

# Fluxo em meios porosos



Waldemar Hachich

exclusivo de PEF3310

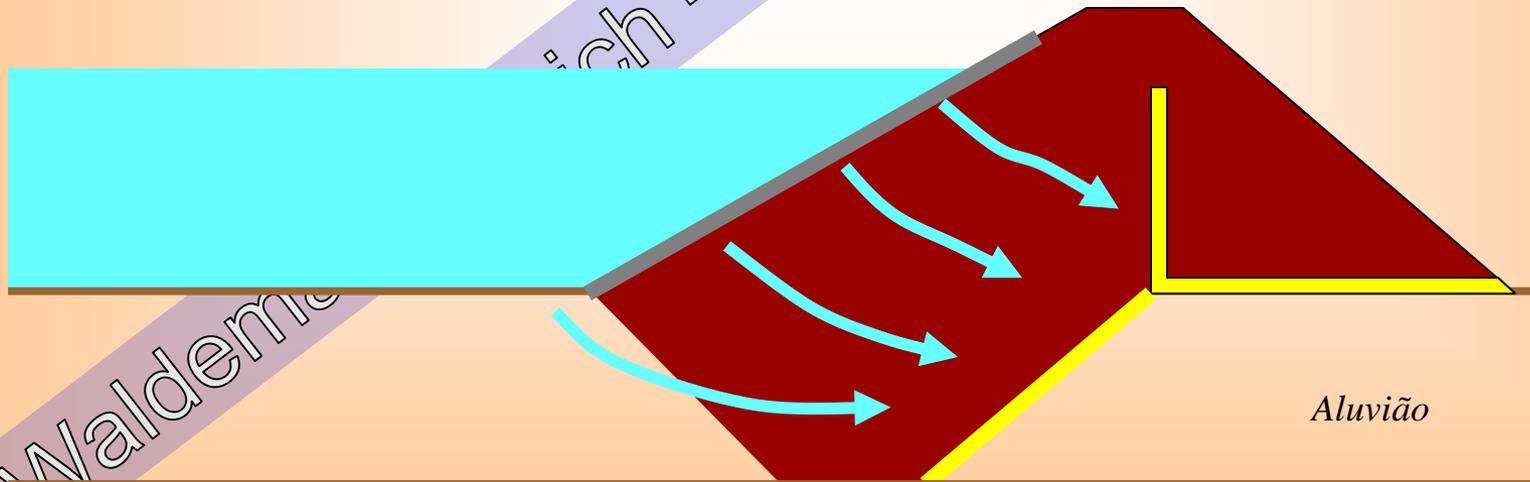
Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

**Fernando A. M. Marinho**  
**Waldemar Hachich**



exclusivo de PEF3310

Barragem de Paraitinga



Waldemar

Aluvião

Esquemático

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado



Barragem do Funil - RJ

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

# Objetivos dos Estudos de Fluxo

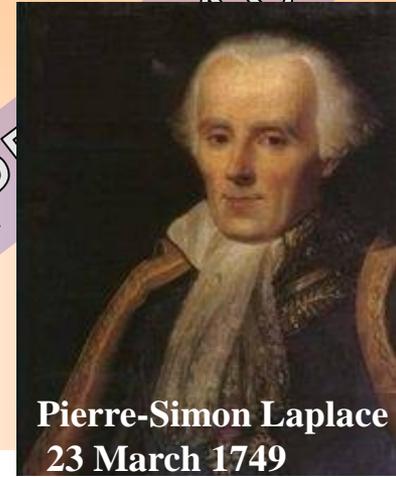
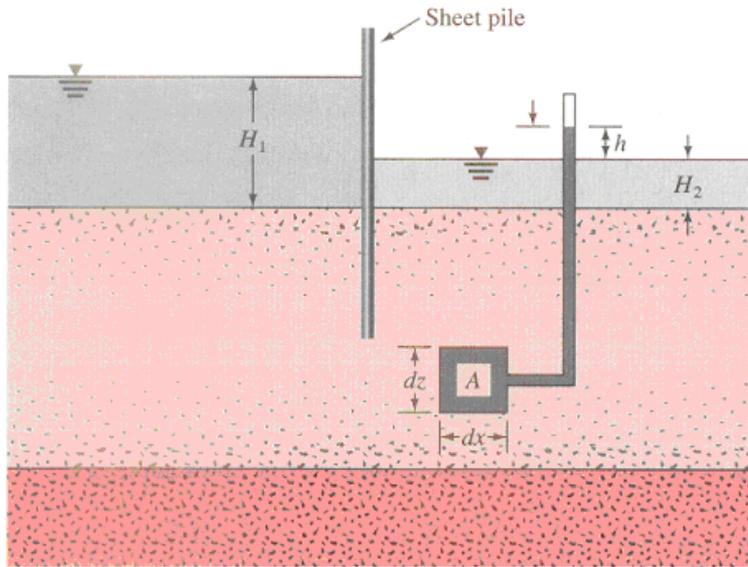
- Determinar a distribuição de pressões neutras
  - Por que?
  - Porque resistência depende de tensões **efetivas!**
  - Conhecer tensões efetivas em todos os pontos
- Determinar os gradientes hidráulicos
- Estimar o fluxo

# Rupturas de barragens associadas a fluxo

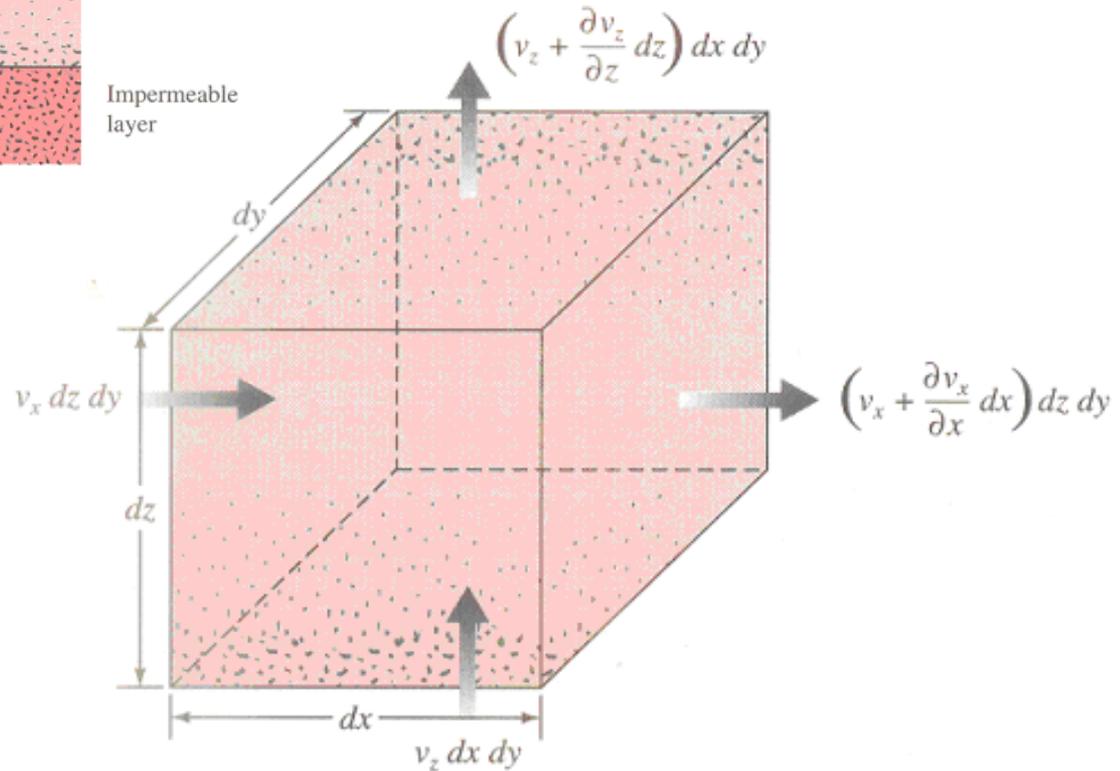
- Ruptura de Teton Dam
- Baldwin Hills

Waldemar Hachich - Uso exclusivo de PEF3310

# Equação de Laplace (em geral deduzida apenas para cargas hidráulicas)

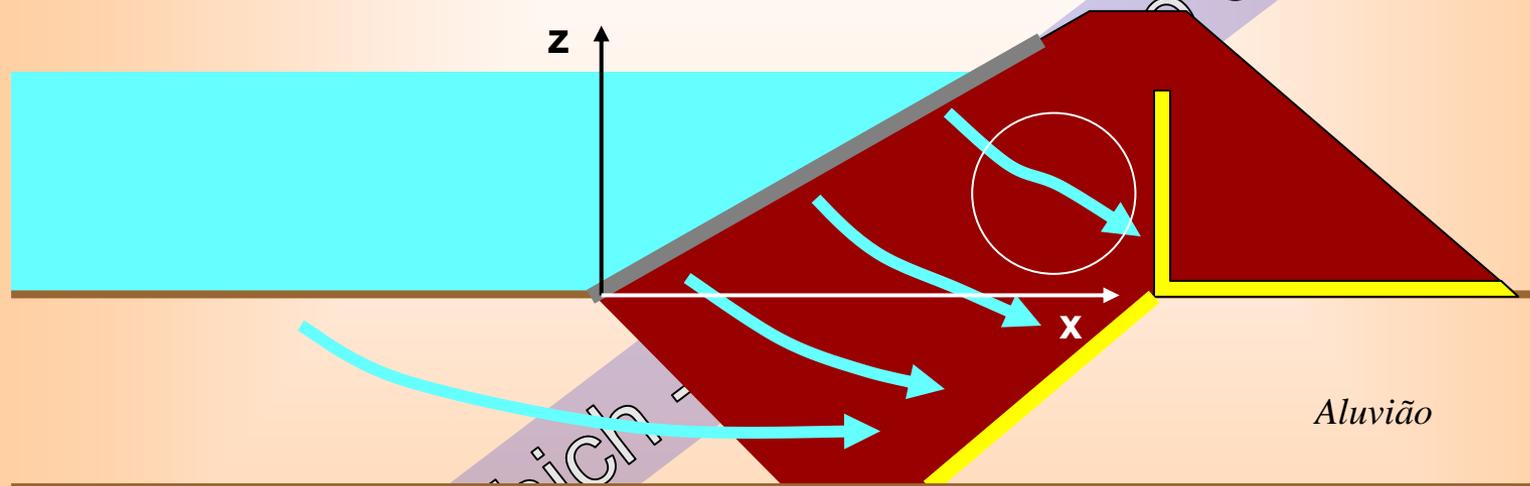


- A massa de fluído que entra no volume considerado é idêntica à massa que sai
- Isso caracteriza o chamado **regime permanente** isto é aquele que não depende do tempo



Todas as imagens são de autoria de WardenmarHach

# Fluxo 2D permanente de fluido incompressível



**Simplificação :** a obra sendo muito longa na direção  $y$ , e com seção transversal praticamente constante, a análise pode ficar restrita ao plano  $x$ - $z$  indicado acima

**PRESSÕES NEUTRAS:**  $u(x,z)$

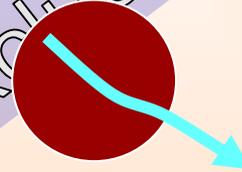
**FLUXO:**  $\psi(x,z)$

dois valores ( $u$  e  $\psi$ ) em cada ponto  $(x^*, z^*)$

duas funções no domínio de fluxo  $(x,z)$

Todas as figuras apresentadas são propriedade dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

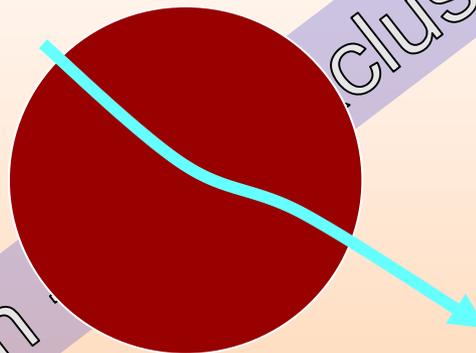
Waldemar Hachich - Uso exclusivo de PEF3310



**Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado**

Waldemar Hachich

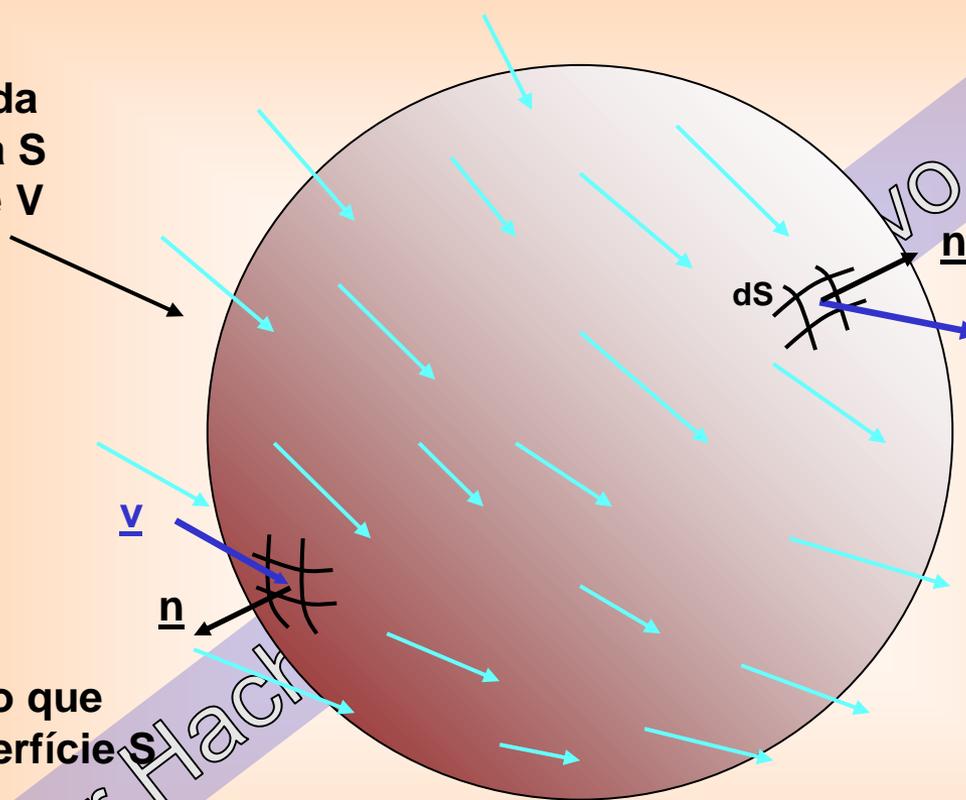
clusivo de PEF3310



Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

# Campo de velocidades 3D

Superfície fechada  
3D qualquer, área  $S$   
limitando volume  $V$



$\underline{n}$  = versor normal (  $|\underline{n}| = 1$  )

$\underline{v}$  = vetor velocidade  
de percolação

$$\oiint_S (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS =$$

= vazão de fluido que  
atravessa a superfície  $S$

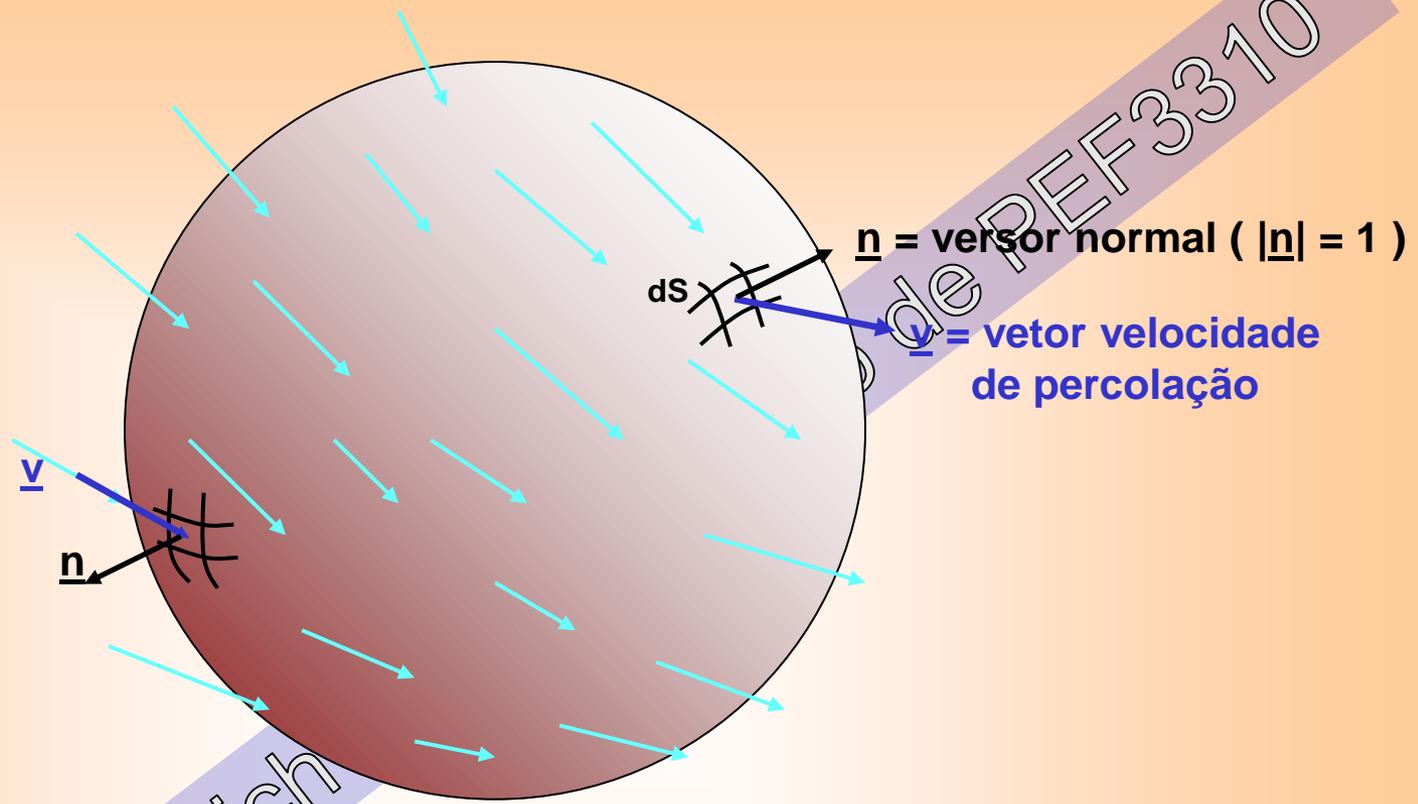
$> 0 \Rightarrow$  sai mais do que entra

$< 0 \Rightarrow$  entra mais do que sai

$\underline{v} \cdot \underline{n} = v_n =$  componente  
de  $\underline{v}$  normal à superfície  
(produto escalar)

$v_n \cdot dS =$  vazão de  
fluido que atravessa a  
superfície por  $dS$

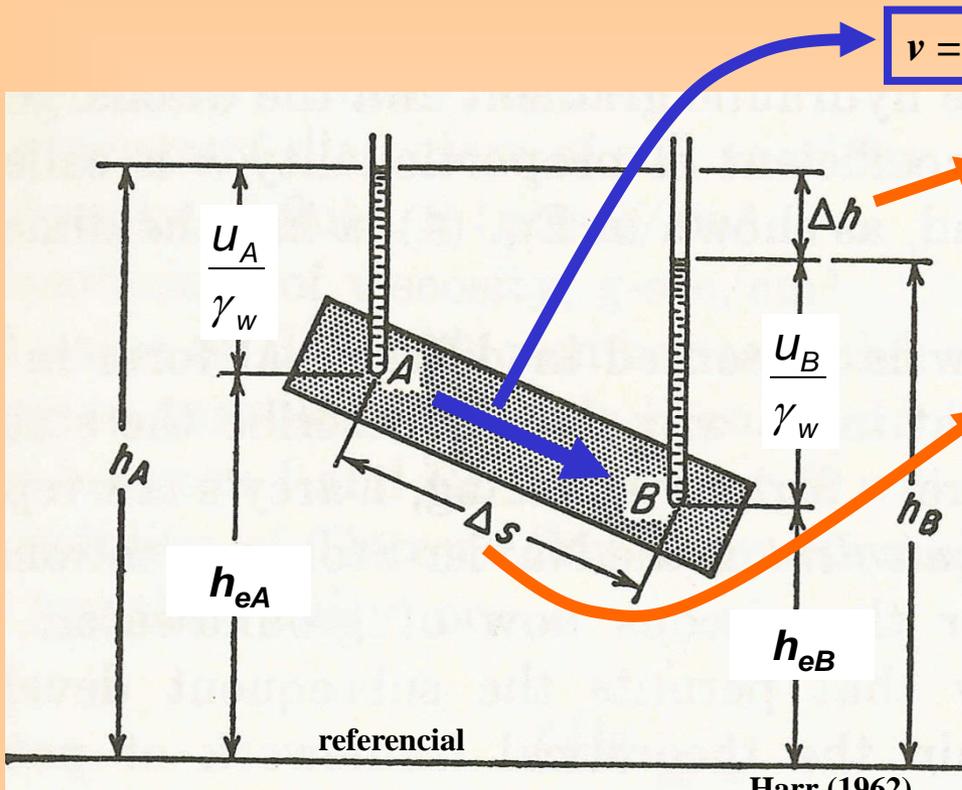
Waldemar Haer



**Conservação de massa  $\Rightarrow M_E = M_S$**

Expressão semelhante à do estudo dos permeâmetros, que impunha que a vazão de entrada fosse igual à vazão de saída

$$\oiint_S (\underline{v} \bullet \underline{n}) dS = 0$$



$v =$  velocidade de percolação

$\Delta h$  é a perda de carga total do fluido na distância  $\Delta s$

$\Delta s$  é a distância na qual o fluxo dissipa a carga  $\Delta h$

$i = \frac{\Delta h}{\Delta s}$  Gradiente hidráulico médio (no trecho  $\Delta s$  do fluxo)

$i_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta s} = \frac{dh}{ds}$  Gradiente hidráulico pontual (no ponto  $s$  do fluxo)

# Conservação de massa

$$M_A = M_B$$

$$Q_A = Q_B \text{ (se } \rho = cte)$$

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

**Teorema do Divergente**

$$\oiint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ (campo escalar)}$$

Waldemar Hachich - Uso exclusivo de PEF3310

**Teorema do Divergente**  $\oiint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ (campo escalar)}$$

**Portanto:**  $\oiint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \Rightarrow \iiint_V \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = 0$

Waldemar Hachich - Uso exclusivo de PEF3310

**Teorema do Divergente**  $\oiint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ (campo escalar)}$$

**Portanto:**  $\oiint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \Rightarrow \iiint_V \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = 0$

Como V, delimitado por S, foi escolhido arbitrariamente:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

**Conservação de massa**

+

**Lei de Darcy: ...**

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

# Lei de Darcy: revisão e generalização

## Fluxo 1D (como no permeâmetro)

$$Q = k \frac{\Delta h}{L} A$$

$Q$  - vazão

$A$  - área do permeâmetro

$\frac{Q}{A} = v =$  velocidade de percolação

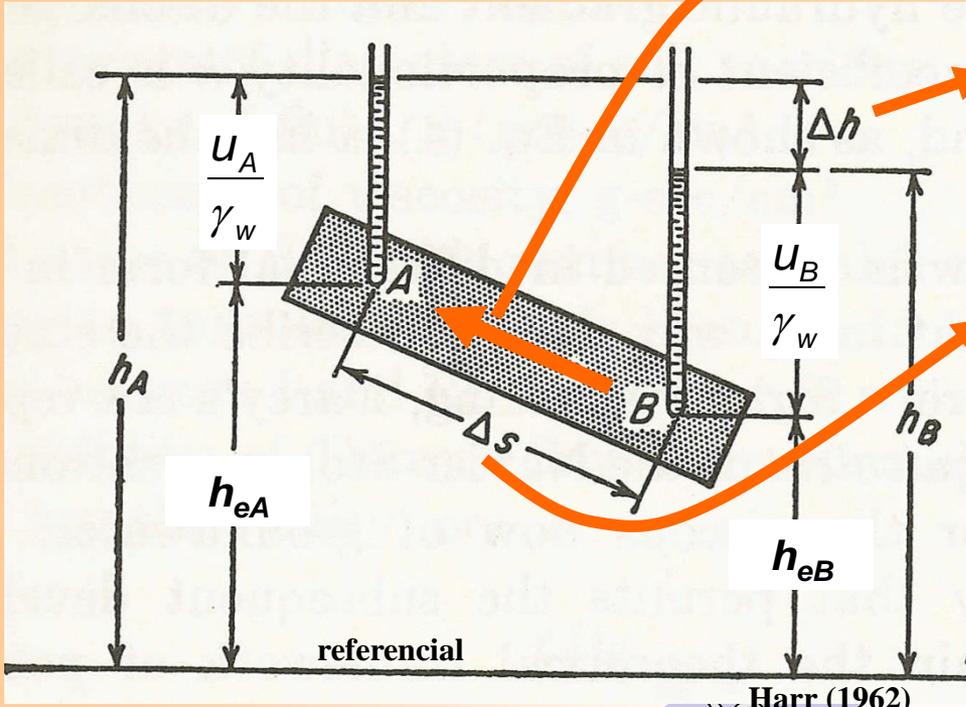
$$v = ki$$

$k$  = condutividade hidráulica

Se  $i=1$ ,  $k$  é a própria velocidade de percolação da água

$\frac{\Delta h}{L} = i =$  gradiente hidráulico

(médio)



$i = \text{gradiente hidráulico}$

$\Delta h$  é a perda de carga total do fluido na distância  $\Delta s$

$\Delta s$  é a distância na qual o fluxo dissipa a carga  $\Delta h$

$i = \frac{\Delta h}{\Delta s}$  Gradiente hidráulico médio (no trecho  $\Delta s$  do fluxo)

**Gradiente hidráulico é VETOR.**  
**Pensar sempre também na sua direção e no seu sentido.**

$i_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta s} = \frac{dh}{ds}$  Gradiente hidráulico pontual (no ponto  $s$  do fluxo)

# Operador gradiente (geral)

$$i_x = \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x}$$

$$i_y = \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y}$$

$$i_z = \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z}$$

$g$  - campo escalar,  $g(x, y, z)$

3 componentes do VETOR gradiente ( $\mathbf{i} = \nabla g$ )

Aponta, em cada ponto, na direção de maior variação do campo escalar ( $g$ )

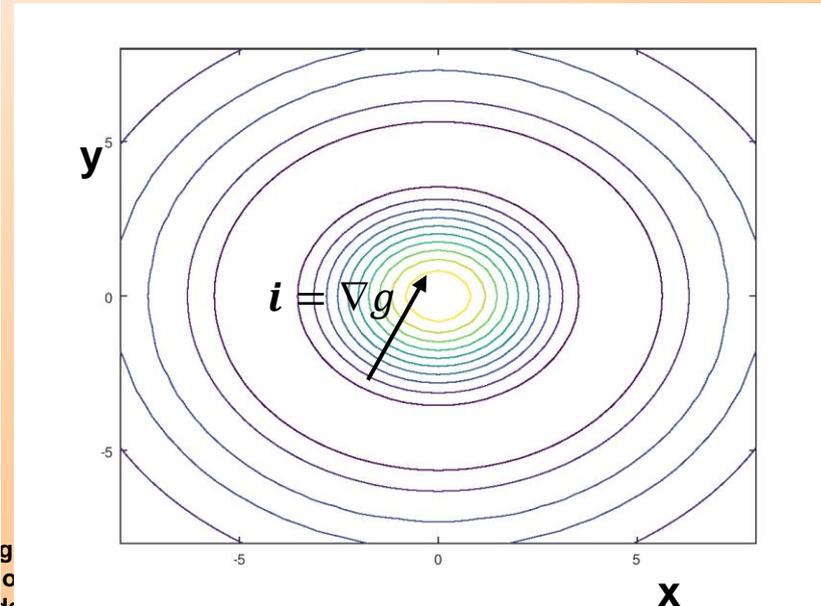
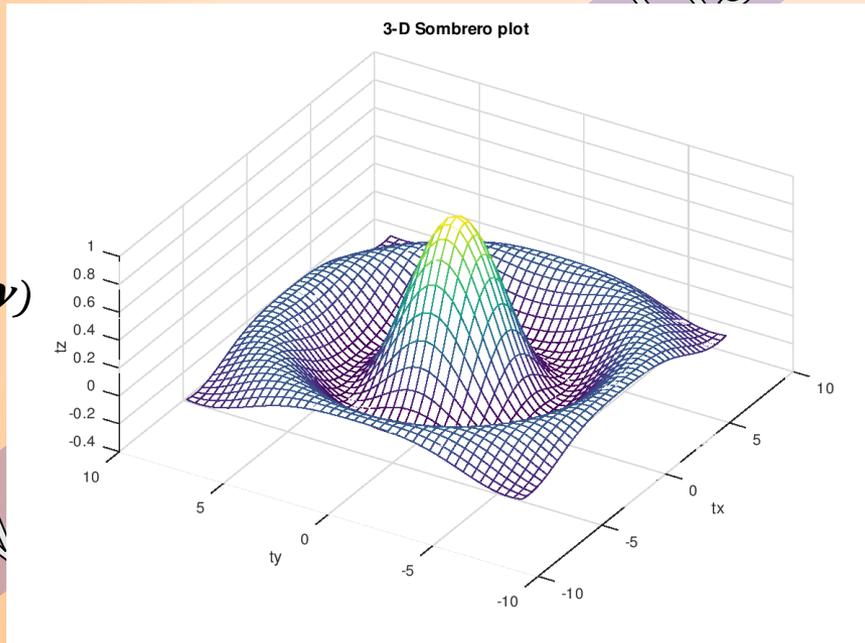
# Operador gradiente em 2D (geral)

$$i_x = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$$
$$i_y = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$$

$g$  – campo escalar,  $g(x, y)$

2 componentes do VETOR gradiente ( $\mathbf{i} = \nabla g$ )

Aponta, em cada ponto, na direção de maior variação do campo escalar ( $g$ )



$z = g(x, y)$

W

# Gradiente hidráulico

$$i_x = \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial x}$$

$$i_y = \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial y}$$

$$i_z = \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial z}$$

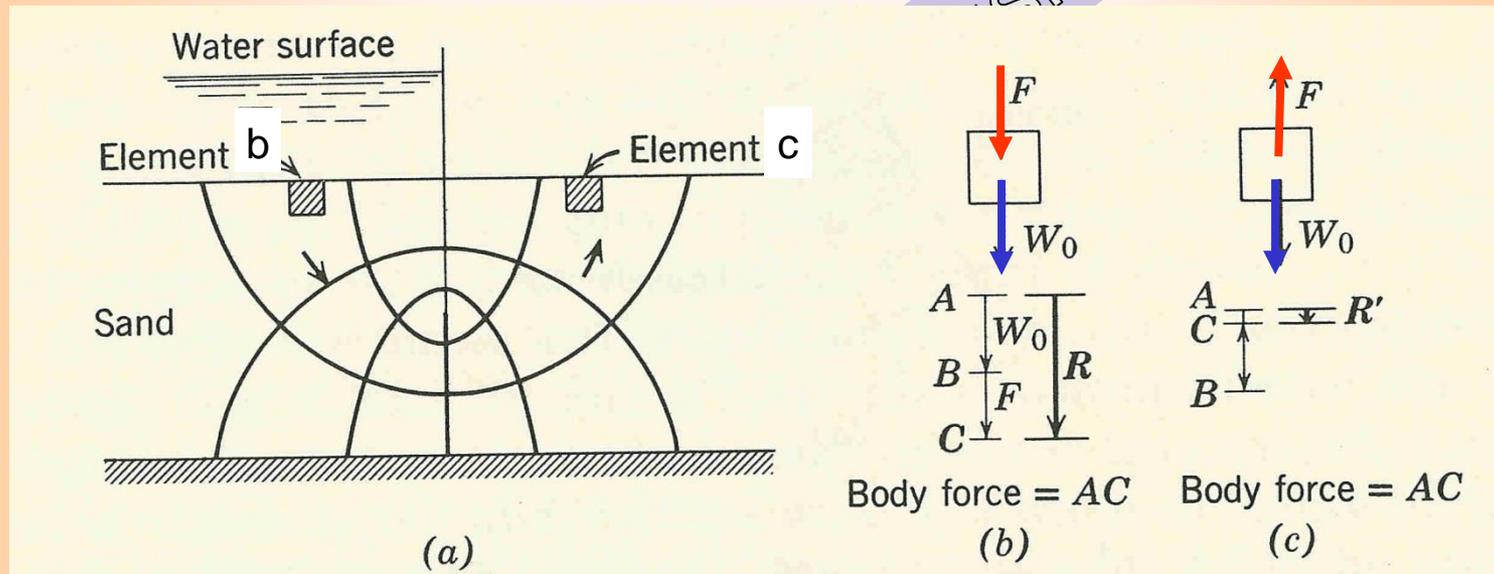
$h$  – carga hidráulica, campo escalar,  $h(x,y,z)$

3 componentes do VETOR gradiente hidráulico ( $\mathbf{i}=\nabla h$ )

Aponta, em cada ponto, na direção de maior variação da carga hidráulica ( $h$ ), portanto ortogonal às linhas de carga hidráulica constante

(denominadas **equipotenciais**)

# Importância do gradiente hidráulico como vetor



Waldemário

# Lei de Darcy generalizada

$$\mathbf{v} = -k\mathbf{i} = -k\nabla h$$

$$v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$v_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}$$

$\mathbf{v}$  - vetor velocidade de percolação

$\mathbf{i}$  - vetor gradiente hidráulico ( $\mathbf{i} = \nabla h$ )

Como  $k_x = k_y = k_z = k$ ,  
**solo isotrópico**

velocidade na direção do gradiente hidráulico, mas com sentido contrário

**Teorema do Divergente**  $\oiint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{v} dV$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ (campo escalar)}$$

**Portanto:**  $\oiint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \Rightarrow \iiint_V \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = 0$

**Como V, delimitado por S, foi escolhido arbitrariamente:**  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

**Lei de Darcy:**  $\underline{v} = -k \underline{\nabla} h$

$$\underline{\nabla} h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ (gradiente hidráulico)}$$

**Portanto:**  $v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}$   $v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}$   $v_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}$

**Teorema do Divergente**

$$\oiint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ (campo escalar)}$$

**Portanto:**  $\oiint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \Rightarrow \iiint_V \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = 0$

**Como V, delimitado por S, foi escolhido arbitrariamente:**  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

**Lei de Darcy:**  $\underline{v} = -k \underline{\nabla} h$

$$\underline{\nabla} h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ (gradiente hidráulico)}$$

**Portanto:**  $v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}$     $v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}$     $v_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}$

**Substituindo:**  $-k \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) = 0$

**Como  $k \neq 0$ :**

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Equação de Laplace} \quad \nabla^2 h = 0$$

# Observação importante

- Em meio isotrópico a solução, em termos de cargas hidráulicas, **não depende** da condutividade hidráulica.

# Teorema do divergente aplicado à conservação de massa

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

## Lei de Darcy (solo isotrópico)

$$v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y} \quad v_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Equação de Laplace} \quad \nabla^2 h = 0$$

# Simplificação para 1D

- Os fluxos nas direções  $y$  e  $z$ , se existirem, não influenciam o fluxo na direção  $x$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

- Laplace 1D

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$$

# Fluxo 1D

- Solução exata simples (integração)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial x} = C \quad \Rightarrow \quad h = Cx + D$$

- **Condições de contorno** para definir C e D

# Solução exata do fluxo 1D

- Condições de contorno para  $h = Cx + D$

– Em  $x = x_M$ ,  $h = h_M \Rightarrow h_M = Cx_M + D$

– Em  $x = x_J$ ,  $h = h_J \Rightarrow h_J = Cx_J + D$

$$C = \frac{h_M - h_J}{x_M - x_J} = \frac{\Delta h}{-L} = -i \quad D = h_M + ix_M$$

- Solução

$$h = \frac{h_M - h_J}{x_M - x_J}x + h_M - \frac{h_M - h_J}{x_M - x_J}x_M$$

$$h = h_M + \frac{h_M - h_J}{x_M - x_J}(x - x_M)$$

- Outra conforme utilizado nos permeâmetros

$$h = h_M - i(x - x_M)$$

# Simplificação para 2D

- O fluxo na direção  $y$ , se existir, não influencia o fluxo nas demais direções

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

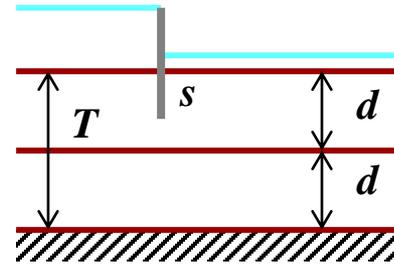
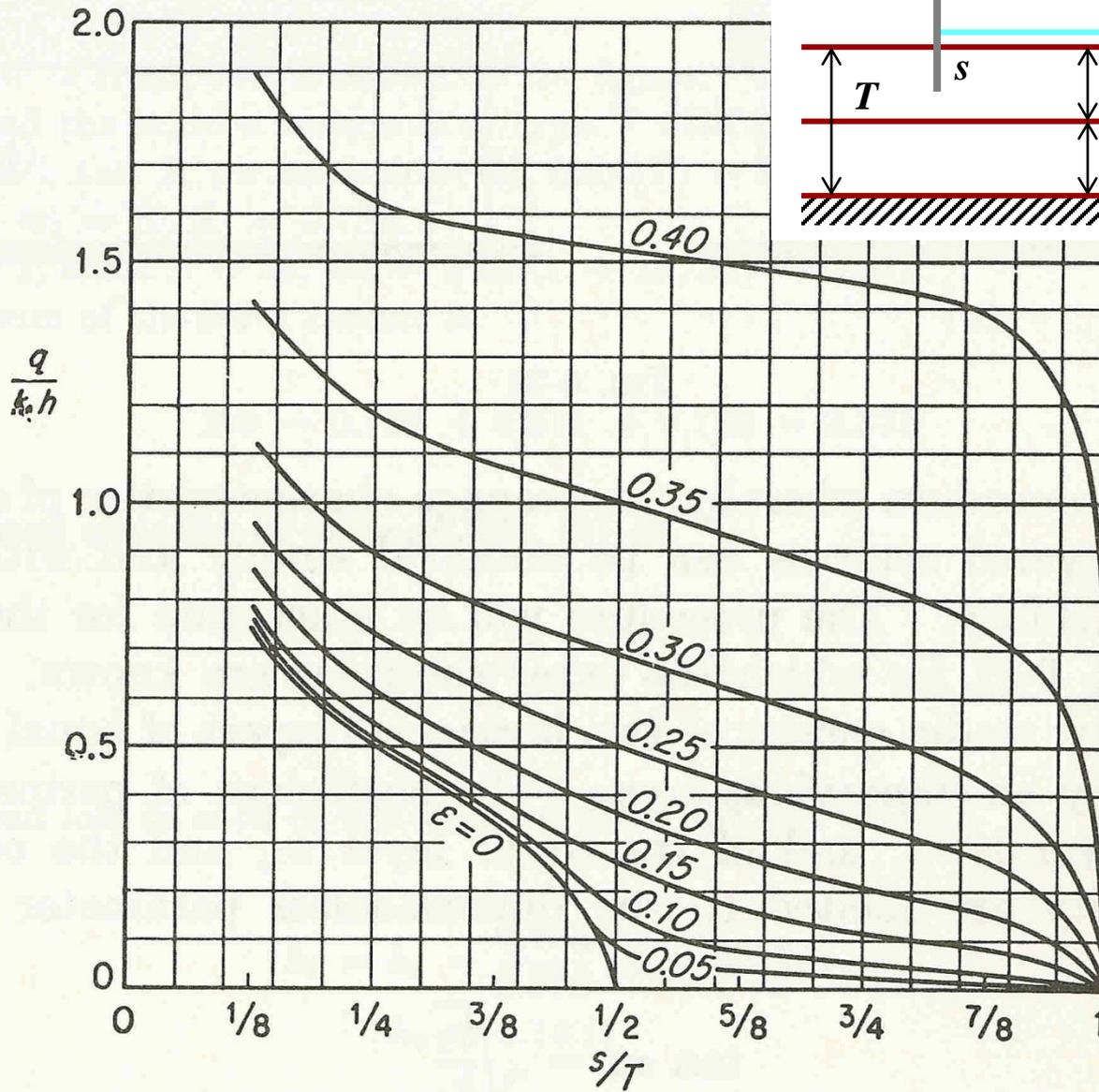
- Laplace 2D

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

## Métodos para Resolver a Equação de Laplace

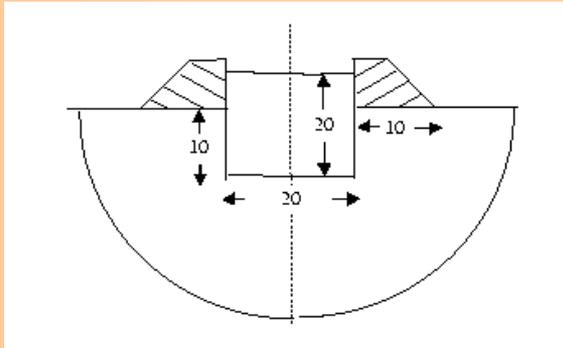
- **Solução exata:  $h = h(x,y,z)$** 
  - **integração da equação diferencial: problema matemático (não de Engenharia) com soluções disponíveis apenas para geometrias, distribuições de condutividades hidráulicas e condições de contorno simples**
- **Soluções aproximadas:  $h$  obtida em diversos pontos do domínio de fluxo**
  - **solução gráfica: rede de fluxo** (atualmente é sobretudo um recurso de interpretação de resultados obtidos numericamente, do que propriamente um processo de solução)
  - **soluções analógicas: fenômenos similares em outras disciplinas (eletricidade, transferência de calor, magnetismo) obedecem à mesma equação de Laplace**
  - **soluções numéricas**
    - **diferenças finitas**
    - **elementos finitos**
    - **elementos de contorno**
    - **etc.**

# Solução matemática exata (geometria restrita)

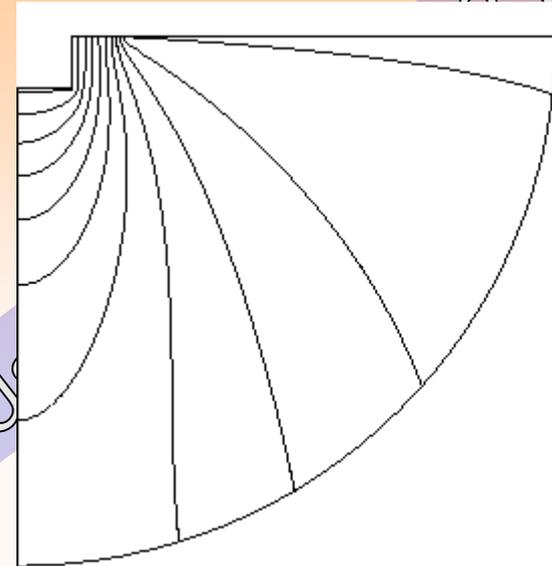
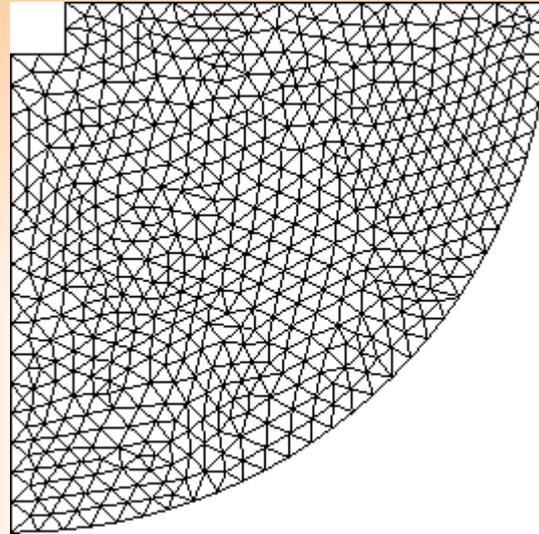


$$\tan \pi \epsilon = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

# Soluções numéricas (qualquer geometria)

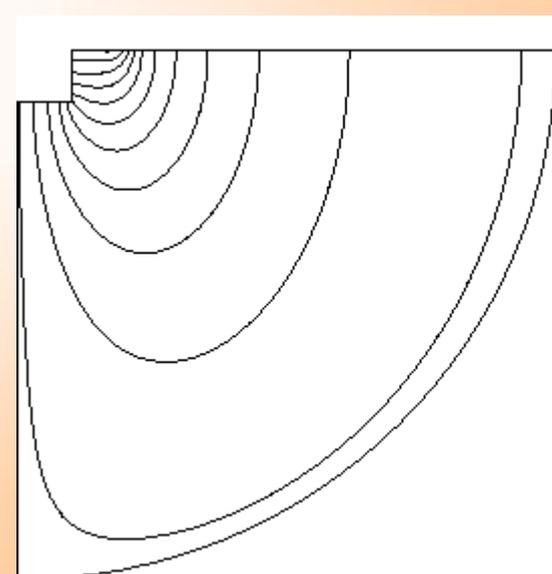
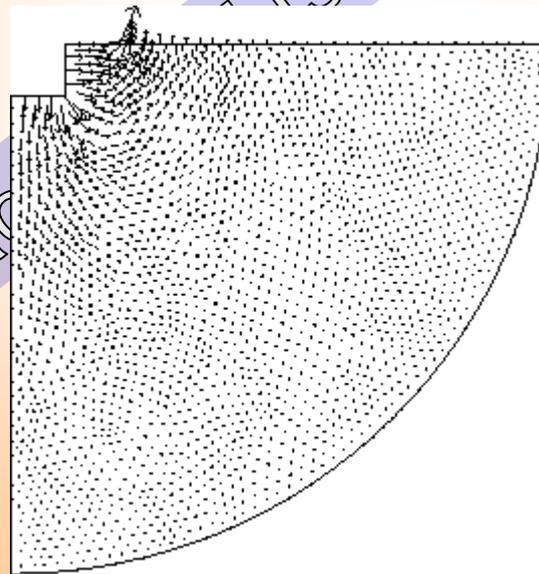
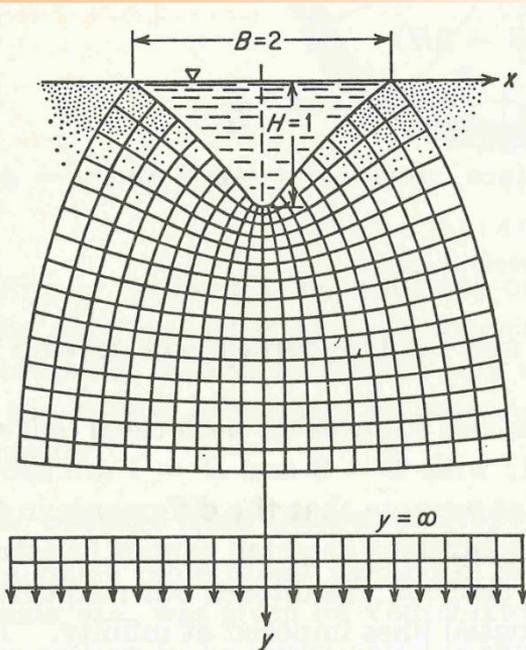


$$k_y = 3k_x$$



Contour level

10.1
11
12
13
14
15
16
17
18
19
19.9



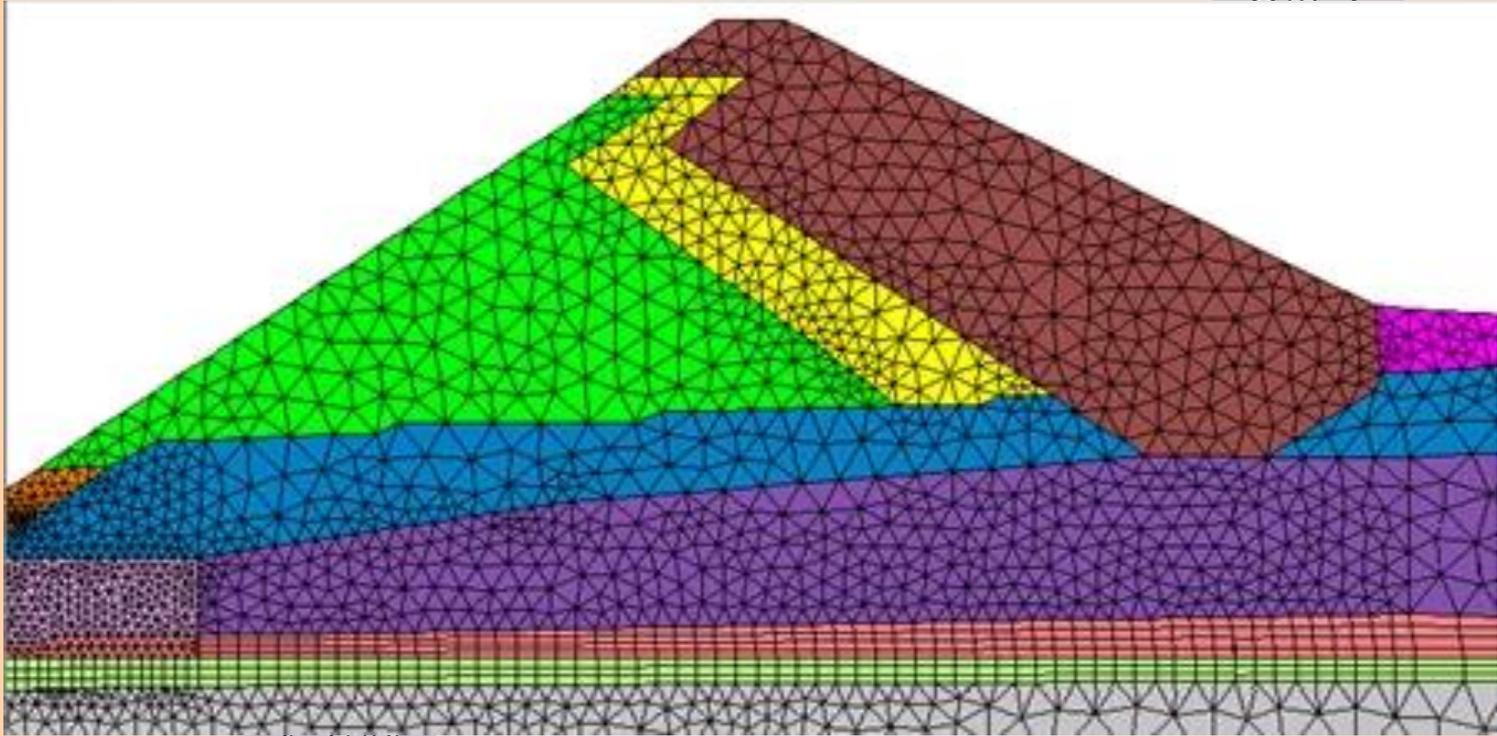
Contour level

0.01246
0.1246
0.2493
0.3739
0.4986
0.6232
0.7479
0.8725
0.9971
1.122
1.234

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

# Soluções numéricas (qualquer combinação de materiais)

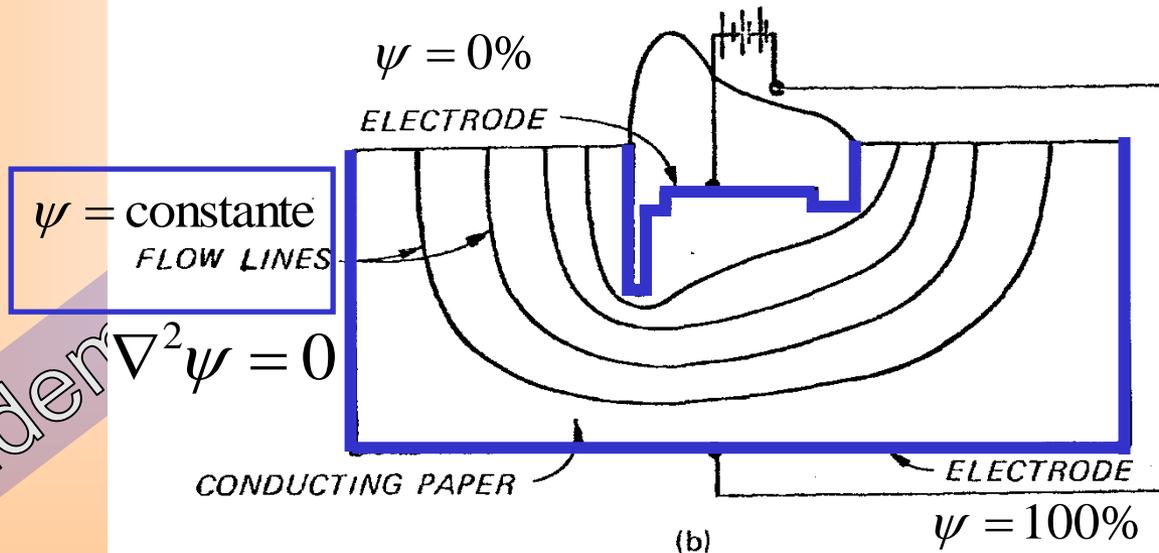
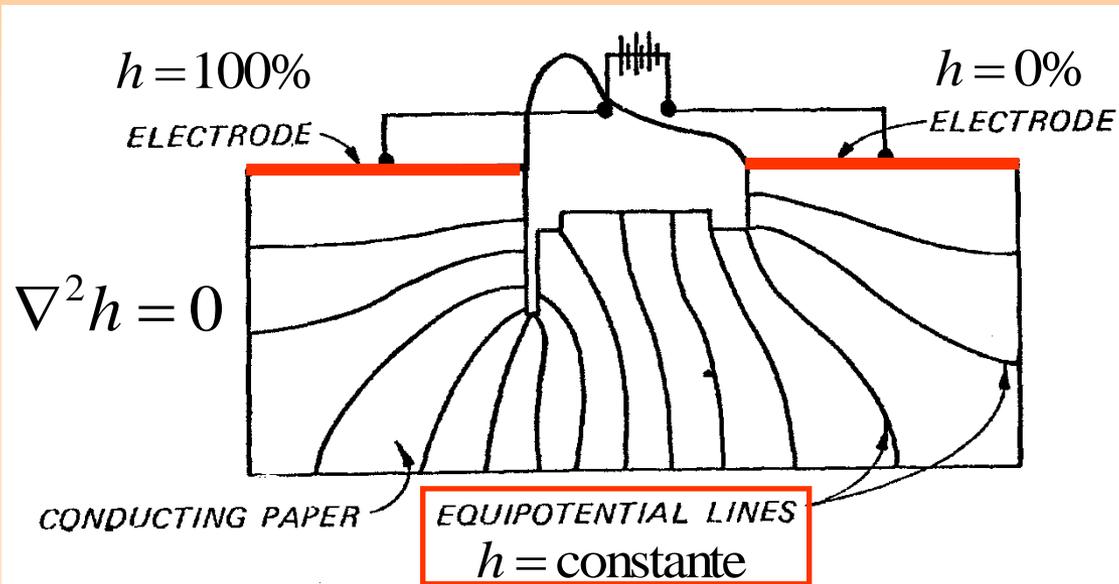
EF3310



Waldemar He

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

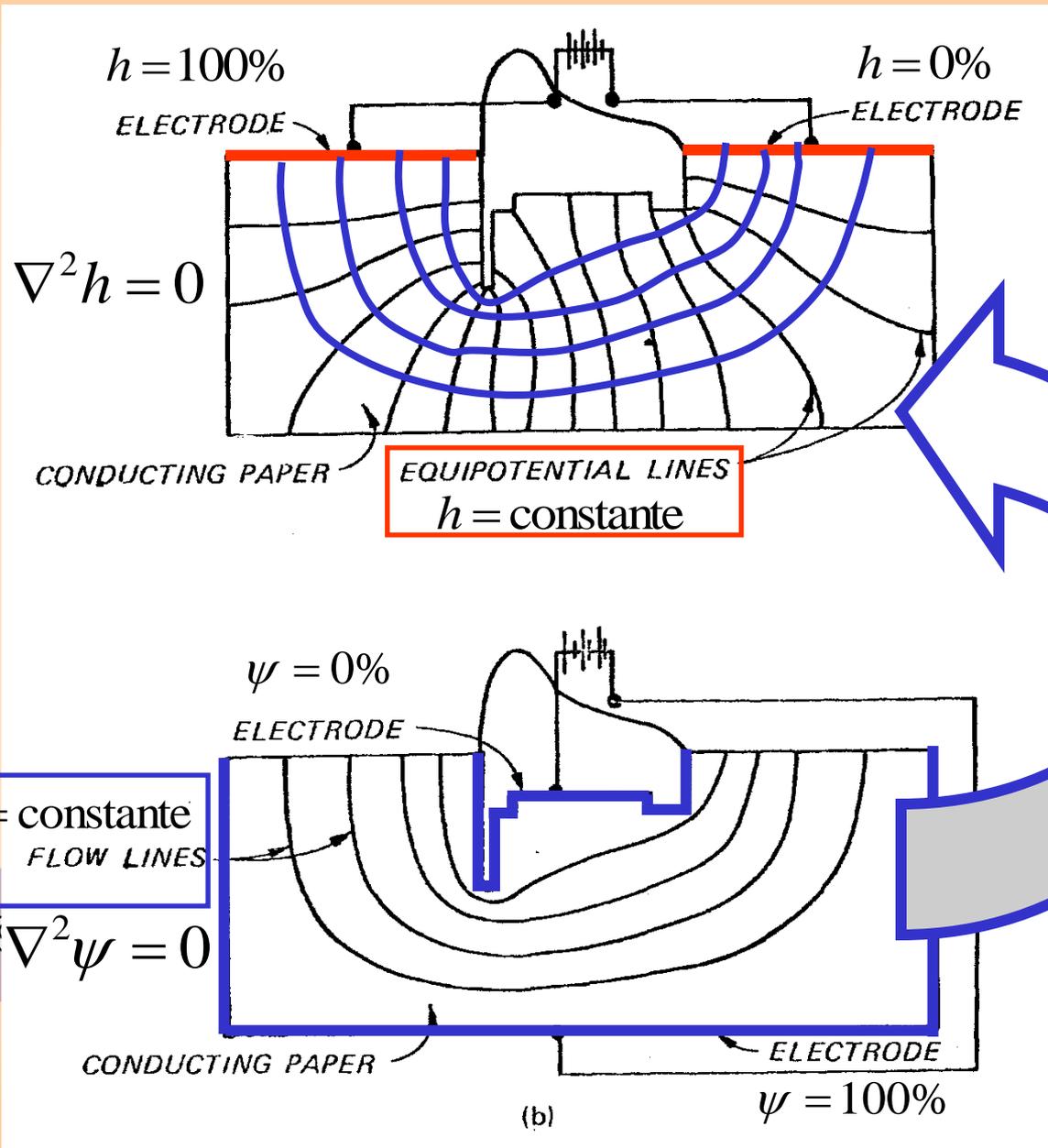
# Analogía eléctrica



Walden

FE3310

# Analogía eléctrica



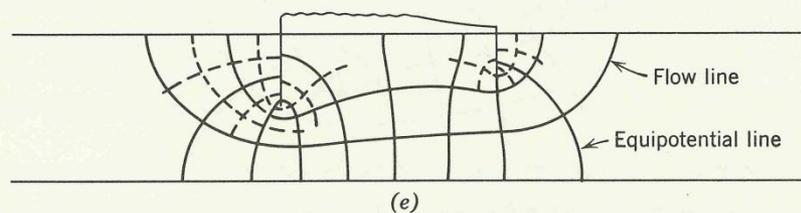
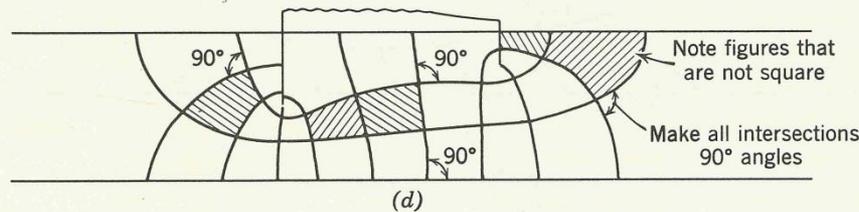
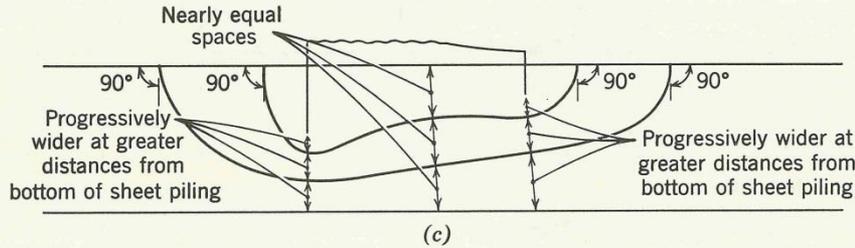
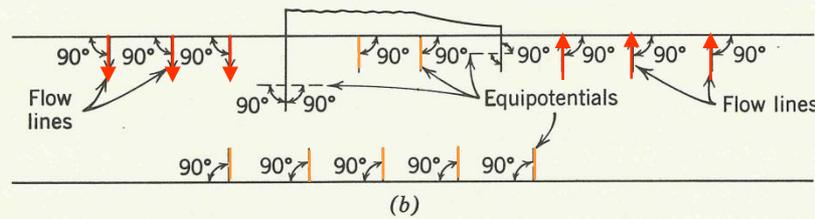
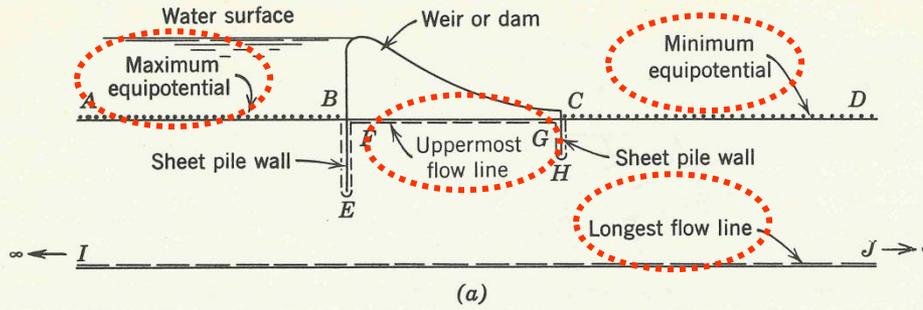
REDE DE FLUXO  
 $\nabla^2 h = 0$   
 $E$   
 $\nabla^2 \psi = 0$

Walden

obrigatórias  
para qualquer  
processo de  
solução



requisitos específicos para o  
traçado de redes de fluxo



de PEF 3310

Condições de contorno

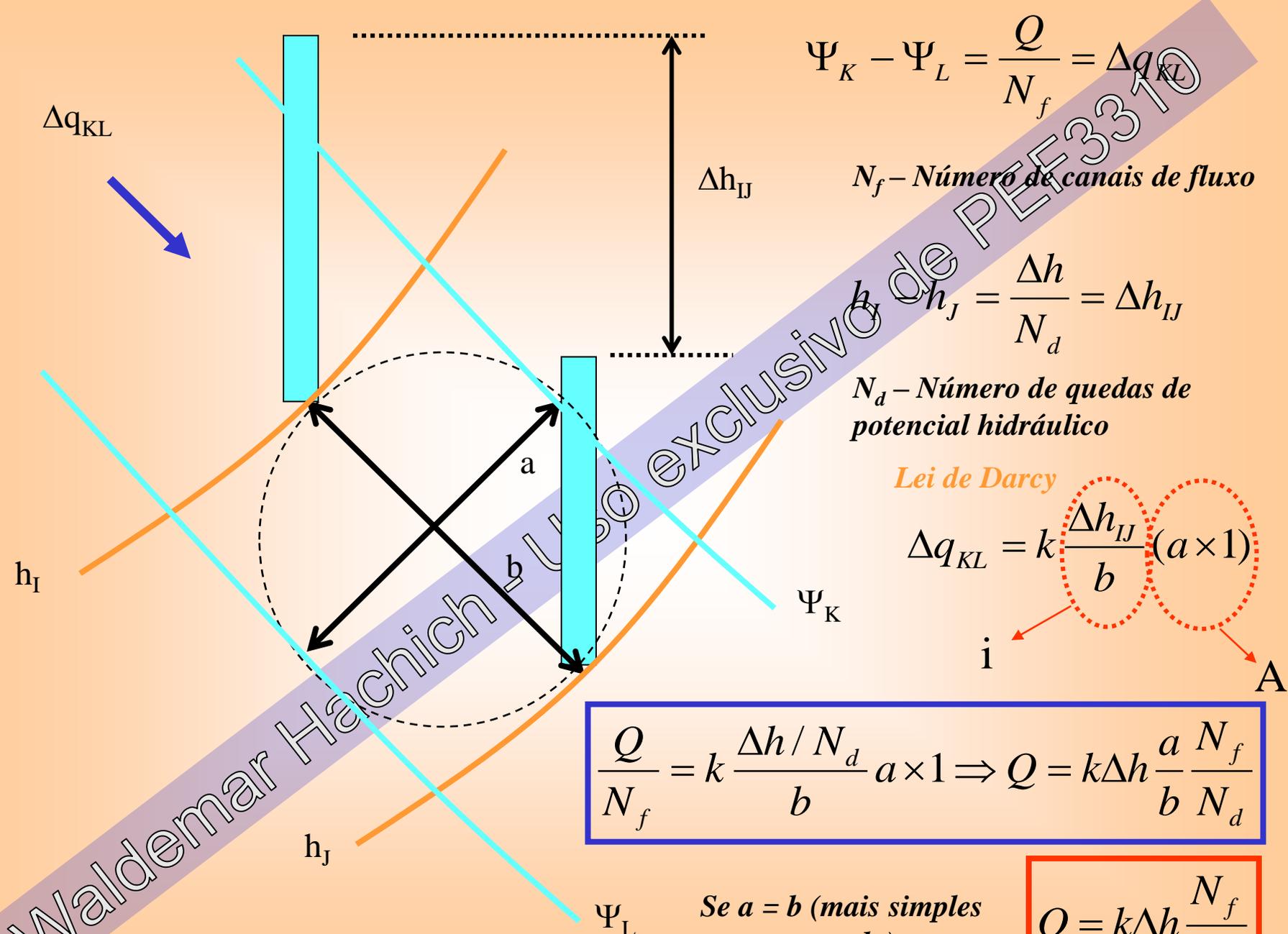
início das linhas de  
fluxo e equipotenciais

Primeira tentativa de  
traçado da linhas de  
fluxo

Tentativa de traçado

Final

Walder



$$\Psi_K - \Psi_L = \frac{Q}{N_f} = \Delta q_{KL}$$

$N_f$  - Número de canais de fluxo

$$h_K - h_J = \frac{\Delta h}{N_d} = \Delta h_{IJ}$$

$N_d$  - Número de quedas de potencial hidráulico

Lei de Darcy

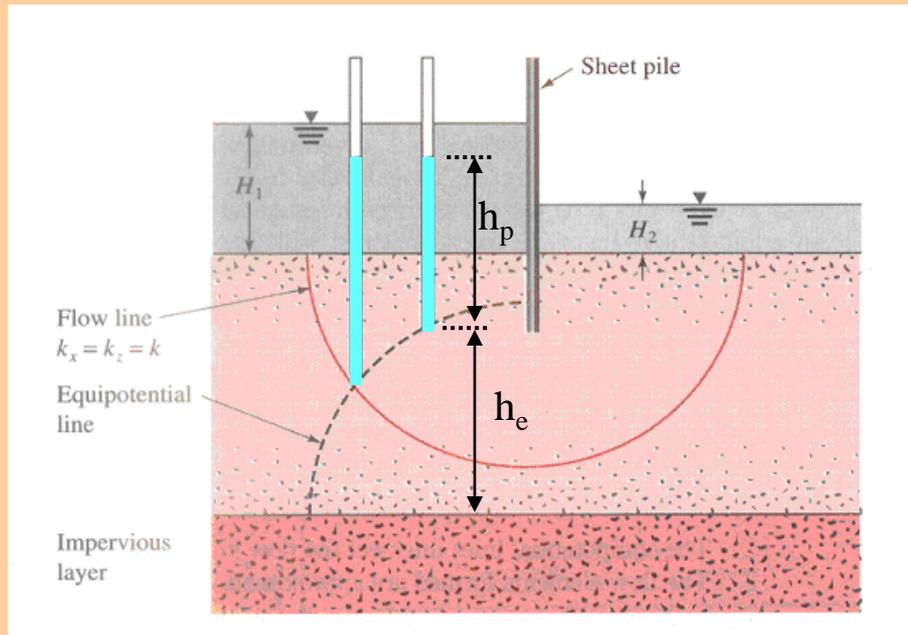
$$\Delta q_{KL} = k \frac{\Delta h_{IJ}}{b} (a \times 1)$$

$$\frac{Q}{N_f} = k \frac{\Delta h / N_d}{b} a \times 1 \Rightarrow Q = k \Delta h \frac{a}{b} \frac{N_f}{N_d}$$

$$Q = k \Delta h \frac{N_f}{N_d}$$

Se  $a = b$  (mais simples para o tracado)

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

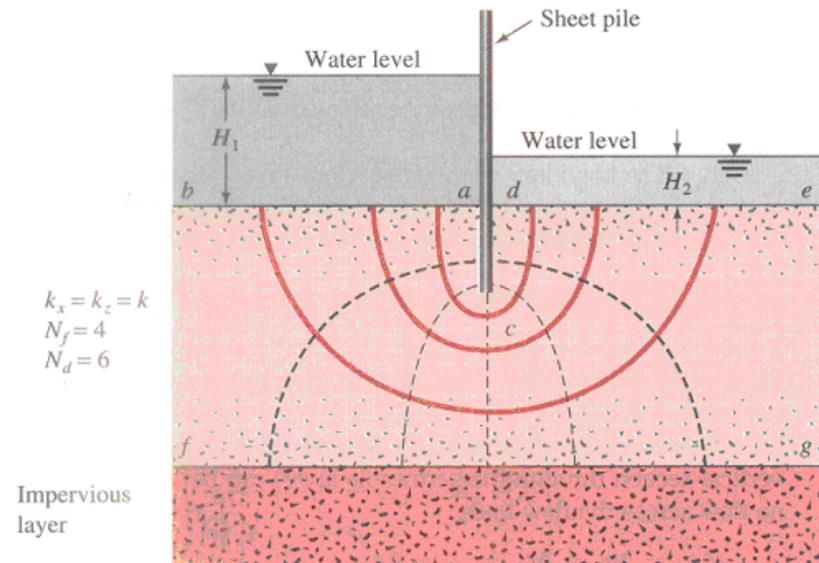


Determinação da pressão neutra em qualquer ponto da região de fluxo a partir das equipotenciais

exclusivo do PPE 3310

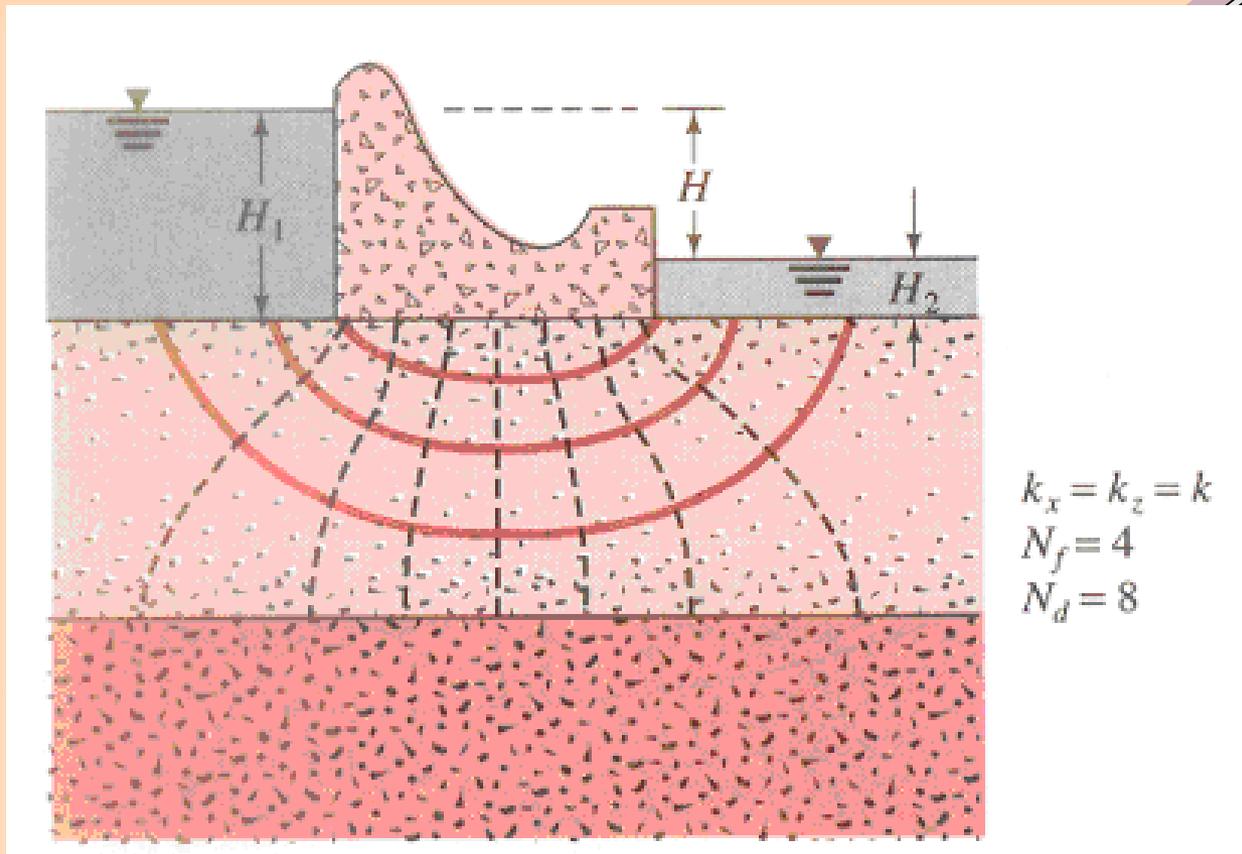
Waldemar Hachich - U

Explorar simetria, sempre que houver (só metade do domínio de fluxo ao lado precisa ser analisado)



Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

3310



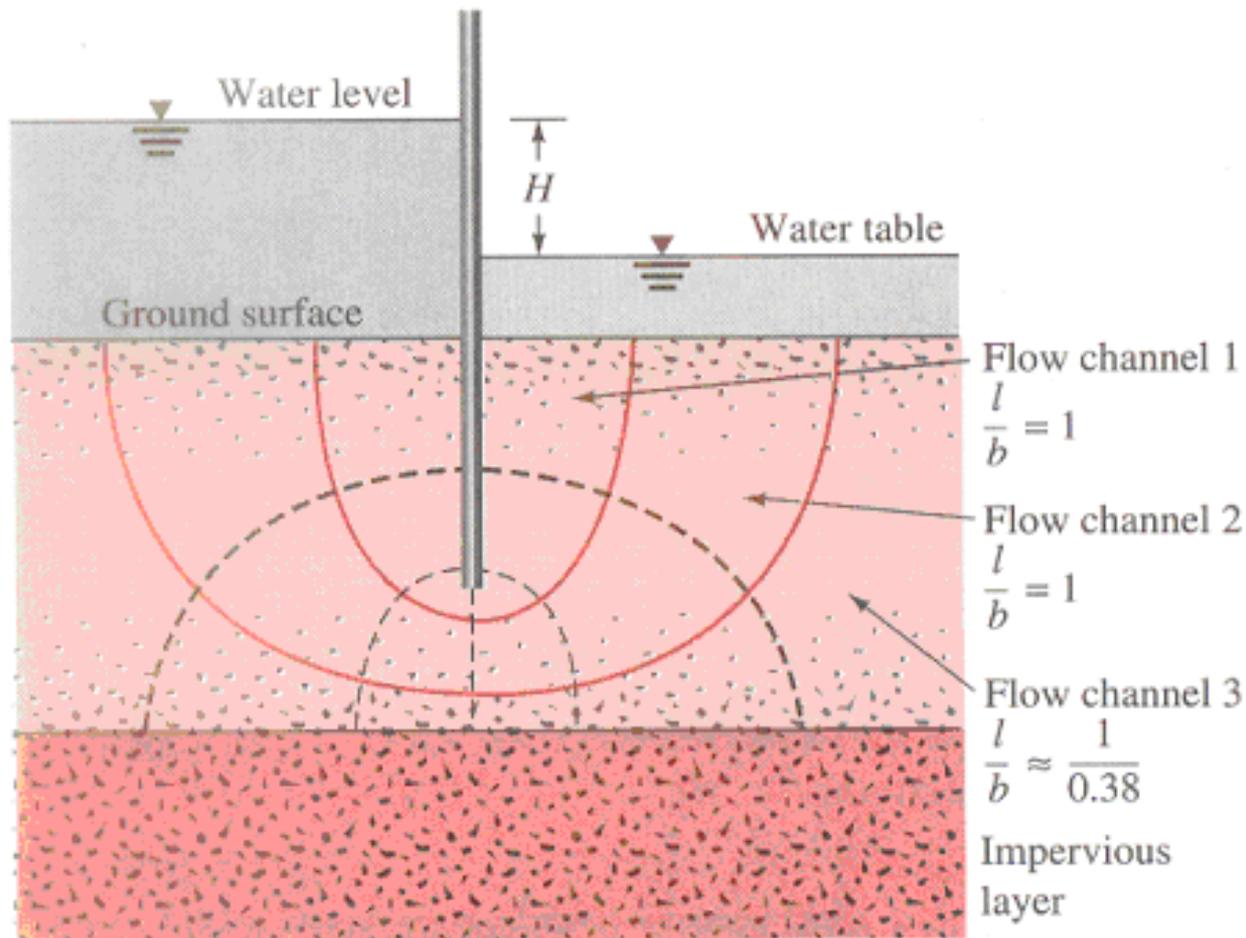
$k_x = k_z = k$   
 $N_f = 4$   
 $N_d = 8$

Waldemar

$k$  em  $\frac{m}{s}$

$$Q = kH \frac{4}{8} \frac{m^2}{s} / m \text{ (longitudinal)}$$

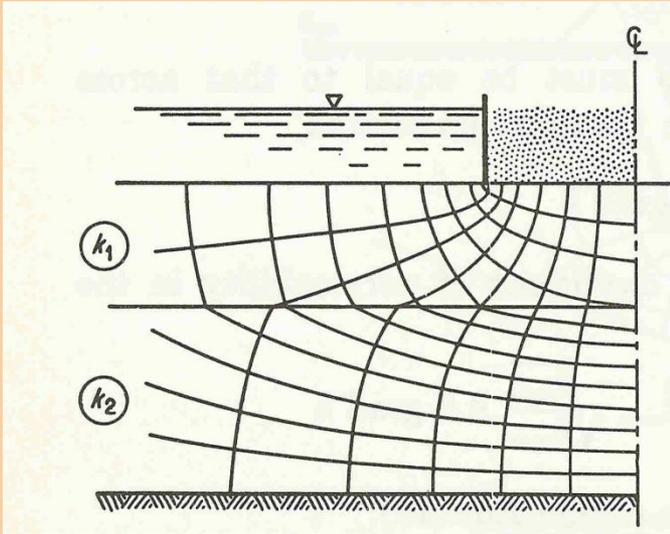
Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado



$k \text{ em } \frac{m}{s}$

$Q = kH \frac{3,38}{6} \frac{m^2}{s} /m \text{ (longitudinal)}$

## Solução gráfica: heterogeneidades descontínuas



$$k_2 > k_1$$

mas ambos  
isotrópicos

ângulos retos são  
preservados

Nos próximos 5 slides o tratamento de conservação de massa e conservação de energia nas fronteiras descontínuas, bem como sua importância para a proteção de obras geotécnicas (filtros-drenos).

# Heterogeneidade descontínua

Filtros-drenos protegem!

Waldemar Hachich - Uso exclusivo de PEF3310

Material A  
Isotrópico

$k_A$

$\alpha_A$

$\underline{v}_A$

$k_A < k_B$

Material B  
Isotrópico

$k_B$

$\underline{v}_B$

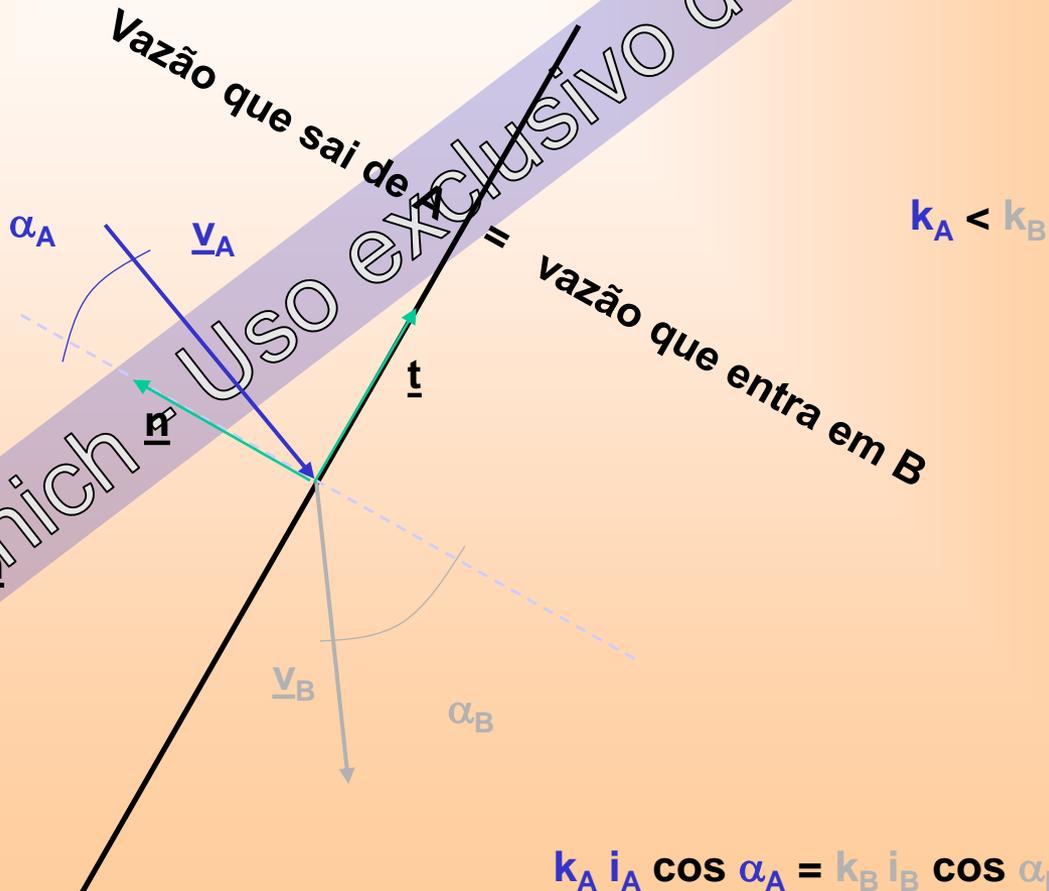
$\alpha_B$

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

# Conservação de massa

$$(\underline{v}_A \cdot \underline{n}) \Delta S = (\underline{v}_B \cdot \underline{n}) \Delta S$$

$$-k_A \nabla h_A \cdot \underline{n} = -k_B \nabla h_B \cdot \underline{n}$$

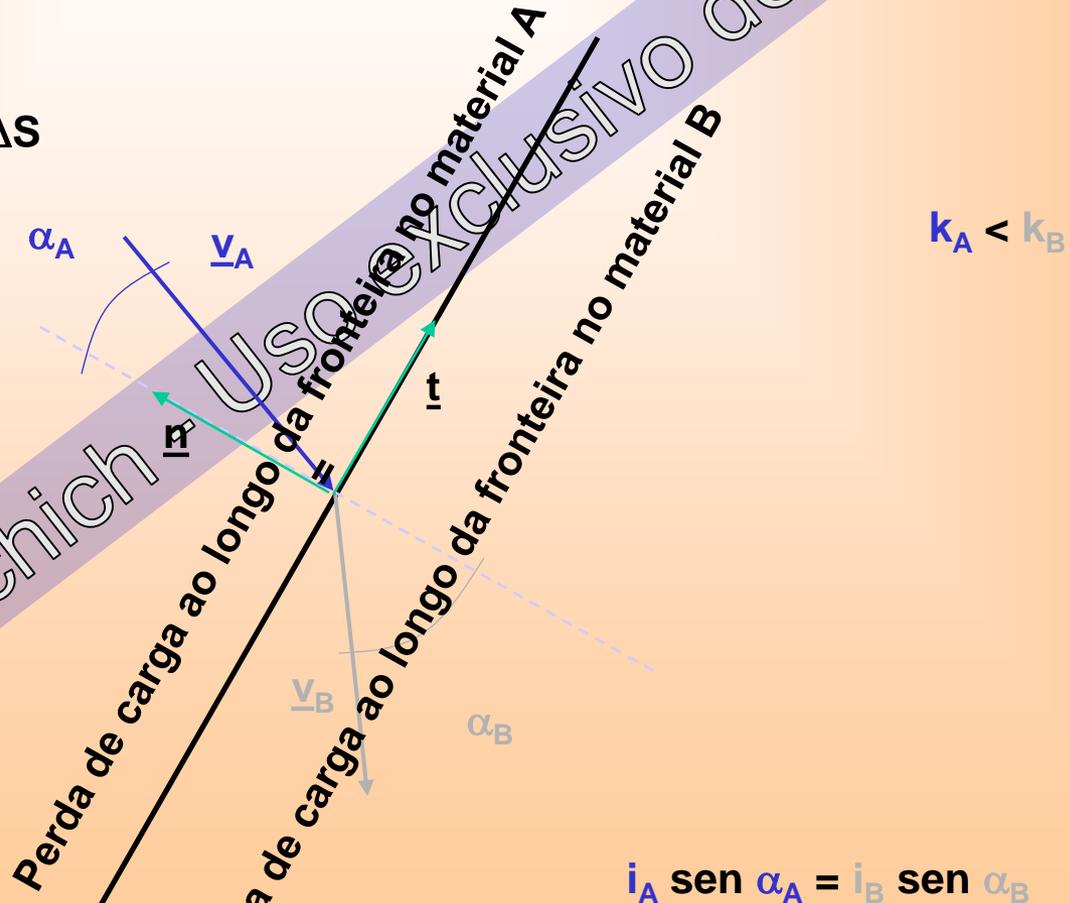


Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

# Conservação de energia

$$(\underline{\nabla}h_A \cdot \underline{t}) \Delta S = (\underline{\nabla}h_B \cdot \underline{t}) \Delta S$$

$$\underline{\nabla}h_A \cdot \underline{t} = \underline{\nabla}h_B \cdot \underline{t}$$



Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

# Substituindo

$$k_A i_A \cos \alpha_A = k_B i_B \cos \alpha_B$$

$$i_A \sin \alpha_A = i_B \sin \alpha_B$$

$$k_A < k_B$$

$$\frac{k_A}{\tan \alpha_A} = \frac{k_B}{\tan \alpha_B}$$

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

Waldemar Hachich - Uso exclusivo de PEF3310

# Reservatório de Baldwin Hills

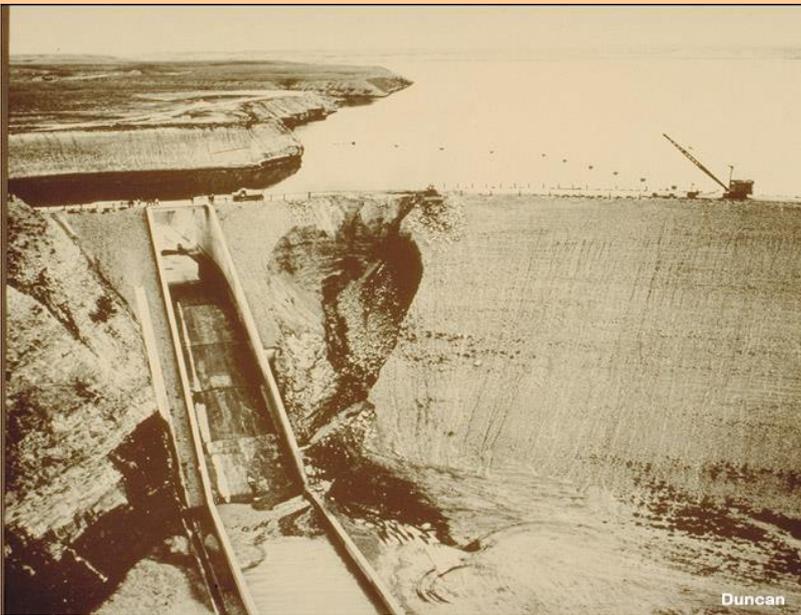
- Baldwin Hills (rompeu em 1963 por “piping”



Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

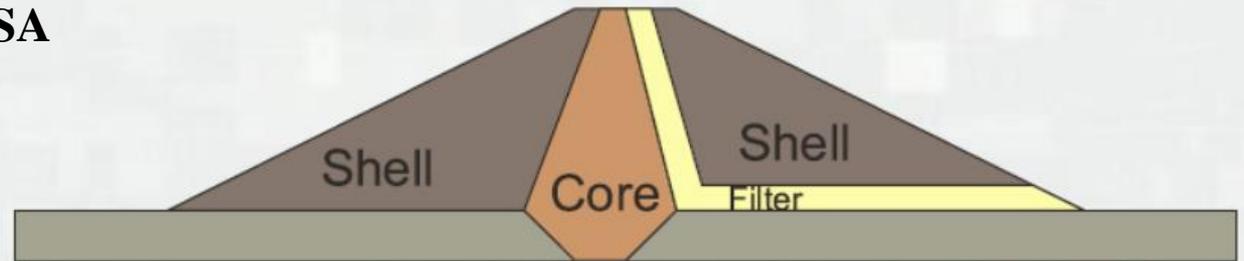
# Filtros-drenos

ivo de PEF3310

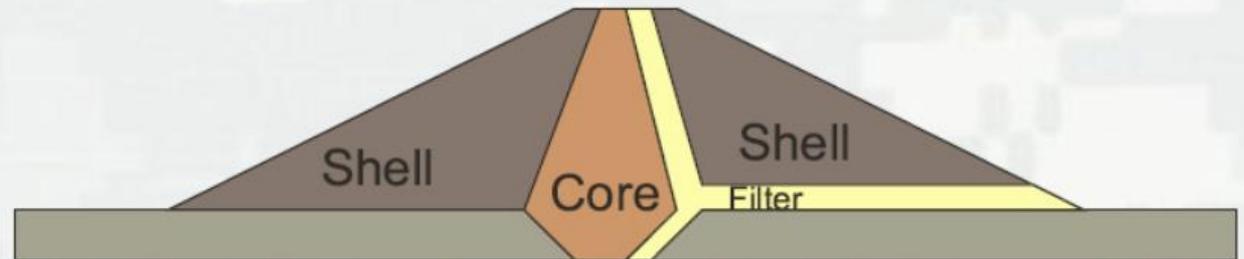


**Barragem Fontenelle, USA  
(1965)**

**Before Fontenelle**



**After Fontenelle**



Waldemar H

# Filtros-drenos

## Objetivos:

- ✓ *impedir os finos de serem carreados (função filtro)*
- ✓ *facilitar a drenagem (função dreno)*

## Usados em:

- *Barragens*
- *Muros de arrimo*

## Materiais de Filtro:

- *Solos granulares*
- *Geotêxteis*

# Projeto de filtro-dreno com material granular

## Critério de Retenção:

$$D_{15, \text{ filtro}} < 5 D_{85, \text{ solo}}$$

O material do filtro não pode ser muito grosso (para reter o solo a ser protegido)

## Critério de Permeabilidade:

$$D_{15, \text{ filtro}} > 4 D_{15, \text{ solo}}$$

O material do filtro não pode ser muito fino (para drenar “livremente”, isto é, com  $u \cong 0$ )

*Terzaghi & Peck (1967)*

Sempre me perguntei por que o  
procedimento gráfico dos  
quadrados levava à solução  
exata da equação de Laplace

Resposta na próxima aula

# Redes de fluxo e ângulos retos,

## Por que?

- O fluxo 2D se processa em um domínio  $x, z$
- Cada ponto desse domínio tem um carga hidráulica ( $h$ ) e um fluxo ( $\psi$ ) que desejamos conhecer
- A demonstração parte da seguinte função de variável complexa:
  - $f = h(x, z) + i\psi(x, z)$ , na qual
  - $h(x, z)$  é a parte real
  - $\psi(x, z)$  é a parte imaginária,
  - ambas no ponto  $(x, z)$  do domínio de percolação

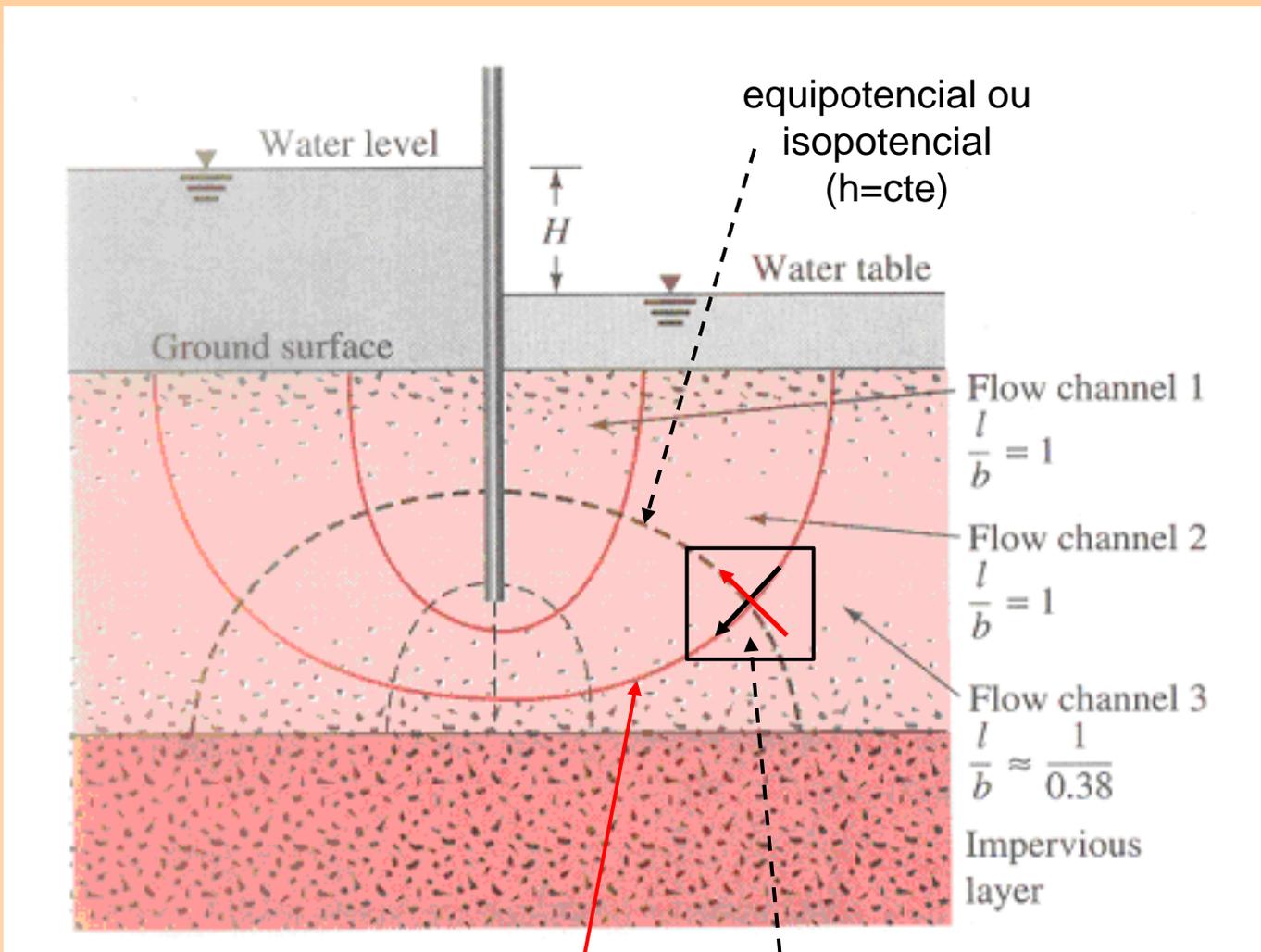
# Representação simplificada de derivadas

- Para simplificar adotaremos a seguinte notação:

- $\frac{\partial h}{\partial x} = h_x$

- $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = h_{xx}$

Waldemar Hachich - Uso exclusivo da PEF3310



vetor gradiente de  $\psi$  no ponto  $(x,z)$

equipotencial ou isopotencial ( $h=cte$ )

vetor gradiente de  $h$  no ponto  $(x,z)$

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

# Funções de variáveis complexas

- Em cálculo de uma variável, estudamos funções  $f(x)$  de uma variável real  $x$ . Em análise complexa, estudamos funções de uma variável complexa  $c = x + iz$ , e nos perguntamos qual o valor dessa variável  $c$  que satisfaz à função  $g(c)$ .
- $g(c)$  é simplesmente  $F(x, z) = h(x, z) + i\psi(x, z)$ , dependente das duas variáveis reais  $x$  e  $z$ .  $h(x, z)$  é a parte real de  $g$  e  $\psi(x, z)$  a parte imaginária.

# Derivadas de funções de variáveis complexas

- Para variáveis complexas não basta que existam as derivadas parciais  $h_x, h_z, \psi_x, \psi_z$  da parte real e da parte imaginária.
- Demonstra-se, não sem alguma dificuldade... que:
- $g'(c) = h_x + i\psi_x = \psi_z - ih_z$
- Esse resultado implica a necessidade de serem satisfeitas as chamadas equações de Cauchy-Riemann.

# Equações de Cauchy-Riemann

- Equações de Cauchy-Riemann:

- $h_x = \psi_z$

- $\psi_x = -h_z$

- Se, além disso, as funções  $h$  e  $\psi$  tiverem derivadas parciais contínuas em relação a  $x$  e a  $z$ , as derivadas parciais de ordem 2 das equações de Cauchy-Riemann podem ser obtidas, resultando

# Considerando as derivadas de segunda ordem das equações de Cauchy-Riemann

- Aplicadas  $h$ :

- $h_{xx} = \psi_{zx}$

- $h_{xz} = \psi_{zz}$

- Aplicadas a  $\psi$ :

- $\psi_{xz} = -h_{zz}$

- $\psi_{xx} = -h_{xz}$

- Lembrar que  $\psi_{zx} = \psi_{xz}$

- Lembrar que  $h_{xz} = h_{zx}$

- Resultam assim duas equações de Laplace

- $h_{xx} + h_{zz} = 0$  (em  $h$ )

- $\psi_{zz} + \psi_{xx} = 0$  (em  $\psi$ )

# Funções harmônicas

- As integrais dessas duas equações
- $h_{xx} + h_{zz} = 0$
- $\psi_{xx} + \psi_{zz} = 0$
- são denominadas funções harmônicas
- Vamos agora examinar os gradientes dessas 2 funções

# Gradientes das funções harmônicas

- $h = h(x, z)$

- $\nabla h = \begin{bmatrix} h_x \\ h_z \end{bmatrix}$

- $\psi = \psi(x, z)$

- $\nabla \psi = \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_z \end{bmatrix}$

- O produto escalar desses dois vetores é

$$\nabla h \cdot \nabla \psi = h_x \psi_x + h_z \psi_z$$

Produto escalar nulo  $\rightarrow$   
vetores perpendiculares

- Relembrando novamente as equações de Cauchy-Riemann,

- $h_x = \psi_z$

- $\psi_x = -h_z$

O produto escalar é nulo.

# Conclusão importante

- Em meio isotrópico, carga hidráulica e fluxo constituem funções harmônicas e **linhas equipotenciais são necessariamente perpendiculares a linhas de fluxo!**

Waldemar Hachich - uso exclusivo de PEF3310

# Meio anisotrópico 2D

- Se às direções x e z correspondem as condutividades hidráulicas maior ( $k_x$ ) e menor ( $k_z$ )...

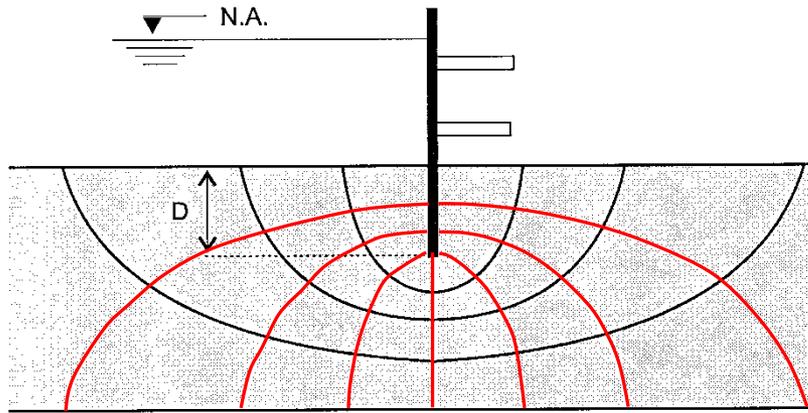
- Darcy  $\Rightarrow v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}$   $v_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$

- “Laplace” 2D  $k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$

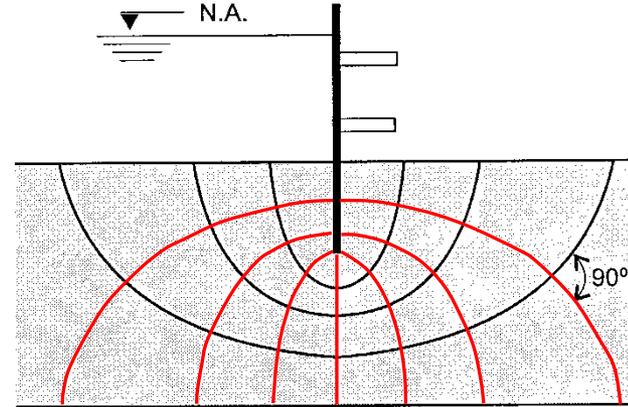
$$\text{ou } \frac{k_x}{k_z} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

# Anisotropia de Permeabilidade

73310

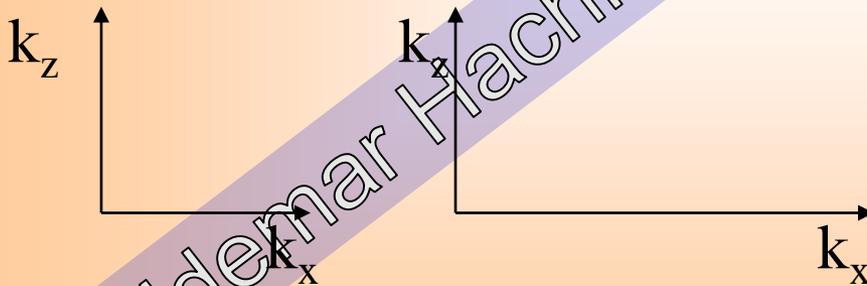


a) Seção verdadeira  
(escala natural)



b) Seção transformada

Pinto (2000)



isotrópico

anisotrópico

$$x_T = x \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}$$

$$k_E = \sqrt{k_x k_z}$$

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado

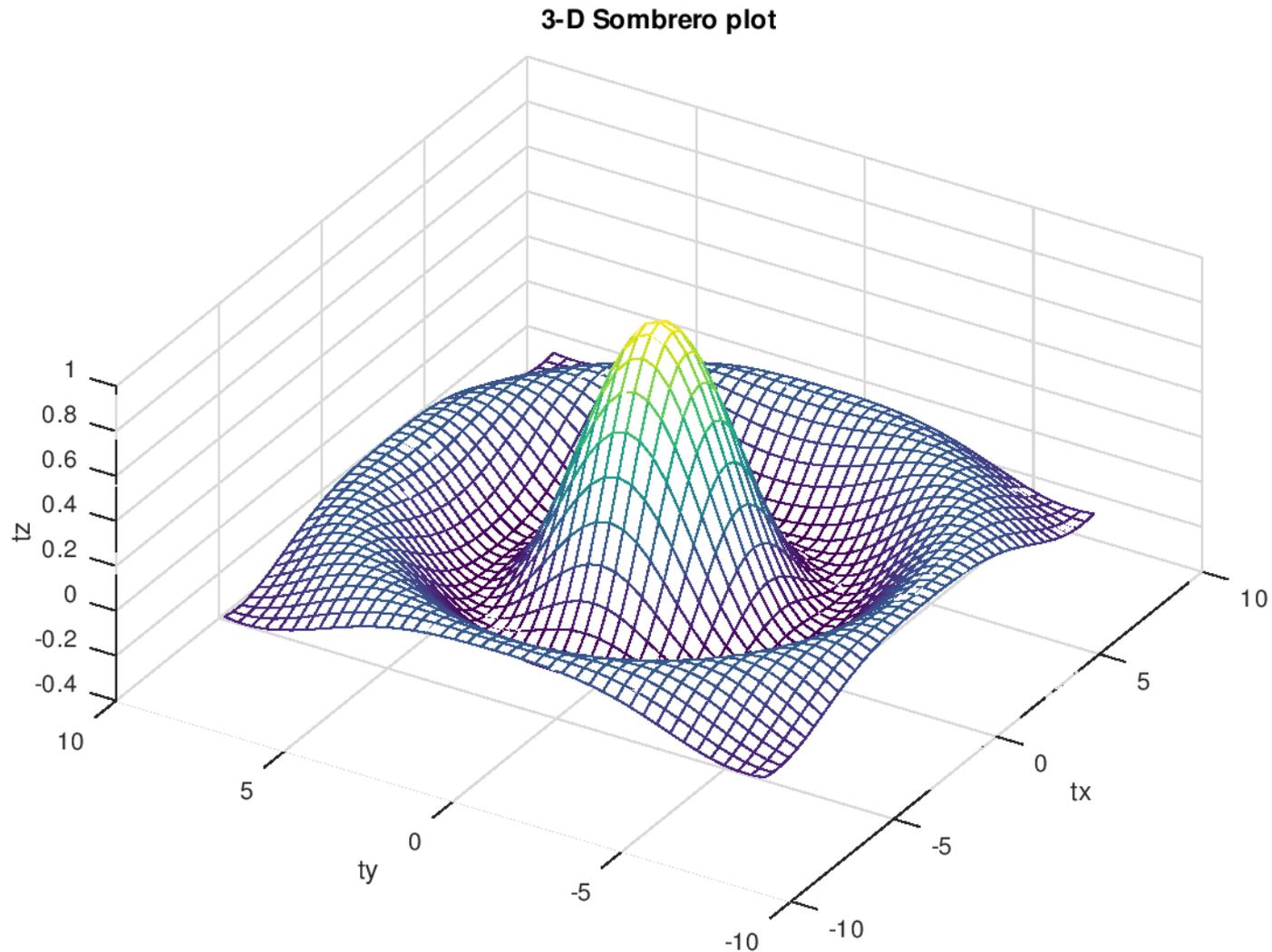
# Observação importante

- Em meio anisotrópico a solução, em termos de cargas hidráulicas, depende apenas dos valores **relativos** das condutividades hidráulicas e os **ângulos não podem mais ser retos!**

Waldemar Hachigo - uso exclusivo de PEF3310

# Curiosidades

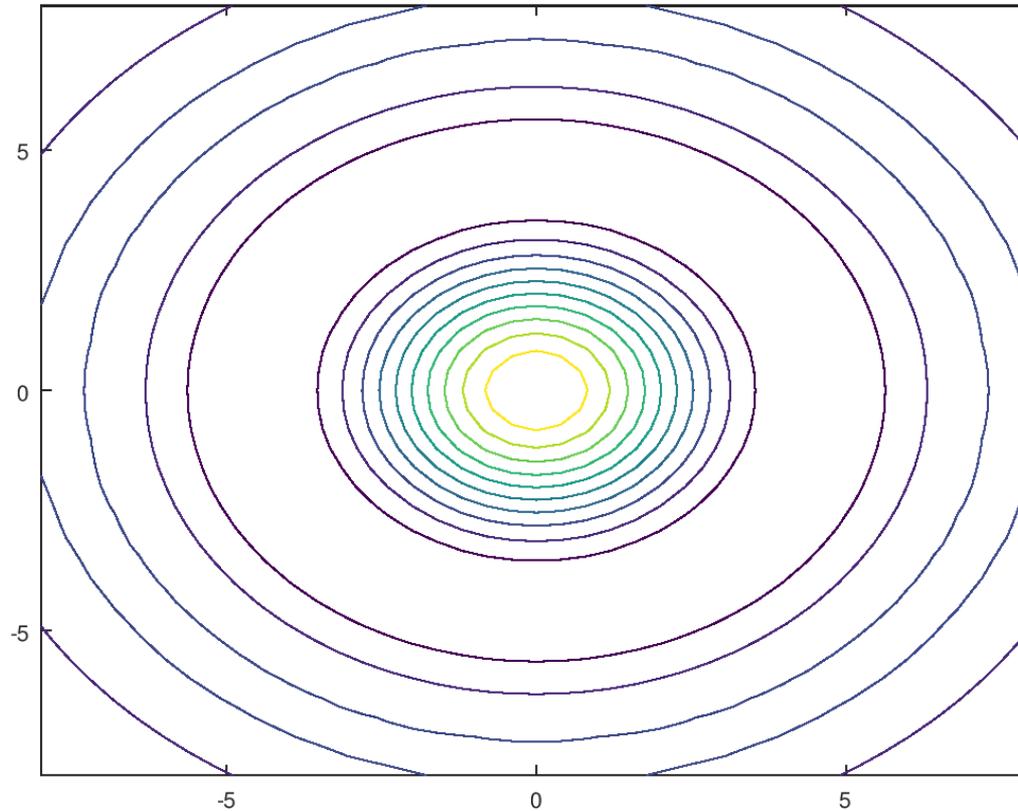
EE3310



M

# Curiosidades

173310



Waldemar

Todas as figuras apresentadas são protegidas pelos direitos autorais dos respectivos autores e, sendo assim, só podem ser utilizadas para fins acadêmicos de aprendizado