Exemplo LQG/LTR

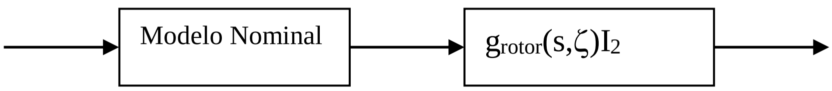
Adriano Almeida Gonçalves Siqueira

O modelo nominal da dinâmica do helicóptero CH-47 numa determinada condição de operação é o seguinte:

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.005 & 2.4 & -32 \\ -0.014 & 0.44 & -1.3 & -30 \\ 0 & 0.018 & -6 & 1.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_p + \begin{bmatrix} 0.14 & -0.12 \\ 0.36 & -8.6 \\ 0.35 & 0.009 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_p$$

$$\dot{y}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.3 \end{bmatrix} x_p$$

Suponha que o erro de modelagem predominante esteja associado à dinâmica do rotor, de modo que a planta "real" possa ser representada aproximadamente da seguinte forma:



onde:

$$g_{rotor}(s,\zeta) = \frac{625}{s^2 + 50\zeta s + 625}, \qquad 0{,}1 \le \zeta \le 1{,}0$$

I_2 é a matriz identidade (2x2).

Projete um compensador de maneira que o sistema “real”em malha fecha satisfaça as seguintes especificidades:

i)acompanhamento do sinal de referência e rejeição de perturbações com erro não superior a 10 % para $\omega \le 0{,}5$ rad/s.

ii)sensibilidade a variações na planta não superior a 15 % para $\omega \le 0{,}7$ rad/s e

iii) erro estacionário nulo para entrada degrau.

Dica: para obter $e_M(\omega)$, considere o pior caso e trabalhe numericamente.

Apresente com clareza todos os passos e considerações feitas para obter o compensador. Ilustre a sua apresentação com todos os gráficos de Bode utilizados no projeto (escala vertical em dB).

Por fim, para avaliar o controlador obtido simule em malha fechada e registre as variáveis de saída da planta nos seguintes casos:

a) $r(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} H(t); d(t) = 0$

b) $r(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix} H(t); d(t) = 0$

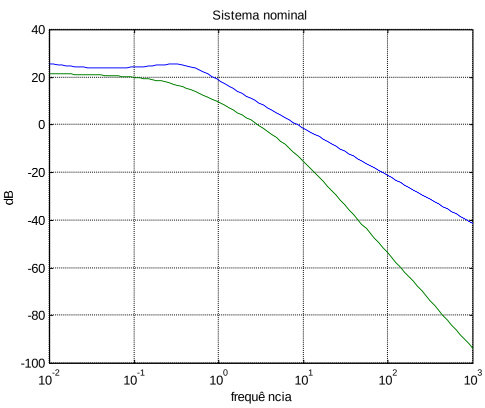
c) $r(t) = 0; d(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} H(t)$

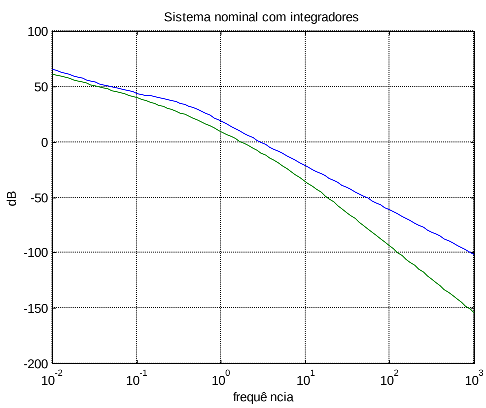
onde H(t) é a função degrau unitário: H(t) = 0 para t < 0 e H(t) = 1 para t > 0. Comente os resultados obtidos.

Resolução: Para projetar o compensador desejado foram seguidos os passos indicados no livro texto:

2.1) Inclusão de integradores

Para que o sistema tenha erro estacionário nulo para entrada degrau os valores singuares do sistema devem ter uma declividade de 20dB/década para baixas frequências o que é conseguido incluindo-se integradores no modelo nominal. As figuras abaixo mostram os valores singulares do sistema nominal G sem integradores e com integradores:





Nota-se que a planta com integradores apresenta declividade de 20 dB/dec em baixas frequências, o que garante erro estacionário nulo para entrada degrau.

2.2) Determinação das barreiras de desempenho e de estabilidade

Para se ter acompanhamento do sinal de referência e rejeição de perturbações com erro não superior a 10% para $\omega \leq 0{,}5$ rad/s, ou seja , δ_r e $\delta_d \leq 0{,}1$, a barreira de desempenho para estas condições é dada por:

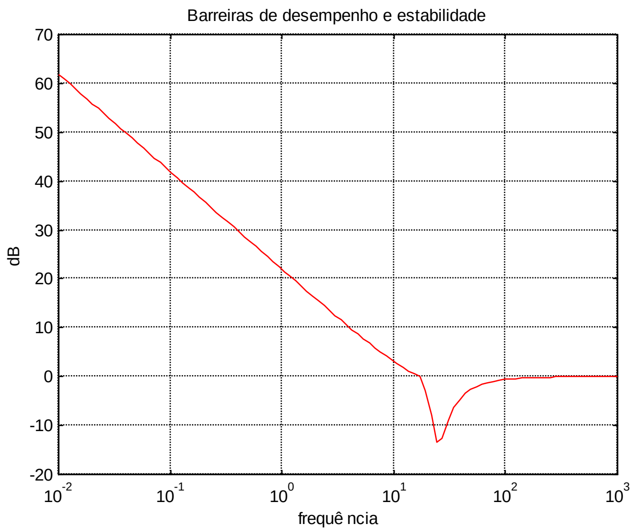
20*log10(0,1) para $\omega \leq 0{,}5$ rad/s

Para se ter sensibilidade a variações da planta com erro não superior a 15% para $\omega \leq 0{,}7$ rad/s, ou seja , $\delta_s \leq 0{,}15$, a barreira de desempenho para estas condições é dada por:

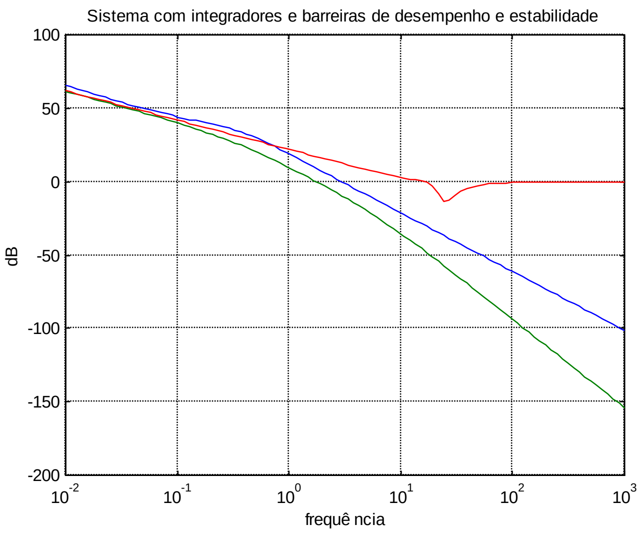
20*log10(0,15) para $\omega \leq 0{,}7$ rad/s

A barreira da estabilidade foi determinada encontrando-se o maior valor do inverso dos valores singulares do erro, variando-se a constante ζ de 0,1 a 1,0 , para uma dada frequência.A variação em toda a frequência fornece a barreira da estabilidade.

A figura abaixo mostra as barreiras de desempenho e de estabilidade.



A figura abaixo mostra os valores singulares do sistema nominal aumentado juntamente com as barreiras de desempenho e de estabilidade.



2.3) Determinação da malha objetivo G_{kf}

Inicialmente deve-se escolher μ e L de tal forma que os valores singulares de (1/raiz(μ))C(jωI-A)$^{-1}$L obedeçam às barreiras de desempenho e estabilidade.

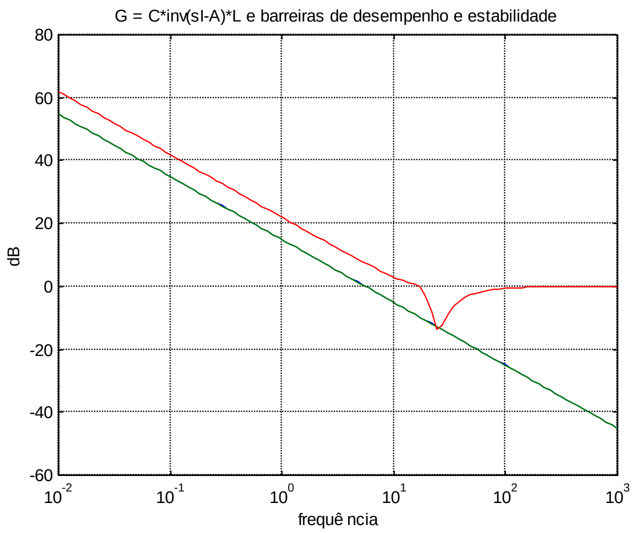
O valor de L foi escolhido conforme indicado no livro para que se tenha casamento dos valores singulares em todas as frequências:

$$L = \begin{bmatrix} Ll \\ Lh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_p A_p^{-1} B_p)^{-1} \\ -A_p^{-1} B_p L_l \end{bmatrix}$$

onde o índice *p* representa o sistema nominal sem os integradores. A matriz L é dada por:

$$L = \begin{bmatrix} -0.0527 & -0.0594 \\ 0.496 & -0.0174 \\ -0.4167 & -28.2345 \\ 1.0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0175 \end{bmatrix}$$

O valor de **μ** foi escolhido como **0.0324**, ou seja ***raiz(μ)* = 0.18**. A figura abaixo mostra os valores singulares de (1/raiz(μ))C(jωI-A)$^{-1}$L juntamente com as barreiras de desempenho e estabilidade.



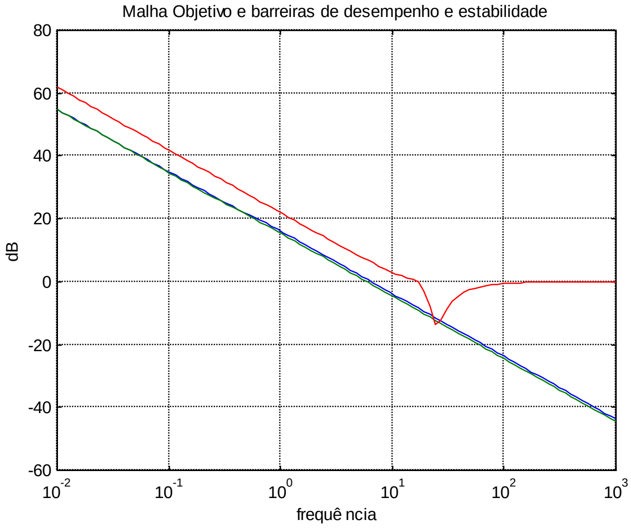
Com os valores de μ e L, determina-se a matriz de gahos do filtro de Kalman, H, obtendo-se a malha objetivo:

$$G_{KF} = C(j\omega I - A)^{-1} H$$

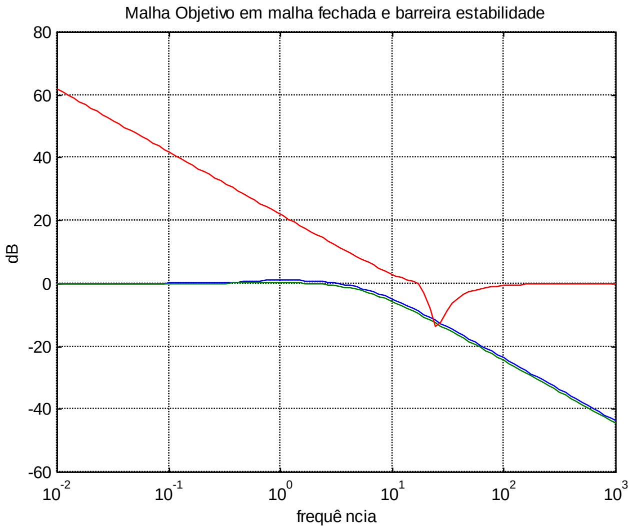
A matriz de ganhos H encontrada foi:

$$H = \begin{bmatrix} -0.3430 & 0.2774 \\ -0.084 & 0.2797 \\ -146.2718 & -9.7159 \\ 6.4747 & -0.0581 \\ -0.0033 & 0.0353 \\ -0.0010 & 0.1034 \end{bmatrix}$$

Os valores singulares de G_{KF} juntamente com as barreiras de desempenho e estabilidade são mostrados na figura abaixo.



É necessário verifar se G_{KF} em malha fechada satisfaz a condição de robustez da estabilidade. A figura abaixo mostra os valores singulares de G_{KF} em malha fechada e a barreira da estabilidade. Pode-se verificar que a condição é satisfeita.

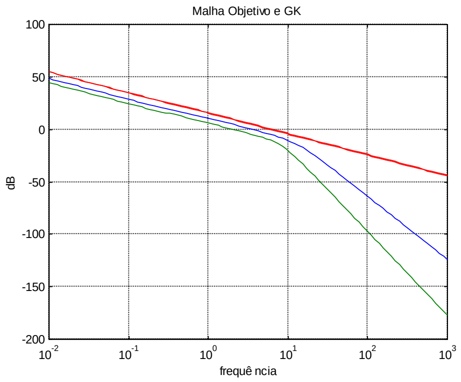


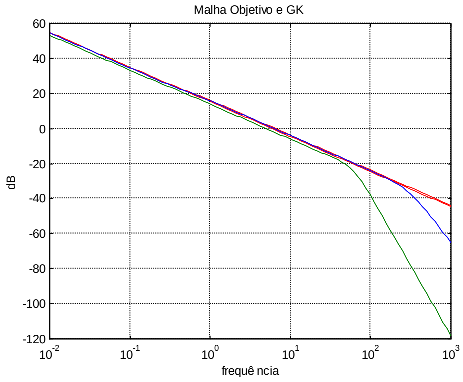
2.4) Processo de recuperação (determinação do regulador e do compensador)

Deve-se ecolher o valor de ρ de tal forma que os valores singulares da função de transferência do ramo direto $G_N(s)K(s)$ sejam próximos dos valres singulares da malha objetivo G_{KF}. A função de transferência do compensador K é dada por:

$$K = G(sI - A + BG + HC)^{-1} H$$

sendo G a matriz do regulador, encontrada resolvendo uma equação algébrica de Ricatti tendo como parâmetro ρ . Foram realizadas várias recuperações buscando aproximar $G_N(s)K(s)$ da malha objetivo. Para tal, os valores de ρ foram diminuídos até se encontrar o melhor solução. Os gráficos da figura abaixo mostram os valores singulares de $G_N(s)K(s)$ e de G_{KF} para $\rho = 0.01$ e $\rho = 1*10^{-8}$.

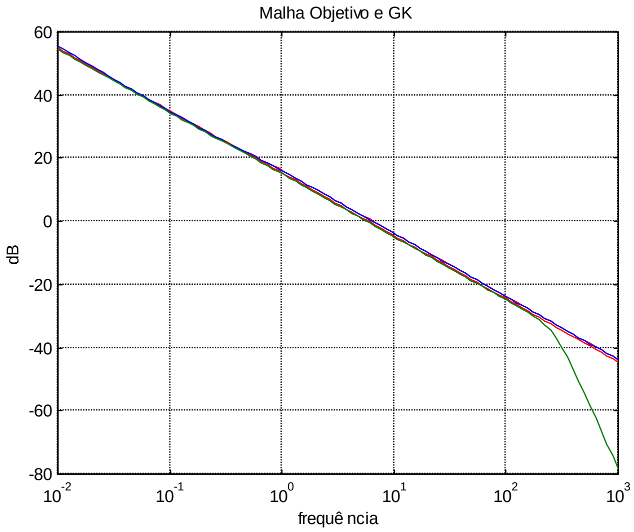




A melhor aproximação ocorreu com $\rho = 1*10^{-12}$, sendo a matriz G encontrada:

$$G = \begin{bmatrix} 544.8268 & -150.8862 & -1.1359 & 4.1579e+004 & 4.1266e+005 & 5.7263e+007 \\ -150.7824 & 4.1432e+003 & 20.0657 & -9.9935e+005 & 1.7878e+004 & 2.3991e+006 \end{bmatrix}$$

A figura abaixo mostra os valores singulares de $G_N(s)K(s)$ e de G_{KF} . Verifica-se que a proximidade é boa perto da frequência de cruzamento.



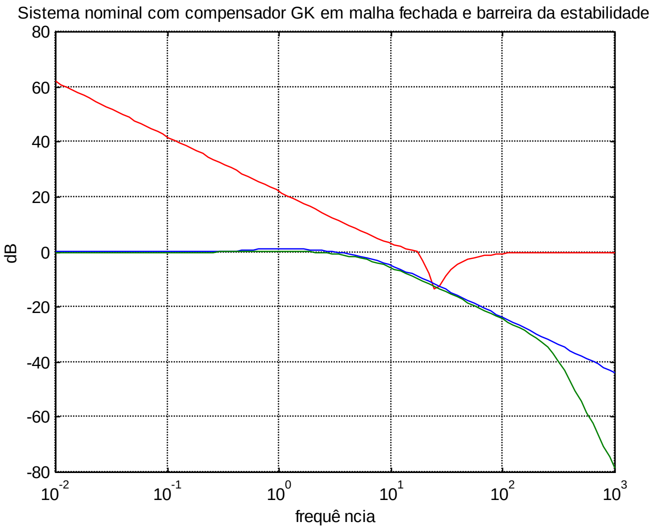
Deve-se verificar se C_N dado por:

$$C_N(j\omega) = \left[I + G_N(j\omega)K(j\omega)\right]^{-1} G_N(j\omega)K(j\omega)$$

satisfaz a condição da robustez da estabilidade dada por:

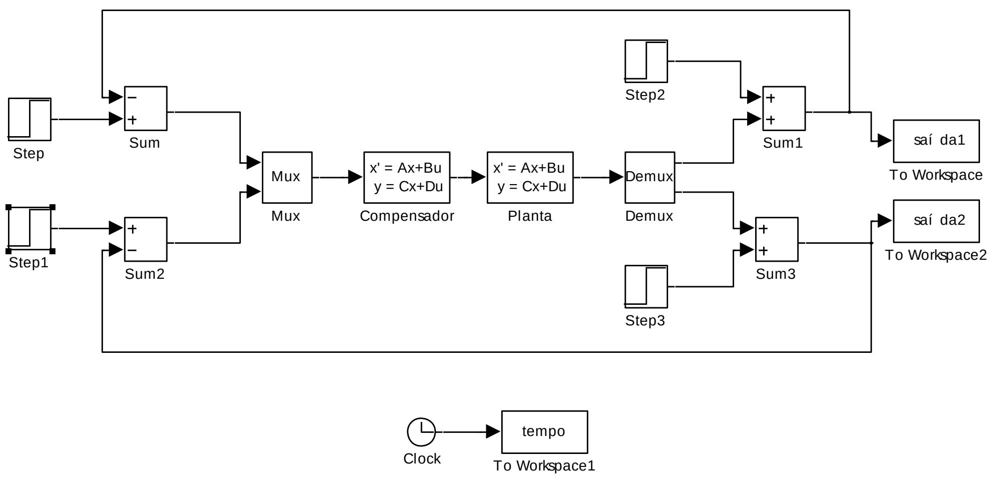
$$\sigma_M\left[C_N(j\omega)\right] < \frac{1}{e_M(\omega)}$$

A figura abaixo mostra os valores singulares de C_N e a barreira da estabilidade . Verifica-se que a condição da estabilidade é satisfeita, apesar de cruzar com a barreira da estabilidade em apenas um ponto.



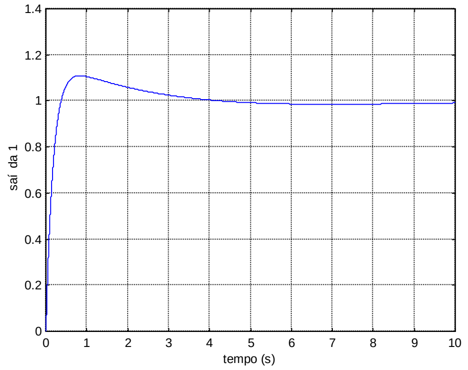
2.5) Verificação do controlador obtido.

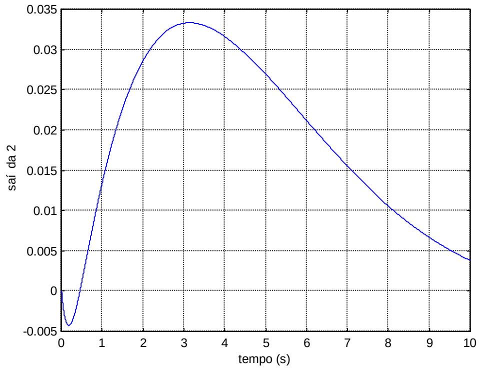
Utilizando o esquema abaixo desenvolvido no simulink, realizou-se testes no controlador obtido anteriormente.



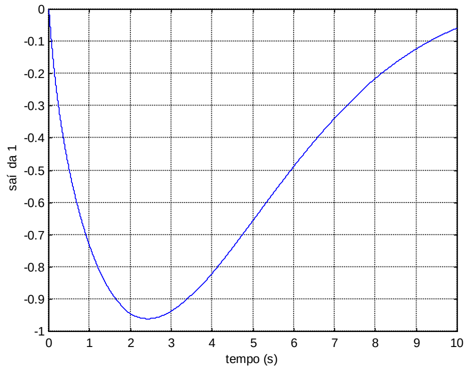
Os gráficos abaixo mostram a saída do sistema realimentado sujeito às condições abaixo.

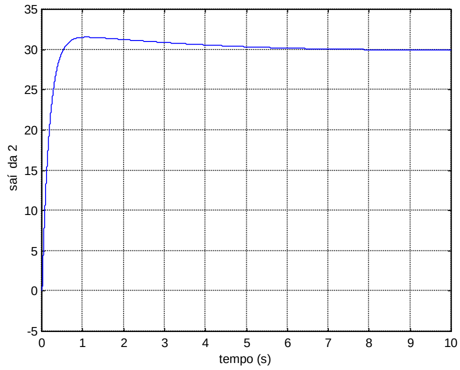
a) $r(t)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}; d(t)=0$





b) $r(t)=\begin{bmatrix}0\\30\end{bmatrix}; d(t)=0$





c) $r(t)=0; d(t)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$