Aula 6 - Desempenho e Estabilidade MIMO, Teorema do Ganho Pequeno

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Espaço de Estados

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}\end{aligned}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2-4s-5} & \frac{2s+2}{s^2-4s-5} \\ \frac{2}{s^2-4s-5} & \frac{s-1}{s^2-4s-5} \end{bmatrix}$$

Decomposição em Valores Singulares

Para um sistema $G(s)$, na frequência ω

Maior valor singular:

$$\overline{\sigma}(G(j\omega)) = \max_{d \neq 0} \frac{\|G(j\omega)d(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \sqrt{\overline{\lambda}(G^H(j\omega)G(j\omega))}$$

Menor valor singular:

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) = \min_{d \neq 0} \frac{\|G(j\omega)d(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \sqrt{\underline{\lambda}(G^H(j\omega)G(j\omega))}$$

$d(\omega) = [d_1 sen(\omega t + \alpha_1) \ \ \cdots \ \ d_m sen(\omega t + \alpha_m)]^T$
$\overline{\lambda}$ e $\underline{\lambda}$ são o maior e o menor autovalor de $G^H(j\omega)G(j\omega)$

Decomposição em Valores Singulares

Propriedades:

Norma espectral (norma induzida)

$$\|G(j\omega)\|_{i2} = \overline{\sigma}(G(j\omega)) = \max_{d \neq 0} \frac{\|G(j\omega)d(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2}$$

$$\left\|G^{-1}(j\omega)\right\|_{i2} = \frac{1}{\underline{\sigma}(G(j\omega))}$$

$$|\overline{\sigma}(G(j\omega)) - 1| \leq \overline{\sigma}(G(j\omega) + I) \leq \overline{\sigma}(G(j\omega)) + 1$$

$$|\underline{\sigma}(G(j\omega)) - 1| \leq \underline{\sigma}(G(j\omega) + I) \leq \underline{\sigma}(G(j\omega)) + 1$$

Espaço $\mathcal{H}_\infty$: Funções de transferência com norma $\mathcal{H}_\infty$ limitada, ou seja, funções próprias e estáveis

Norma $\mathcal{H}_\infty$

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \overline{\sigma}\{G(j\omega)\}$$

sup: supremo, máximo dos máximos

Exemplo

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(0.2s+1)(s+1)} & \frac{1}{(0.2s+1)(s+1)} \\ \frac{2s+1}{(0.2s+1)(s+1)} & \frac{2}{(0.2s+1)(s+1)} \end{bmatrix}$$

Polos e Zeros:

$$det(G(s)) = \frac{1-2s}{((0.2s+1)(s+1))^2}$$

Polos = -5, -1, -5, -1

Zeros = 0.5 (Sistema de Fase Não Mínima - Problema)

Exemplo

Decomposição em Valores Singulares

$$G(0.5) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1.65} & \frac{1}{1.65} \\ \frac{2}{1.65} & \frac{2}{1.65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.89 \\ 0.89 & -0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.92 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.71 & 0.71 \\ 0.71 & -0.71 \end{bmatrix}$$

Perda de posto (rank) em $s = 0.5$

Entradas: $u_1 = 1$ e $u_2 = -1$

Exemplo

Controle $\mathcal{H}_\infty$ Mixed-Sensitivity S/KS

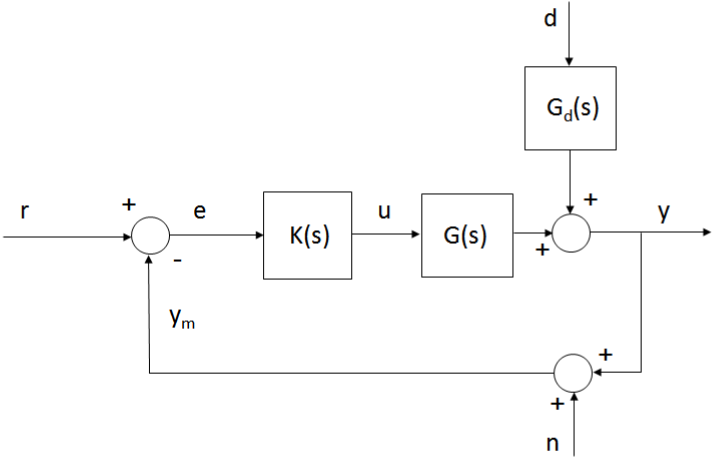
$$N = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \end{bmatrix}$$

Funções Peso:

$$W_u = I \qquad W_P = \begin{bmatrix} w_{P1} & 0 \\ 0 & w_{P2} \end{bmatrix} \quad w_{Pi} = \frac{s/M_i + \omega_{b_i}}{s + \omega_{b_i} A_i}$$

Design 1: $M_1 = M_2 = 1.5$, $\omega_{b_1} = \omega_{b_2} = 0.25$, $A_i = 10^{-4}$

Design 2: $M_1 = M_2 = 1.5$, $\omega_{b_1} = 0.25$, $\omega_{b_2} = 25$, $A_i = 10^{-4}$


d
$G_d(s)$
r
+
e
K(s)
u
G(s)
+
y
+
-
y_m
+
+
n

Função **Sensibilidade**: $S(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}$

Função **Sensibilidade Complementar**:

$$T(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s)$$

Propriedade: $S(s) + T(s) = 1$

Malha Aberta: $L(s) = G(s)K(s)$

Saída

$$y = T(s)r + T(s)n + S(s)G_d(s)d$$

Erro

$$e = -S(s)r - T(s)n + S(s)G_d(s)d$$

Desempenho MIMO

Acompanhamento de Referência

Saída

$$y = T(s)r = [I + G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s)r$$

Erro

$$e = -S(s)r = -[I + G(s)K(s)]^{-1}r$$

Referência: Ω_r conjunto de frequências onde r tem maior parte de sua energia

$$\Omega_r = \{\omega \leq \omega_r\}$$

Acompanhamento de Referência

$$\|e(j\omega)\|_2 \leq \left\|[I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\|_{i2} \|r(j\omega)\|_2$$

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|r(j\omega)\|_2} \leq \left\|[I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\|_{i2}$$

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|r(j\omega)\|_2} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}([I + G(j\omega)K(j\omega)])} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) - 1}, \quad \underline{\sigma}(GK) > 1$$

Acompanhamento de Referência

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|r(j\omega)\|_2} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) - 1} \approx \frac{1}{\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega))}, \quad \underline{\sigma}(GK) \gg 1$$

Requisito:

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|r(j\omega)\|_2} \leq \alpha_r(\omega) \ll 1, \quad \omega < \omega_r$$

Então:

$$\underline{\sigma}(L(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \geq \frac{1}{\alpha_r(\omega)}, \quad \omega < \omega_r$$

Desempenho MIMO

Acompanhamento de Referência

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|r(j\omega)\|_2} \leq \left\|[I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\|_{i2} = \|S(j\omega)\|_{i2}$$

Aula 5 - Caso SISO

$$|S(j\omega)| < |1/W_p(j\omega)|\,, \forall\omega \Leftrightarrow |W_p(j\omega)S(j\omega)| < 1, \forall\omega \Leftrightarrow$$

$$\|W_p(s)S(s)\|_\infty < 1$$

Caso MIMO

$$\|S(j\omega)\|_{i2} < \|1/W_p(j\omega)\|_{i2}\,, \forall\omega \Leftrightarrow \|W_p(s)S(s)\|_\infty < 1$$

Rejeição a distúrbio

Saída

$$y = S(s)G_d(s)d = [I + G(s)K(s)]^{-1}G_d(s)d$$

Erro

$$e = S(s)G_d(s)d = [I + G(s)K(s)]^{-1}G_d(s)d$$

Distúrbio: Ω_d conjunto de frequências onde d tem maior parte de sua energia

$$\Omega_d = \{\omega \leq \omega_d\}$$

Desempenho MIMO

Rejeição a distúrbio. Simplificação $G_d(s) = I$

$$\|e(j\omega)\|_2 \leq \left\| [I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1} \right\|_{i2} \|d(j\omega)\|_2$$

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|d(j\omega)\|_2} \leq \left\| [I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1} \right\|_{i2}$$

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|d(j\omega)\|_2} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}([I + G(j\omega)K(j\omega)])} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) - 1}, \quad \underline{\sigma}(GK) > 1$$

Desempenho MIMO

Rejeição a distúrbio

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|d(j\omega)\|_2} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) - 1} \approx \frac{1}{\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega))}, \quad \underline{\sigma}(GK) \gg 1$$

Requisito:

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|d(j\omega)\|_2} \leq \alpha_d(\omega) \ll 1, \quad \omega < \omega_d$$

Então:

$$\underline{\sigma}(L(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \geq \frac{1}{\alpha_d(\omega)}, \quad \omega < \omega_d$$

Desempenho MIMO

Rejeição a erro de medida

Saída

$$y = T(s)n = [I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s)n$$

Erro

$$e = -T(s)n = -[I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s)n$$

Erro de medida: Ω_n conjunto de frequências onde n tem maior parte de sua energia

$$\Omega_n = \{\omega \geq \omega_n\}$$

Rejeição a erro de medida

$$\|e(j\omega)\|_2 \leq \left\|[I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\|_{i2} \|G(j\omega)K(j\omega)\|_{i2} \|n(j\omega)\|_2$$

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|n(j\omega)\|_2} \leq \left\|[I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\|_{i2} \|G(j\omega)K(j\omega)\|_{i2}$$

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|n(j\omega)\|_2} \leq \frac{\overline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega))}{\underline{\sigma}([I + G(j\omega)K(j\omega)])}$$

Rejeição a erro de medida

Requisito:

$$\frac{\|e(j\omega)\|_2}{\|n(j\omega)\|_2} \leq \alpha_n(\omega) \ll 1, \quad \omega > \omega_n$$

Então:

$$\frac{\overline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega))}{\underline{\sigma}(I + G(j\omega)K(j\omega))} \leq \alpha_n(\omega), \quad \omega > \omega_n$$

Admite-se:

$$\overline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \ll 1, \quad \omega > \omega_n$$

Então:

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \ll 1, \quad \omega > \omega_n$$

Desempenho MIMO

Rejeição a erro de medida

Se:

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \ll 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(I + G(j\omega)K(j\omega)) \cong 1$$

E:

$$\overline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \leq \alpha_n(\omega), \quad \omega > \omega_n$$

Representação no espaço de estados de $L(s) = G(s)K(s)$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A_{MA}\mathbf{x} + B_{MA}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C_{MA}\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$L(s) = C_{MA}(sI - A_{MA})^{-1}B_{MA}$$

Polinômio característico Malha Aberta $\Rightarrow$ raízes são os polos de MA

$$\Phi_{MA}(s) = det(sI - A_{MA})$$

Estabilidade MIMO - Critério de Nyquist

Realimentação da saída:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y}$$

Então:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} =& (A_{MA} - B_{MA}C_{MA})\mathbf{x} + B_{MA}\mathbf{r} \\ \mathbf{y} =& C_{MA}\mathbf{x}\end{aligned}$$

Polinômio característico Malha Fechada $\Rightarrow$ raízes são os polos de MF

$$\Phi_{MF}(s) = det(sI - A_{MA} + B_{MA}C_{MA})$$

Temos:

$$sI - A_{MA} + B_{MA}C_{MA} = (sI - A_{MA})[I + (sI - A_{MA})^{-1}B_{MA}C_{MA}]$$

Então:

$$\begin{aligned}
\Phi_{MF}(s) &= det(sI - A_{MA} + B_{MA}C_{MA}) \\
&= det(sI - A_{MA})det[I + (sI - A_{MA})^{-1}B_{MA}C_{MA}] \\
&= det(sI - A_{MA})det[I + C_{MA}(sI - A_{MA})^{-1}B_{MA}] \\
&= \Phi_{MA}(s)det[I + L(s)]
\end{aligned}$$

Estabilidade MIMO - Critério de Nyquist

Temos:

$$\frac{\Phi_{MF}(s)}{\Phi_{MA}(s)} = det[I + L(s)]$$

Então:

- P: número de pólos de MA no SPD, raízes de $\Phi_{MA}(s)$
- Z: número de pólos de MF no SPD, raízes de $\Phi_{MF}(s)$
- N: número de envolvimentos da origem no sentido horário ($N > 0$) ou no sentido anti-horário ($N < 0$)
- **Princípio do argumento**: $N = Z - P$
- Para estabilidade: $Z = 0$

Teorema do Ganho Pequeno

Definição, **Raio Espectral**:

$$\rho(L(j\omega)) = max_i|\lambda_i(L(j\omega))|$$

Teorema Preliminar: Considere $L(s)$ estável. Então, sistema em malha fechada será estável se:

$$\rho(L(j\omega)) < 1, \quad \forall\omega.$$

Prova: Skogestad, Postlethwaiste

Muito Conservador. Caso SISO: $\rho(L(j\omega)) = |L(j\omega)| \Rightarrow |L(j\omega)| < 1$

Considere uma norma de matriz que satisfaz

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

Teorema do Ganho Pequeno: Considere $L(s)$ estável. Então, sistema em malha fechada será estável se:

$$\|L(j\omega)\| < 1, \quad \forall \omega.$$

Em especial: $\|L(j\omega)\|_{i2} = \overline{\sigma}(L(j\omega))$ e $\|L(s)\|_{\infty}$

O sistema é estável se o produto de todos os ganhos é menor que 1.