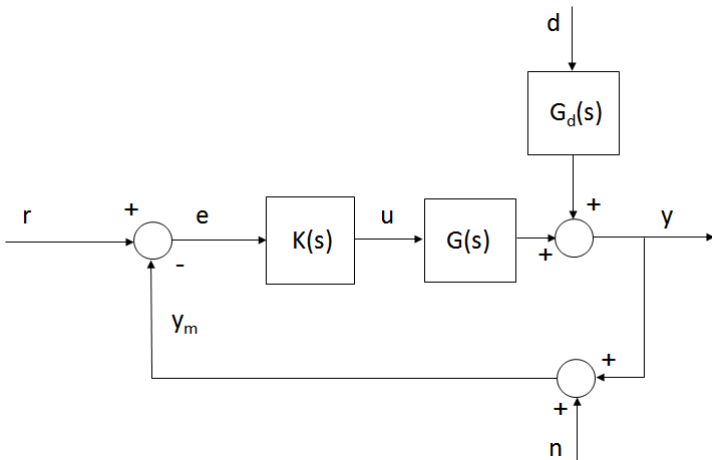


Aula 5 - Loop Shaping, Sistemas Multivariáveis, Decomposição em Valores Singulares

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Loop Shaping



Loop Shaping

Função **Sensibilidade**: $S(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)}$

Função **Sensibilidade Complementar**: $T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$

Propriedade: $S(s) + T(s) = 1$

Malha Aberta: $L(s) = G(s)K(s)$

Saída

$$y = T(s)r + T(s)n + S(s)G_d(s)d$$

Erro

$$e = -S(s)r - T(s)n + S(s)G_d(s)d$$

Loop Shaping

Acompanhamento de referência ($y = r$): $L(s)$ grande

Rejeição a distúrbio (d): $L(s)$ grande

Atenuação do ruído de medida (n): $\Rightarrow L(s)$ pequena

Estabilidade (planta estável): $L(s)$ pequena

Baixo sinal de controle ($u = K(s)e$): $K(s)$ pequeno e $L(s)$ pequena

Solução: $|L(j\omega)| > 1$ em frequências abaixo da frequência de corte

$|L(j\omega)| < 1$ em frequências acima da frequência de corte

Loop Shaping

Conformação da Malha

Controlador baseado no modelo inverso

Malha Aberta: $L(s) = \frac{\omega_c}{s}$

Controlador : $K(s) = \frac{\omega_c}{s} G^{-1}(s)$

Exemplo:

$$G(s) = \frac{200}{(10s + 1)(0.05s + 1)^2}, \quad G_d(s) = \frac{100}{(10s + 1)}$$

Tempo de subida $t_r < 0.3$ s e sobressinal $M_p < 5\%$

Rejeição a distúrbio: resposta à entrada degrau menor que 0.1 depois de 3 s

Entrada limitada a $[-1, 1]$

Frequência de corte: $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$

$G(s)$ mais polos que zeros: a inversa não é realizável

Aproximação de $G(s)$: $(0.05s + 1)^2$ por $(0.1s + 1)$

Controle:

$$K_0(s) = \frac{10}{s} \frac{(10s + 1)}{200} \frac{(0.1s + 1)}{(0.01s + 1)}$$

$$L_0(s) = \frac{10}{s} \frac{(0.1s + 1)}{(0.05s + 1)^2 (0.01s + 1)}$$

Loop Shaping

Rejeição a distúrbios

Saída

$$y = \dots + S(s)G_d(s)d$$

Erro

$$e = \dots + S(s)G_d(s)d$$

$$|S(s)G_d(s)| < 1 \implies |1 + L(s)| > |G_d(s)|$$

Considerando $|G_d(s)| > 1 \implies |L(s)| > |G_d(s)|$:

$$|L_{min}(s)| \approx |G_d(s)| \implies |K| > |K_{min}| \approx |G^{-1}(s)G_d(s)|$$

Controlador final

$$K(s) = G^{-1}(s)G_d(s) = 0.5(0.05s + 1)^2$$

Exemplo:

$$K_1(s) = 0.5$$

$$L_1(s) = \frac{100}{(10s + 1)(0.05s + 1)^2}$$

Ganhos maiores em baixa frequência

$$\omega(s) = \frac{s + \omega_l}{s}, \quad \omega_l = 0.2\omega_c = 2$$

Exemplo:

$$K_2(s) = 0.5 \frac{s + 2}{s}$$

$$L_2(s) = \frac{100}{(10s + 1)(0.05s + 1)^2} \frac{s + 2}{s}$$

Correção em altas frequências

Controlador em avanço: $\frac{0.05s+1}{0.005s+1}$

Exemplo:

$$K_3(s) = 0.5 \frac{s+2}{s} \frac{0.05s+1}{0.005s+1}$$

$$L_3(s) = \frac{100}{(10s+1)(0.05s+1)^2} \frac{s+2}{s} \frac{0.05s+1}{0.005s+1}$$

Closed-Loop Shaping

- *Shaping* de $T(s)$, $S(s)$ e/ou $K(s)S(s)$
- *Weighting Functions*
- Norma \mathcal{H}_∞
- Função transferência escalar (SISO) estável $f(s)$:

$$\|f(s)\|_\infty = \max_{\omega} |f(j\omega)|$$

Closed-Loop Shaping

- Função Sensibilidade $S(s)$
- Largura de banda mínima: ω_b
- Erro de regime máximo: A
- Pico máximo: $\|S(s)\|_\infty \leq M$
- *Weighting function* $W_p(s)$:

$$W_p(s) = \frac{s/M + \omega_b}{s + \omega_b A}$$

- As especificações são satisfeitas se:

$$|S(j\omega)| < |1/W_p(j\omega)|, \forall \omega \Leftrightarrow$$

$$|W_p(j\omega)S(j\omega)| < 1, \forall \omega \Leftrightarrow$$

$$\|W_p(s)S(s)\|_{\infty} < 1$$

- *Mixed Sensitivity:*

$$N(s) = \begin{bmatrix} W_p(s)S(s) \\ W_t(s)T(s) \\ W_u(s)K(s)S(s) \end{bmatrix}$$

- Objetivo:

$$\|N(s)\|_{\infty} < 1$$

Espaço de Estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Decomposição em Valores Singulares

Considere o sistema $y = Gd$, sendo G a matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

E as entradas ($\|d_i\|_2 = 1$):

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad d_3 = \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0,707 \end{bmatrix}; \quad d_4 = \begin{bmatrix} 0,707 \\ -0,707 \end{bmatrix}$$

As saídas são:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad y_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad y_3 = \begin{bmatrix} 6,36 \\ 3,54 \end{bmatrix}; \quad y_4 = \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0,707 \end{bmatrix}$$

$$\|y_1\|_2 = 5,83; \quad \|y_2\|_2 = 4,47; \quad \|y_3\|_2 = 7,3; \quad \|y_4\|_2 = 1$$

Decomposição em Valores Singulares

Decomposição da matriz G ($l \times m$):

$$G = U\Sigma V^H$$

sendo:

Σ : matriz $l \times m$, com $k = \min\{l, m\}$ valores singulares não negativos, em ordem decrescente na diagonal:

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)}$$

U : matriz unitária $l \times l$ dos vetores singulares de saída

V : matriz unitária $m \times m$ dos vetores singulares de entrada

Decomposição em Valores Singulares

Como V é unitária ($V^H V = I$):

$$GV = U\Sigma$$

ou $Gv_i = \sigma_i u_i$

Como $\|v_i\|_2 = 1$ e $\|u_i\|_2 = 1$

$$\sigma_i(G) = \|Gv_i\|_2 = \frac{\|Gv_i\|_2}{\|v_i\|_2}$$

Decomposição em Valores Singulares

Maior valor singular:

$$\bar{\sigma}(G) = \sigma_1(G) = \max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \frac{\|Gv_1\|_2}{\|v_1\|_2}$$

Menor valor singular:

$$\underline{\sigma}(G) = \sigma_k(G) = \min_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \frac{\|Gv_k\|_2}{\|v_k\|_2}$$

Decomposição em Valores Singulares

Para um sistema $G(s)$, na frequência ω

Maior valor singular:

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \max_{d \neq 0} \frac{\|G(j\omega)d(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2}$$

Menor valor singular:

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) = \min_{d \neq 0} \frac{\|G(j\omega)d(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2}$$

$$d(\omega) = [d_1 \text{sen}(\omega t + \alpha_1) \quad \cdots \quad d_m \text{sen}(\omega t + \alpha_m)]^T$$