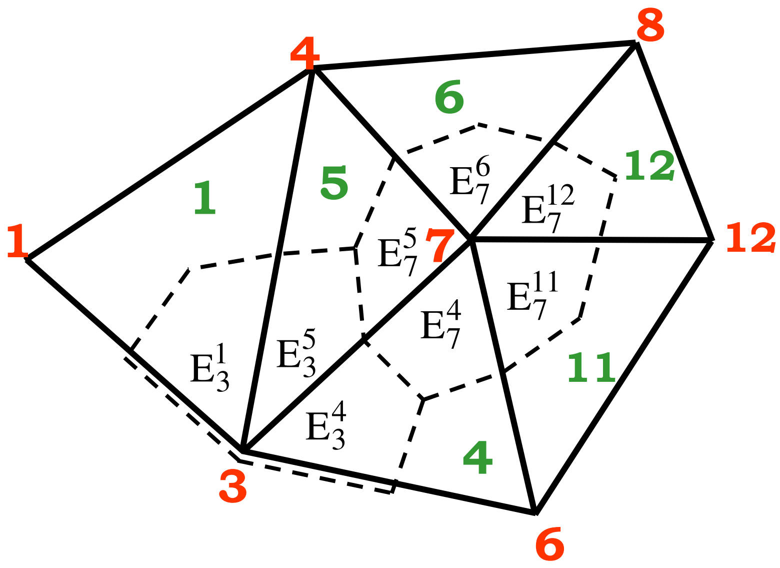
$$E_3^1 + E_3^5 + E_3^4 = \oint_{\Sigma_3} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Válido para qualquer Nó na fronteira

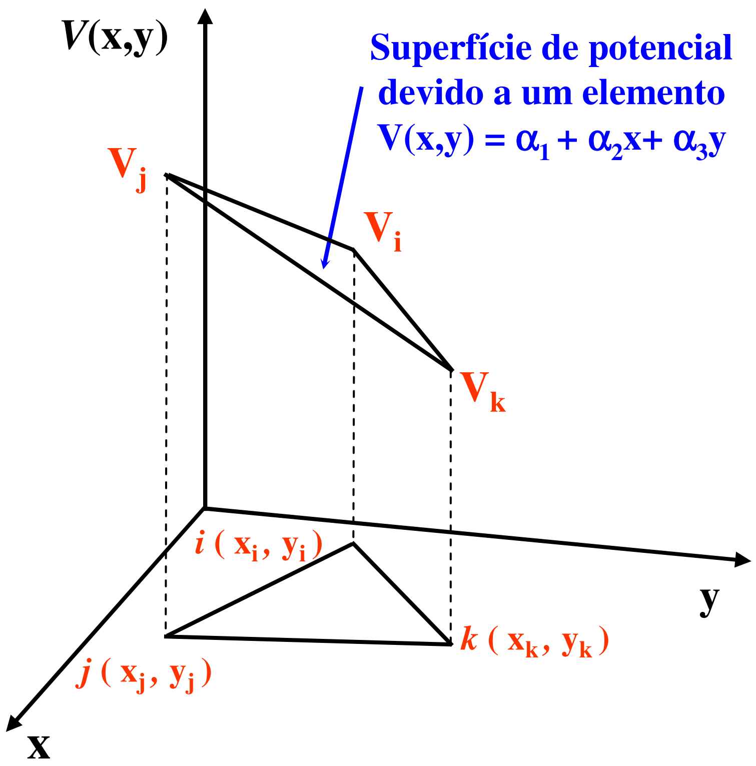
Volume de Controle (Problema Eletrostático)

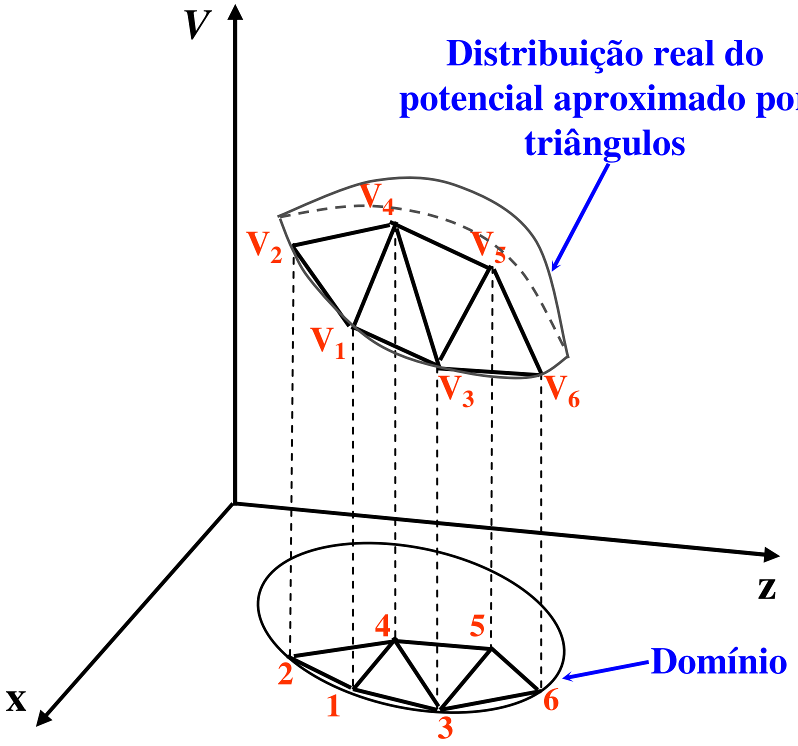
Aplica-se a Lei de Gauss para todos os nós

$$\sum_{e=1}^{NE} E_i^e = \sum_{e=1}^{NE} Q_i^e$$



Aproximação do Potencial (V) Internamente ao Elemento





Aproximação Linear do Potencial (V)

$$\textit{no elemento}$$

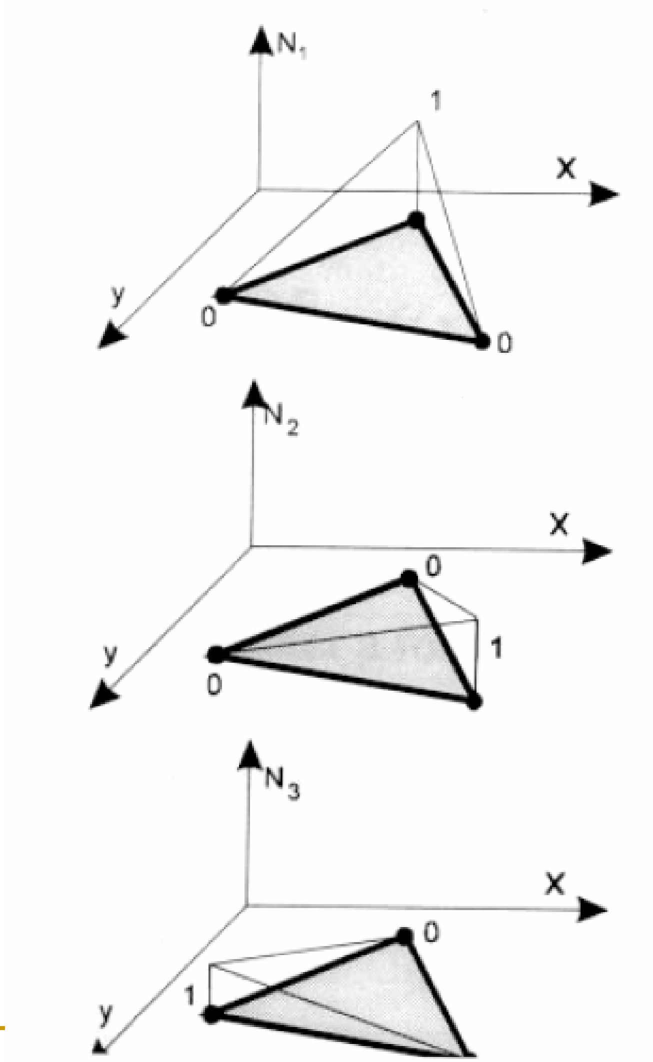
$$V(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \times V_i$$

Aproximação: Função de Forma

$N_i(x,y)$ ➔ função de forma

Propriedade:

$$N_i(x,y) = \begin{cases} se\left(x = x_i \; e \; y = y_i\right) = 1 \\ se\left(x = x_j \; e \; y = y_j\right) = 0 \\ se\left(x = x_k \; e \; y = y_k\right) = 0 \end{cases}$$



Aproximação: Função de Forma

Assim, se $N_i(x, y) = p_i + q_i x + r_i y$

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = p_i + q_i x_i + r_i y_i = 1 \\ N_i(x_j, y_j) = p_i + q_i x_j + r_i y_j = 0 \\ N_i(x_k, y_k) = p_i + q_i x_k + r_i y_k = 0 \end{cases}$$

3 equações e 3 incógnitas (*p_i*, *q_i* *e* *r_i*)

Aproximação: Função de Forma

$$N_i(x, y) = p_i + q_i x + r_i y$$

$$N_i(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}$$

$$2\Delta \rightarrow 2 \times Área\, do\, Triângulo$$

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j; \quad b_i = y_j - y_k; \quad c_i = x_k - x_j \\ a_j = x_k y_i - x_i y_k; \quad b_j = y_k - y_i; \quad c_j = x_i - x_k \\ a_k = x_i y_j - x_j y_i; \quad b_k = y_i - y_j; \quad c_j = x_j - x_i \end{cases}$$

O Valor do Vetor Campo Elétrico e do Vetor Densidade de Fluxo Elétrico no Elemento

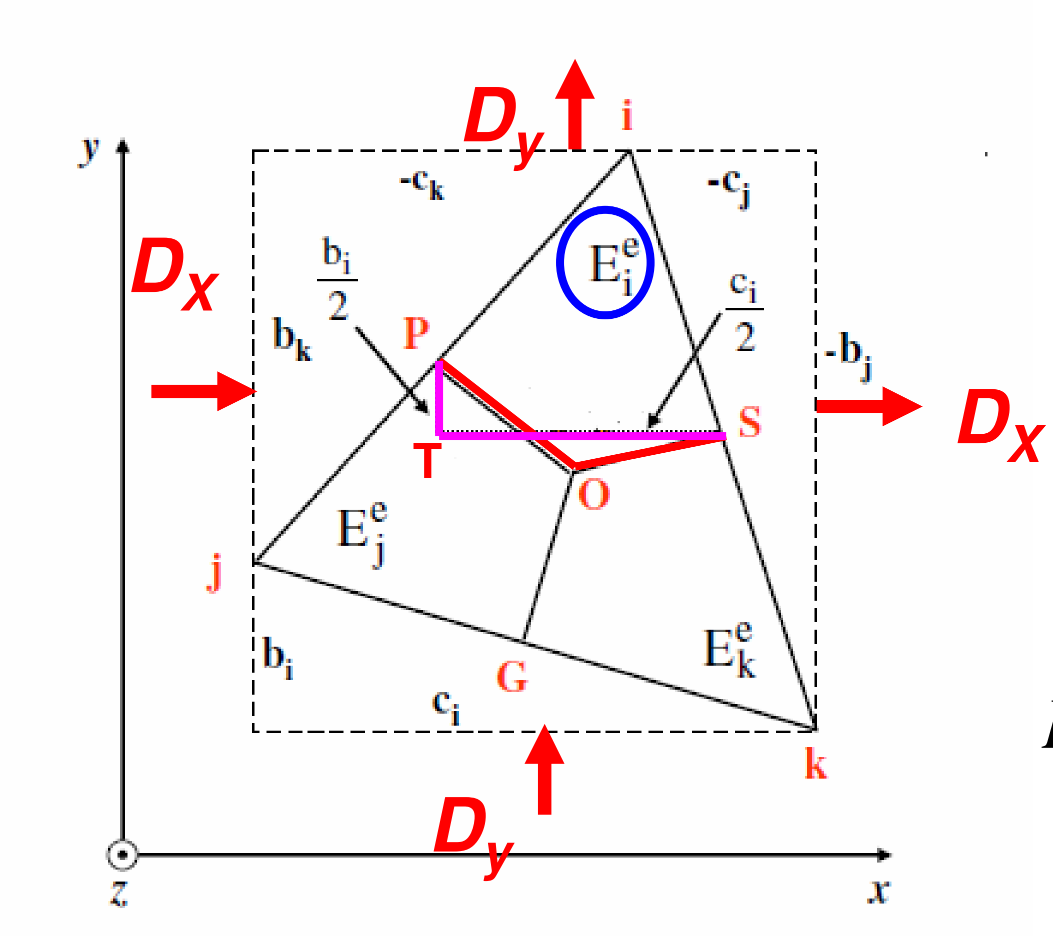
$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -\varepsilon\nabla\varphi$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{b_i\,\vec{u}_x}{2\Delta} + \frac{c_i\,\vec{u}_y}{2\Delta}\right)V_i$$

$$\vec{D} = \varepsilon\sum_{i=1}^{3}\frac{\left(-b_i\vec{u}_x - c_i\vec{u}_y\right)}{2\Delta}V_i$$

Módulo dos dois Vetores é constante no elemento, pois φ varia linearmente tanto com x como y

Contribuições de um Elemento Genérico



$$E_i^e = ?$$

Fluxo de D por **POS**

$$E_i^e = \int_{POS} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

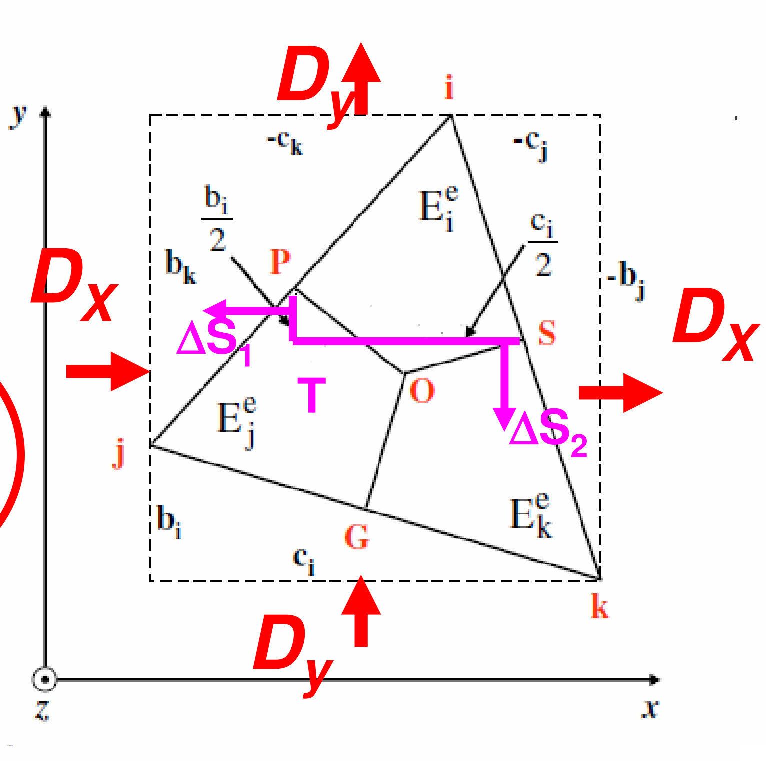
mas $\vec{D}$ é constante no elemento

$$E_i^e = \int_{\boxed{POS}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\boxed{PTS}} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Contribuições de um Elemento Genérico

$$E_i^e = \int_{POS} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{P}^{T} \vec{D}\cdot d\vec{S}_1 + \int_{T}^{S} \vec{D}\cdot d\vec{S}_2$$

$$E_i^e = -D_x \cdot \Delta S_1 - D_y \cdot \Delta S_2$$



$$\Delta S_1 = (y_P - y_T)\times 1 = \frac{(y_j - y_k)}{2}\vec{u}_x = -\frac{b_i}{2}\vec{u}_x$$

$$\Delta \vec{S}_2 = (x_S - x_T)\times 1 = \frac{(x_k - x_j)}{2}\vec{u}_y = -\frac{c_i}{2}\vec{u}_y$$

Contribuições de um Elemento Genérico

$$E_i^e = \overbrace{\left[\varepsilon \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(-b_i \vec{u}_x - c_i \vec{u}_y\right)}{2\Delta} V_i \right]}^{\vec{D}} \times \left(-\frac{b_i}{2}\vec{u}_x - \frac{c_i}{2}\vec{u}_y \right)$$

$$E_i^e = \frac{\varepsilon}{4\Delta} \times \left[(b_i b_i + c_i c_i) + (b_i b_j + c_i c_j) + (b_i b_k + c_i c_k) \right]$$

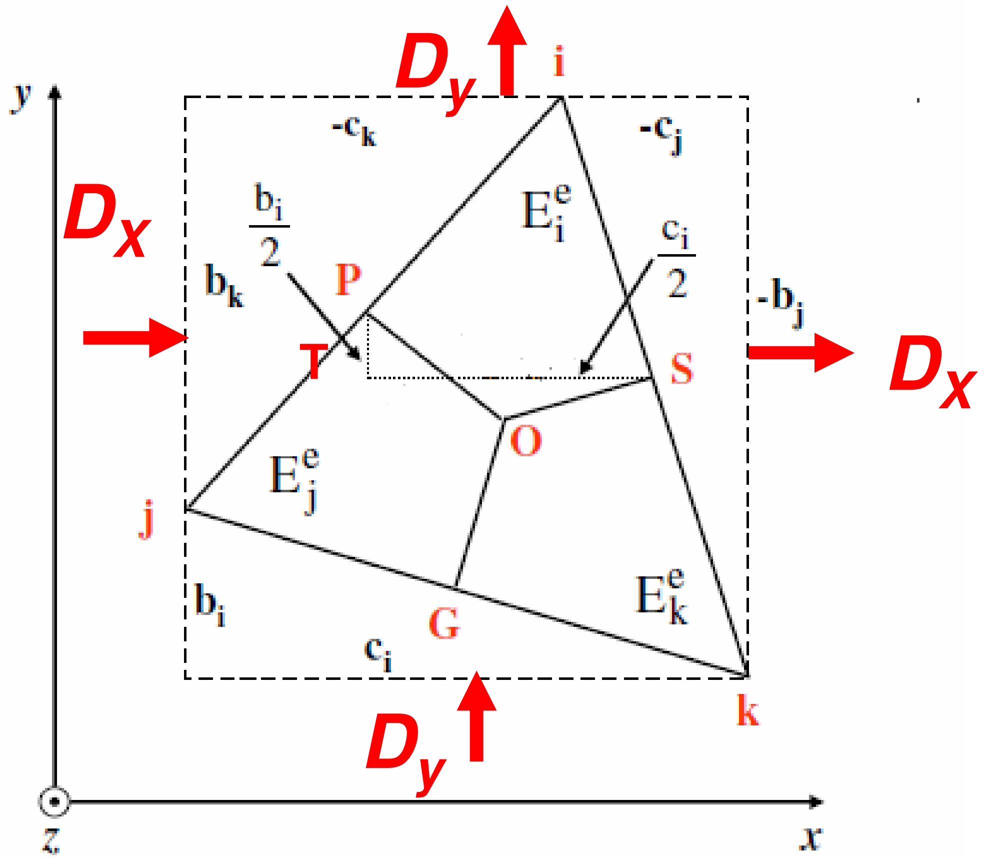
Realizando o mesmo procedimento para os demais nós:

$$\begin{bmatrix} E_i^e \\ E_j^e \\ E_k^e \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{bmatrix}$$

A modelagem do termo de carga

- Caso exista carga no elemento, usualmente adota-se o seguinte procedimento para cada elemento:

$$Q_i^e = Q_j^e = Q_k^e = \frac{\rho\Delta}{3}$$



Sistema de Equações

- Obtém-se:
  - $[K]\,[\,V] = [\,Q]$

- E cada linha é a Lei de Gauss aplicada para um determinado nó.

O Problema Magnetostático

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

A ➔ potencial vetor magnético

O problema Magnetostático em duas dimensões

Se por hipótese: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Então se B fica no plano x0y

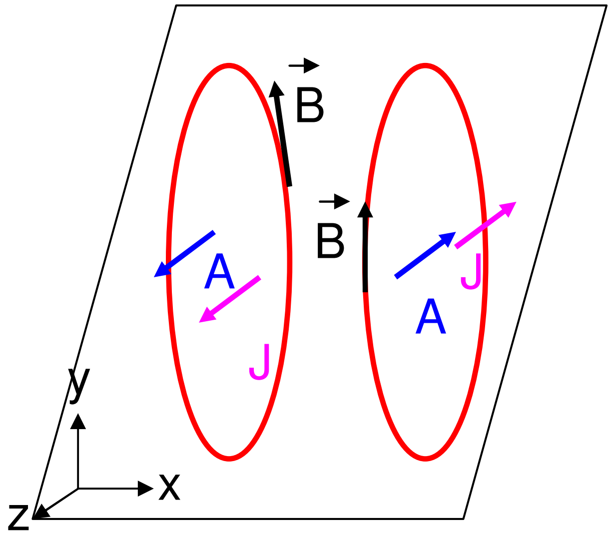
$$\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y$$

Então o Potencial Vetor Magnético (A) fica na direção z

$$\vec{A} = A_z \vec{u}_z$$

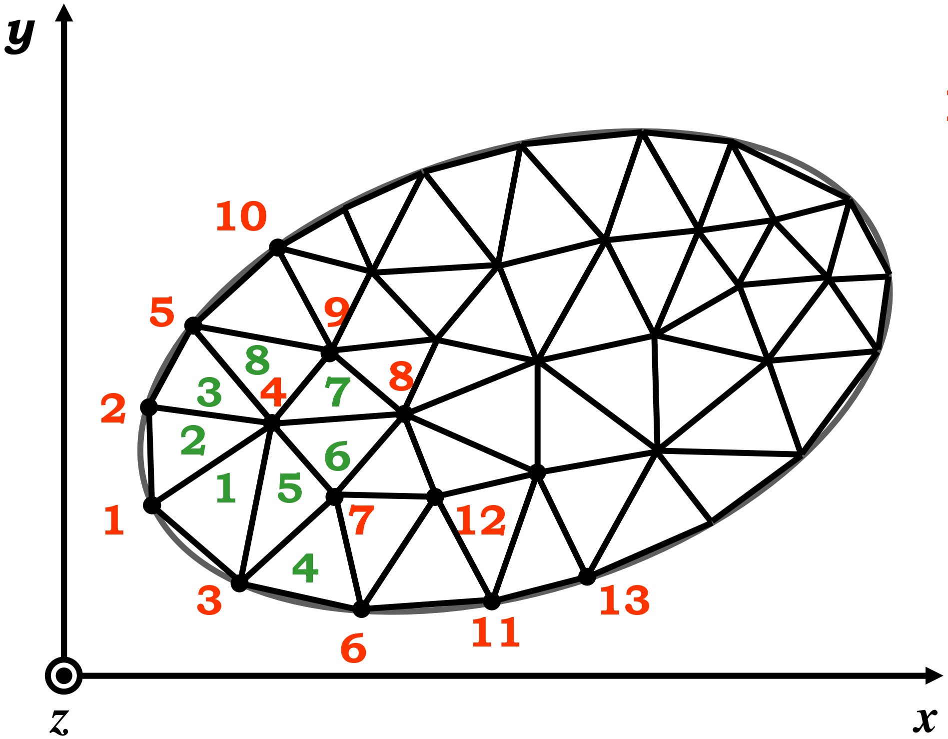
A Densidade de Corrente (J) ficará na direção z

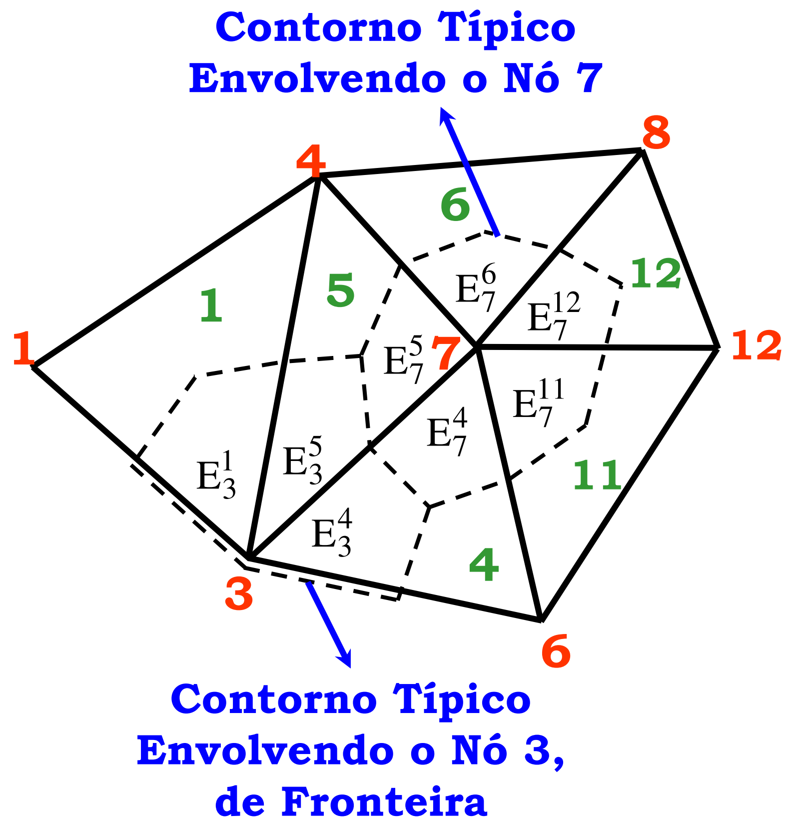
$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \left(\nu \vec{B} \right) = \vec{J}$$



Regiões de Controle -Magnetostática

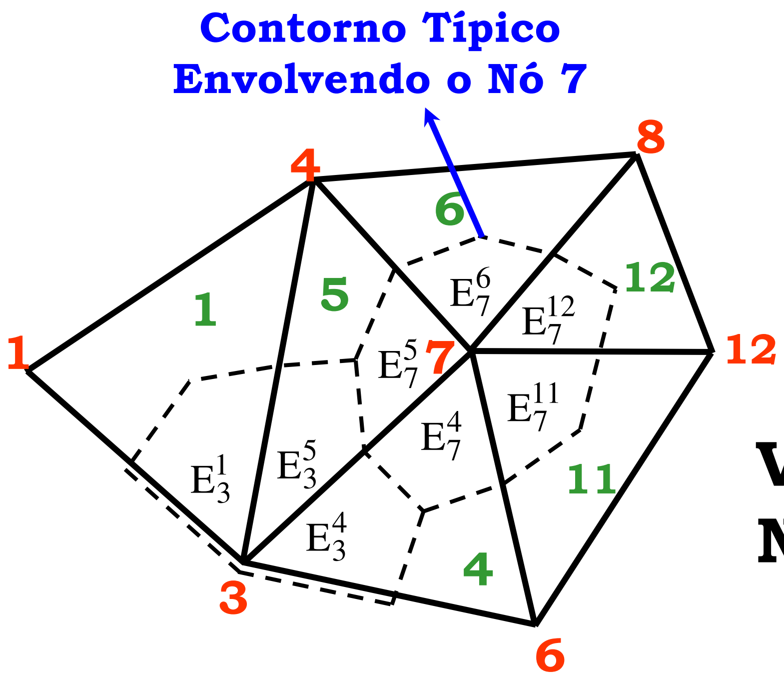
- Numeração dos Nós
- Numeração dos Elementos





Volume de Controle (Problema Magnético)

$$E_7^5 + E_7^6 + E_7^{12} + E_7^{11} + E_7^4 = \oint_{\Sigma_7} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

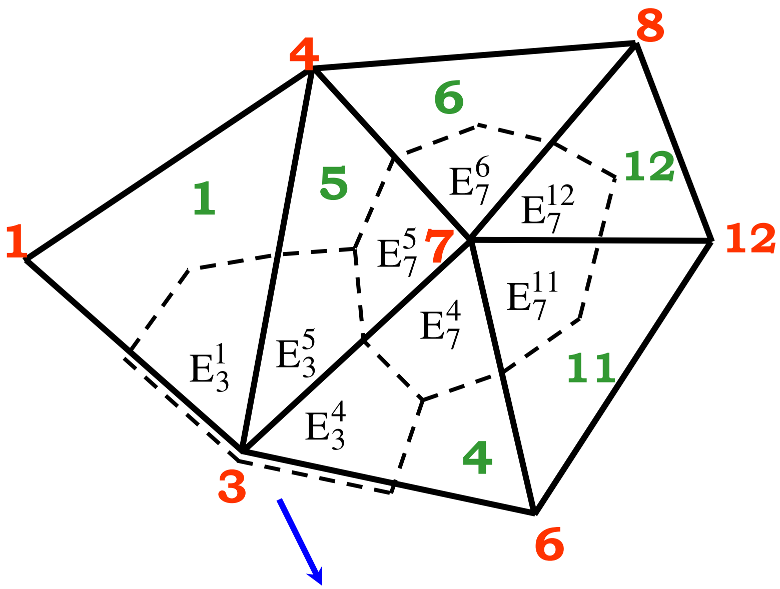


Válido para qualquer Nó "interno"

E_M^N Contribuição do triângulo N à circuitação de H em torno do nó M

Volume de Controle (Problema Magnético)

$$E_3^1 + E_3^5 + E_3^4 = \oint_{\Sigma_3} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



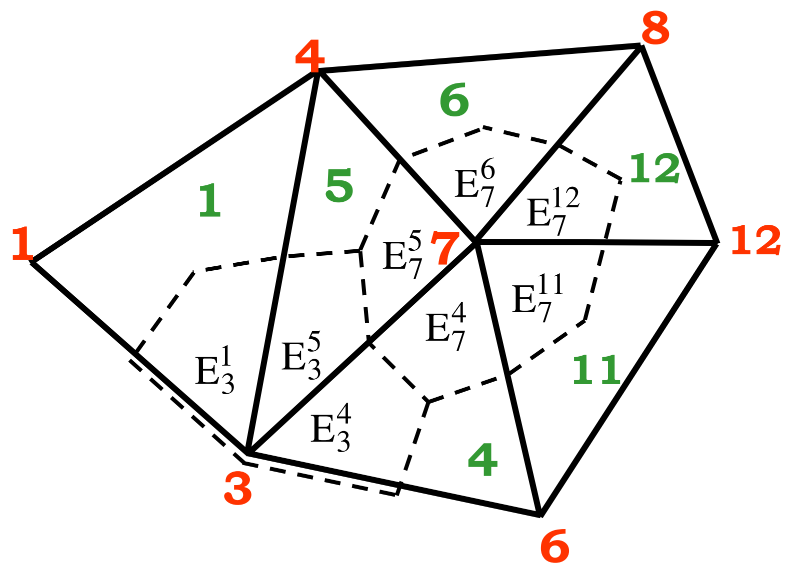
Contorno Típico Envolvendo o Nó 3, de Fronteira

Válido para qualquer Nó na fronteira

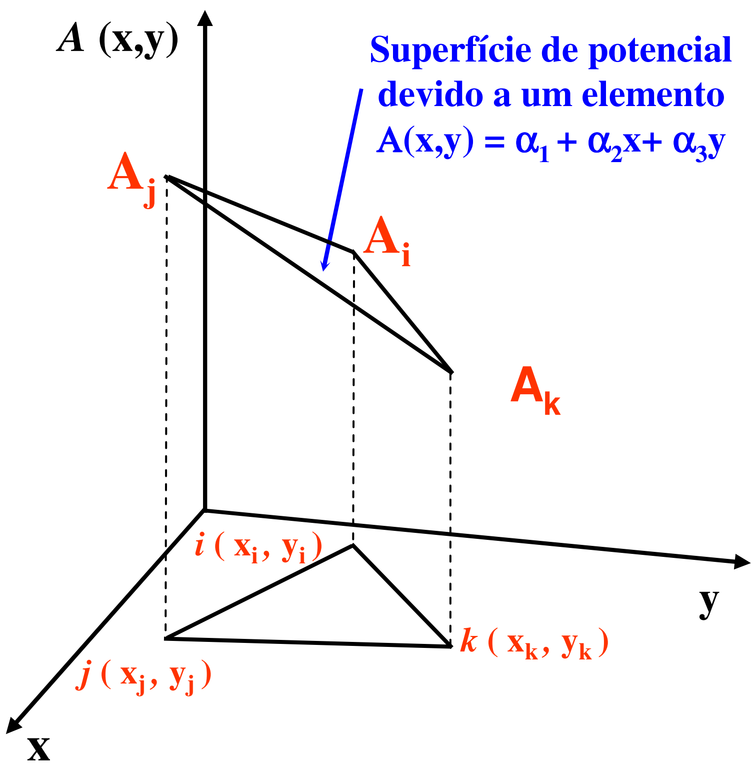
Volume de Controle (Problema Magnético)

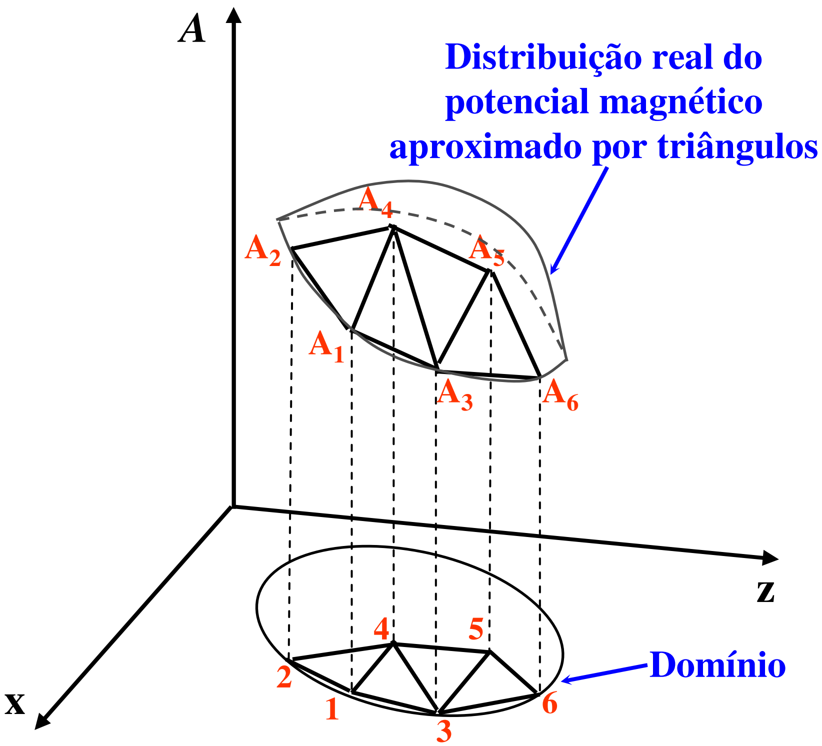
Aplica-se a Lei de Ampère para todos os nós

$$\sum_{e=1}^{NE} E_i^e = \sum_{e=1}^{NE} I_i^e$$



Aproximação do Potencial Vetor Magnético Internamente ao Elemento





Aproximação Linear do Potencial Vetor Magnético (A)

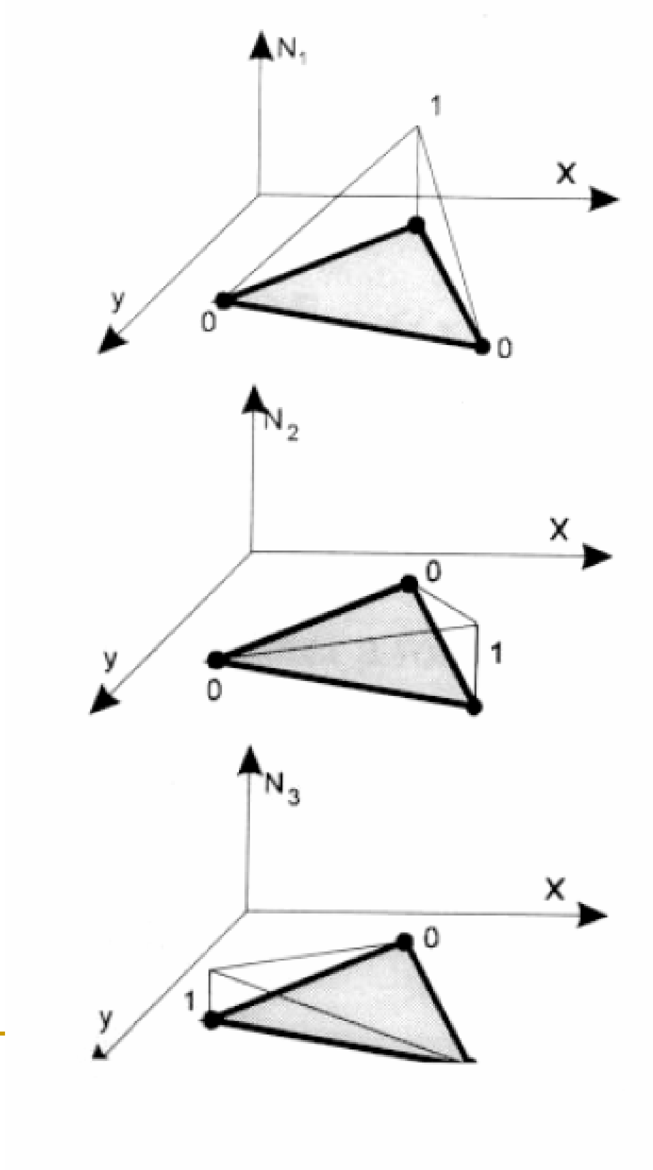
no elemento

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x, y) \times A_i$$

Aproximação: Função de Forma

Propriedade:

$$N_i(x,y)=\begin{cases} se\left(x=x_i \; e \; y=y_i\right)=1 \\ se\left(x=x_j \; e \; y=y_j\right)=0 \\ se\left(x=x_k \; e \; y=y_k\right)=0 \end{cases}$$



O Valor do Campo Magnético no Elemento

$$\vec{H} = \nu \vec{B} = \nu \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{H} = \nu \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(c_i \vec{u}_x - b_i \vec{u}_y\right)}{2\Delta} A_i$$

Elemento Genérico

$$\int_{POS} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{iPOS} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

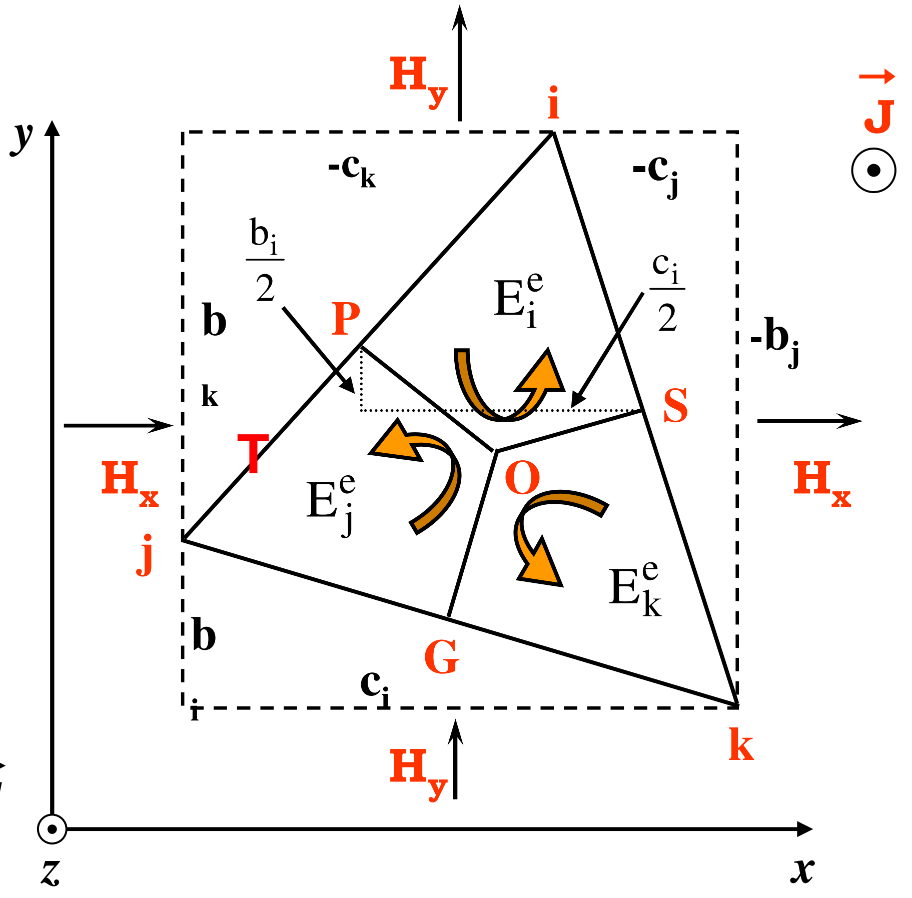
$\vec{H}$ é constante no elemento

$$\int_{PT} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{TS} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{iPOS} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$H_y \Delta y + H_x \Delta x = \iint_{iPOS} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$H_y (y_T - y_P) + H_x (x_S - x_T) = \iint_{iPOS} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Similar à Eletrostática



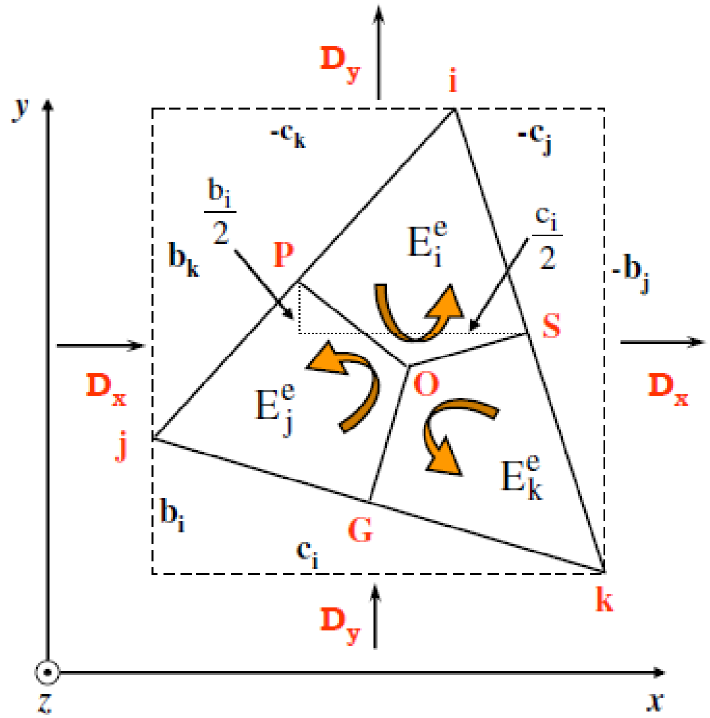
Elemento Genérico

$$\begin{bmatrix} E_i^e \\ E_j^e \\ E_k^e \end{bmatrix} = \frac{\nu}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix}$$

A modelagem do termo da Corrente

- Caso exista densidade de corrente (J) no elemento, usualmente adota-se o seguinte procedimento para cada elemento:

$$I_i^e = I_j^e = I_k^e = \frac{J\Delta}{3}$$

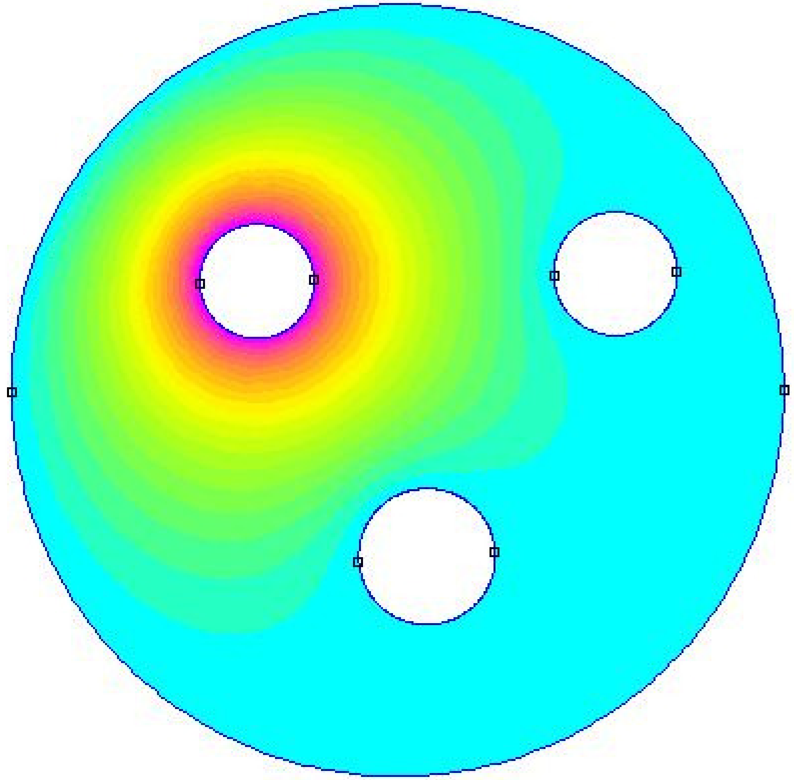


Sistema de Equações

- Obtém-se:
  - $[K]\,[A] = [I]$
- E cada linha é a Lei de Ampère aplicada para um determinado nó.

Um cabo energizado

Exemplo Eletrostática



- Fazer download de:
- http://www.femm.info/wiki/HomePage