

Capítulo 10

Pêndulo Invertido

10.1 Objetivos

O objetivo desta prática é projetar dois controladores para o módulo Pêndulo Invertido. O primeiro controlador é responsável por manter o pêndulo na posição vertical, este controle será projetado por técnicas de controle ótimo e é denominado controle do balanço. O segundo controlador é responsável por elevar o pêndulo desde a posição inicial para baixo até a posição final para cima. Este controlador é denominado controle do *swing up*.

Ao final desta prática, você deverá saber:

- Como modelar matematicamente o sistema pêndulo invertido.
- Projetar um controlador LQR ótimo para o controle de balanço.
- Projetar um controlador para o controle do *swing up*.

10.2 Requisitos do sistema

Na realização da prática o seguinte conjunto de equipamentos será utilizado:

[1] Módulo de potência *Quanser UPM 2405/1503* ou equivalente.

[1] *Quanser MultiQ/MQ3* ou equivalente.

[1] Planta *Quanser IP-02*

[1] PC equipado com o requerido programa como declarado no manual do usuário.

A Fig. 10.1 mostra o módulo Pêndulo Invertido. O módulo é composto por duas partes: a carro, acionado por um motor elétrico, e o pêndulo. O controle de posição do carro é realizado pela realimentação dos dados de um encoder incremental acoplado ao eixo do rotor. A posição angular do pêndulo com relação ao carro é obtido também por um encoder acoplado ao eixo daquele.



Figura 10.1: Módulo Pêndulo Invertido.

10.3 Modelo matemático

Nesta seção são apresentados o modelo dinâmico de pêndulo invertido e sua linearização em torno de um ponto de equilíbrio.

10.3.1 Definição da Posição Angular do Pêndulo

Durante a aplicação dos controladores de balanço e do *swing up* são utilizados três representações para a posição angular do pêndulo com relação ao carro conforme a Fig. 10.2.

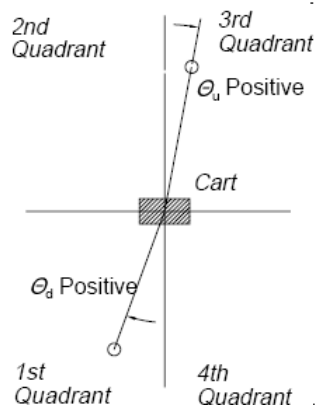


Figura 10.2: Posições angulares *Up* e *Down* do pêndulo.

θ_f (FULL): A posição FULL do pêndulo inicia em zero (pêndulo para baixo) e aumenta na direção positiva quando o pêndulo rotaciona no sentido horário e diminui quando o pêndulo rotaciona no sentido anti-horário. O valor da medida do ângulo pode exceder 360 graus várias vezes em ambas as direções. Este valor é obtido diretamente através do contador do encoder.

θ_u (UP): A posição UP é relativa ao eixo vertical na posição para cima. Ela dá um valor zero quando o pêndulo está diretamente para cima e um valor positivo quando o pêndulo está inclinando a direita da vertical e um valor negativo quando está a esquerda da vertical. Esta representação é utilizada no controle do balanço. Ela é obtida desenvolvendo a operação que segue:

$$\theta_u = -\sin^{-1}(\sin(\theta_f)). \quad (10.1)$$

Perceba que \sin^{-1} retorna valores entre $\pm\frac{\pi}{2}$.

θ_d (DOWN): A posição DOWN é essencialmente a mesma que a posição FULL, entretanto, é limitada para valores entre ± 180 graus. Este é o valor usado no controlador do *swing up* desde que a realimentação seja relativa a posição para baixo. O valor θ_d é obtido usando a equação que segue:

$$\theta_d = \tan^{-1}(\sin(\theta_f), \cos(\theta_f)). \quad (10.2)$$

Perceba que \tan^{-1} retorna um valor entre $\pm\pi$, e que todas as operações trigonométricas são feitas com os ângulos convertidos em radianos. A Fig. 10.3 mostra as relações entre as representações para a posição angular do pêndulo.

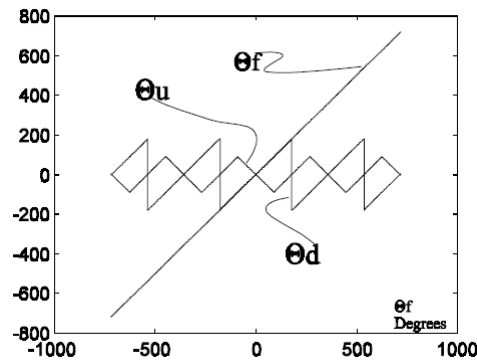


Figura 10.3: Relações entre as representações de θ .

10.3.2 Sistema não linear

Nesta seção são apresentados o modelo dinâmico não linear do pêndulo invertido. Considere o modelo simplificado da Fig. 10.4, sendo:

- x_c : posição do carro no eixo X;
- θ_u : ângulo entre o eixo vertical e o pêndulo;
- l_p : distância do ponto de conexão do pêndulo ao carro até o centro de massa do pêndulo, metade do tamanho do pêndulo ($l_p = 0.5L$);
- M_c : massa do carro;
- M_p : massa do pêndulo;
- I_p : momento de inércia do pêndulo;
- F_c : força atuando no carro.

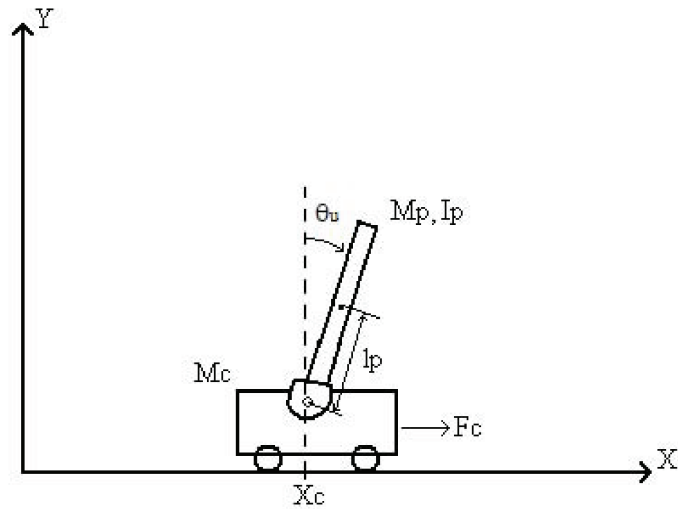


Figura 10.4: Modelo simplificado do pêndulo invertido.

O modelo dinâmico será encontrado utilizando-se a Equação de Euler-Lagrange dada por:

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) - \frac{\delta L}{\delta q} = Q \quad (10.3)$$

sendo $L = K - P$ o Lagrangeano, K a energia cinética, P a energia potencial, q as coordenadas generalizadas e Q as forças externas não conservativas.

Para o sistema do Pêndulo Invertido temos:

- Energia potencial do pêndulo:

$$P_p = M_p g l_p \cos(\theta_u),$$

sendo g a constante de gravidade.

- Energia potencial do carro:

$$P_c = 0.$$

- Energia cinética do pêndulo:

$$K_p = \frac{M_p}{2} (\dot{x}_c + l_p \dot{\theta}_u \cos(\theta_u))^2 + \frac{M_p}{2} (-l_p \dot{\theta}_u \sin(\theta_u))^2 + \frac{I_p}{2} \dot{\theta}_u^2.$$

- Energia cinética do carro:

$$K_p = \frac{M_c}{2} \dot{x}_c^2.$$

As coordenadas generalizadas e as forças externas são definidas por:

$$q = \begin{bmatrix} x_c \\ \theta_u \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} F_c - B_{eq} \dot{x}_c \\ -B_p \dot{\theta}_u \end{bmatrix}.$$

sendo B_{eq} o amortecimento equivalente do carro e B_p o amortecimento do pêndulo com relação ao carro.

As equações diferenciais não lineares são:

$$\begin{aligned} (M_c + M_p) \ddot{x}_c - M_p l_p \sin(\theta_u) \dot{\theta}_u^2 + M_p l_p \cos(\theta_u) \ddot{\theta}_u &= F_c - B_{eq} \dot{x}_c \\ M_p l_p \cos(\theta_u) \ddot{x}_c + (I_p + M_p l_p^2) \ddot{\theta}_u - M_p g l_p \sin(\theta_u) &= -B_p \dot{\theta}_u \end{aligned}$$

sendo \ddot{x}_c e $\ddot{\theta}_u$ as acelerações e \dot{x}_c e $\dot{\theta}_u$ as velocidades do carro e do pêndulo, respectivamente.

10.3.3 Modelo linear

Nesta seção são apresentadas as equações lineares do sistema pêndulo invertido obtidas a partir das equações não lineares, realizando-se uma linearização em torno do ponto de equilíbrio instável dado por:

$$q_0 = \begin{bmatrix} x_c \\ \theta_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As equações lineares resultantes são:

$$\begin{aligned} (M_c + M_p) \ddot{x}_c + M_p l_p \ddot{\theta}_u &= F_c - B_{eq} \dot{x}_c \\ M_p l_p \ddot{x}_c + (I_p + M_p l_p^2) \ddot{\theta}_u - M_p g l_p \theta_u &= -B_p \dot{\theta}_u \end{aligned}$$

Para o projeto do controlador ótimo LQR, o sistema deve ser descrito na representação de espaço de estados. Considere o estado dado pela posição do carro, pela

posição angular do pêndulo e pelas respectivas derivadas no tempo:

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ \theta_u \\ \dot{x}_c \\ \dot{\theta}_u \end{bmatrix}$$

Finalmente, a representação no espaço de estados é dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{M_p^2 l_p^2 g}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} & -\frac{(I_p + M_p l_p^2) B_{eq}}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} & \frac{M_p l_p B_p}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} \\ 0 & \frac{(M_c + M_p) M_p l_p g}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} & \frac{M_p l_p B_{eq}}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} & -\frac{(M_c + M_p) B_p}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(I_p + M_p l_p^2)}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} \\ -\frac{M_p l_p}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} \end{bmatrix}.$$

10.4 Projeto dos Sistemas de Controle

O controlador consistirá de duas parte. Um será o controle do *swing up* enquanto o segundo é o controle do balanço. O controlador do *swing up* oscilará o carro até ter energia suficiente para que o pêndulo fique quase na posição perpendicular. Neste instante, o controlador do balanço será ligado e será usado para manter o pêndulo na vertical.

10.4.1 Controle do *Swing up*

O controle do *swing up* essencialmente controlará a posição do carro com o objetivo de desestabilizar a posição *down*. Assuma que a posição do carro possa ser controlada via x_c^d . Então a realimentação:

$$x_c^d = P\theta_d + D\dot{\theta}_d, \quad (10.4)$$

sendo P e D ganhos apropriadamente escolhidos para fazer o sistema desestabilizar. Isto significa que queremos comandar o carro baseado na posição e na velocidade do pêndulo. Esta abordagem é intuitiva: faz sentido mover o carro pra trás e para frente até o pêndulo ficar na posição vertical. O valor de x_c^d deve ser limitado, assegurando-se que o carro não bata nos suportes laterais do trilho.

Para o carro seguir a posição desejada, projeta-se um controlador PD na forma:

$$V = K_p(x_c - x_c^d) + K_d\dot{x}_c. \quad (10.5)$$

As equações do motor são:

$$V = I_m R_m + K_m K_g \omega_g = I_m R_m + K_m K_g \frac{\dot{x}_c}{r} \quad (10.6)$$

sendo V (volts) a tensão aplicada ao motor, I_m (A) a corrente no motor, K_m ($V/(radseg^{-1})$) a constante contra-eletromotriz, K_g a relação de engrenagem, ω_g (Rad/seg) a velocidade angular de saída do motor, x (m/seg) a velocidade do carro, r (m) raio do pinhão do motor.

O torque gerado pelo motor é:

$$T = K_m K_g I_m, \quad (10.7)$$

o qual é transmitido como uma força para o carro pelo pinhão:

$$F = \frac{T}{r}. \quad (10.8)$$

Esta força resulta na aceleração do carro governado pela equação:

$$F = M_c \ddot{x}_c. \quad (10.9)$$

Observe que M_c é a massa do carro mais o peso alocado sobre o carro. Combinando a equação acima, tem-se a função de transferência de malha aberta

$$\frac{x_c}{V} = \frac{1}{s \left(\frac{M_c R_m r}{K_m K_g} s + \frac{K_m K_g}{r} \right)}. \quad (10.10)$$

Substituindo os parâmetros do sistema, obtém-se:

$$\frac{x_c}{V} = \frac{1}{s(0.49s + 4.47)} \quad (10.11)$$

e fechando o laço tem-se a função de transferência da posição do carro:

$$\frac{x_c}{x_c^d} = \frac{K_p}{-0.49s^2 + (K_d - 4.47)s + K_p}, \quad (10.12)$$

o qual tem um polinômio característico do tipo:

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 \text{ e } t_p = \frac{\Pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (10.13)$$

sendo ζ a razão de amortecimento e t_p o tempo de pico.

Agora necessita-se selecionar a razão de amortecimento e o tempo de pico para obter K_p e K_d . Considere o pêndulo do sistema, seus parâmetros são: $l_p = 0.325m$ (o centro de gravidade é localizado na metade do comprimento total), $M_p = 0.210Kg$.

O período natural para oscilações pequenas é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_p}{g}}. \quad (10.14)$$

Queremos que o carro reaja com estes movimentos. Por essa razão a resposta de malha fechada do carro deve ser considerada rápida em relação a frequência natural do pêndulo. O período natural é 1.1 segundos. Seria então razoável projetar um

controlador de malha fechada para o carro o qual atendesse as seguintes especificações:

$$t_p = \frac{T}{8} = 0.138 \text{ s e } \zeta = 0.707. \quad (10.15)$$

Isto significa que queremos o tempo de pico 8 vezes mais rápido que o período natural do pêndulo e o sistema despreza o subamortecimento. O fator 8 é bastante arbitrário e pode estar entre 5 e 10.

Usando esta abordagem, obtém-se os seguintes ganhos:

$$K_p = -5.05 \text{ V/cm}$$
$$K_d = -0.17 \text{ V/(cm.s}^{-1}\text{)}.$$

10.5 Controle do Balanço

Assumindo que o pêndulo está próximo à posição vertical, um controle por realimentação de estado pode ser implementado para manter o pêndulo nesta posição e lidar com distúrbios até um certo ponto. O controlador por realimentação de estado é projetado usando a técnica do Regulador Linear Quadrático e o modelo linear do sistema.

Dado o sistema no espaço de estados abaixo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

sendo x o estado, u a ação de controle e A e B as matrizes do sistema, o Controle Ótimo (Regulador Linear Quadrático (LQR)) busca encontrar uma lei de controle da forma $u = -Kx$ tal que o seguinte funcional é minimizado:

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u$$

sendo Q e R matrizes de ponderação (simétricas e definidas positivas).

Para o propósito deste laboratório, fixamos a matriz Q diagonal. Isto permite variar 4 parâmetros de Q , (q_1, q_2, q_3, q_4) , e um parâmetro para R , (r) (R neste caso é escalar,

pois temos apenas uma entrada):

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix}, \quad R = r. \quad (10.16)$$

10.6 Chaveamento entre Controladores

Nesta seção é descrita a estratégia de chaveamento entre os dois controladores descritos acima e a início do movimento de *swing up*.

Como inicialmente (estando o pêndulo para baixo) os valores de posição e velocidade do pêndulo são próximos de zero, o controle do *swing up* terá pouco efeito. Para que o movimento de *swing up* se inicie, nos primeiros 2.75 segundos do controlador, x_c^d é multiplicado por $1 + Kh$, limitado em $\pm 3cm$, resultando em um alto ganho do sistema por um tempo curto. Esta velocidade efetiva inicia a resposta para obter um máximo balanço em um tempo possivelmente curto. De maneira ideal, o objetivo é mover o carro para trás e para frente um número mínimo de vezes e levar o pêndulo rapidamente para cima. Se não se tem um período de alto ganho, o sistema ainda irá para cima, mas isso poderá levar mais que 20 oscilações do carro.

Experimentalmente, determina-se que o pêndulo pode se estabilizar na posição vertical aproximadamente em $\theta_k = 15$ graus da vertical e não se mover mais rápido que 100 graus/seg. Então, o controlador do *swing up* deve assegurar que quando o pêndulo esteja quase perpendicular, ele não se mova rapidamente. Isto é controlado ajustando o ganho P e D no controle do *swing up*.

Quando todas as condições listadas abaixo forem atingidas, chaveia-se para o controlador do balanço:

$$\begin{aligned} |\theta_u| < \theta_k & \text{ ângulo suficientemente pequeno} \\ |x| < x_k & \text{ posição do carro suficientemente pequena} \\ \cos(\theta_f) < 0 & \text{ pêndulo na vertical} \\ \left| \dot{\theta} \right| < \dot{\theta}_k & \text{ pêndulo movimentando-se suficientemente lento.} \end{aligned} \quad (10.17)$$

Para o sistema Pêndulo Invertido deste laboratório utiliza-se as seguintes condições:

- Ângulo UP do pêndulo < 15 graus
- Velocidade do pêndulo < 100 graus/seg
- Posição do carro < 25 cm
- Ângulo FULL do pêndulo no 2° ou 3° quadrantes.

O controle de balanço se mantém a menos que as condições que seguem tornem-se falsas e o controle do *swing up* passa a atuar:

- Ângulo UP do pêndulo menor que 2 graus
- Velocidade do pêndulo < 100 graus/seg
- Posição do carro < 25 cm
- Ângulo FULL do pêndulo no 2° ou 3° quadrantes.

Note que a condição do ângulo UP para que o controle permaneça no controle do balanço (2 graus) é menor que no caso do chaveamento do controle do *swing up* para aquele (15 graus). Esta condição mais restrita garante que o controle do *swing up* seja ativado no momento em que o pêndulo perde a estabilidade vertical, evitando que o carro mova-se para o fim do trilho em decorrência de uma resposta mais efetiva do controlador.

10.7 Apêndice - A: Nomenclatura

Tabela 10.1: Parâmetros do sistema

Parâmetro	Simbolo	Valor	Unidade
Constante de torque do motor	Km	0.00767	Nm/Amp
Constante contra emf em SI unidades			V/rad sec ⁻¹
Resistência da armadura do motor	Rm	2.6	Ω
Razão da caixa de engrenagens	Kg	3.7	N/A
Dente do pinhão do motor	NA	24	teeth
Diâmetro do pinhão do motor	r	0.00635	m
Massa do carro	mc	0.455	Kg
Peso da massa	mw	0.360	Kg
Comprimento verdadeiro do pêndulo	Lp	0.61	m
Massa do pêndulo	mp	0.210	Kg
Rack pitch	N/A	6.01	teeth/cm
Pinhão do carro do encoder # dente	N/A	56	N/A
Resolução do encoder do carro	N/A	512 * 4	count/rev
Constante de calibração do encoder	N/A	0.00454	cm/count
Resolução do ângulo do encoder do pêndulo	N/A	1024 * 4	count/rev
Constante de calibração do ângulo	N/A	0.08789	deg/count

10.8 Relatório da prática

Integrantes do Grupo:

1: _____

2: _____

3: _____

4: _____

5: _____

6: _____

1. Implemente os controladores do pêndulo invertido.
2. Compare os controladores do pêndulo invertido com a simulação realizada em Matlab.

R. _____

3. Considerando o desempenho dos controladores do pêndulo invertido, quais os possíveis distúrbios atuando no sistema?

R. _____

