SEMINARIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS-MAT 450

Solução problema 17 - Lista 3

Antônio Luiz Pereira

1

Num quadrilátero ABCD de lados não paralelos, junte os lados opostos formando os pontos E e F e tome o ponto médio O de $\overline{EF}$. Sejam M e N os pontos médios das diagonais do quadrilátero. Mostre que M, N e O são colineares.(nõo claro o que significa "juntar os lados opostos". A interpretação adotada aqui, encontrada pelo Artur da Costa Mata, é que os lados serão prolongados até se encontrarem).

Com as notações da figura, temos que existem θ e η tais que :
$\mu v_1 = v_2 + \theta(v_3 - v_1). \quad \lambda v_2 = v_1 + \eta(v_3 - v_1).$

Escrevendo v_3 como combinação linear de v_1 e v_2m $v_3 = rv_1 + sv_2$, obtemos

$$\begin{cases} \mu v_1 = v_2 + \theta(rv_1 + sv_2 - v_2) = \theta r v_1 + (1 - \theta s - \theta)v_2 \\ \lambda v_2 = v_1 + \eta(rv_1 + sv_2 - v_1) = \eta s v_2 + (1 - \eta r - n)v_1 \end{cases} \tag{1.1}$$

De (1.1), obtemos:

$$\theta = \frac{1}{1-s}, \ \mu = \frac{r}{1-s}, \quad \eta = \frac{1}{1-r}, \ \lambda = \frac{s}{1-r} \tag{1.2}$$

Temos então:

- $P_3 = \dfrac{1}{2}(\mu v_1 + \lambda v_2) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{r}{1-s}v_1 + \dfrac{s}{1-r}v_2\right].$
- $P_2 = \dfrac{1}{2}(v_1 + v_2).$
- $P_1 = \dfrac{v_3}{2} = \dfrac{1}{2}(rv_1 + sv_2).$

Segue que:

$$P_3 - P_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{s+r-1}{1-s}v_1 + \frac{s+r-1}{1-r}v_2.\right]$$

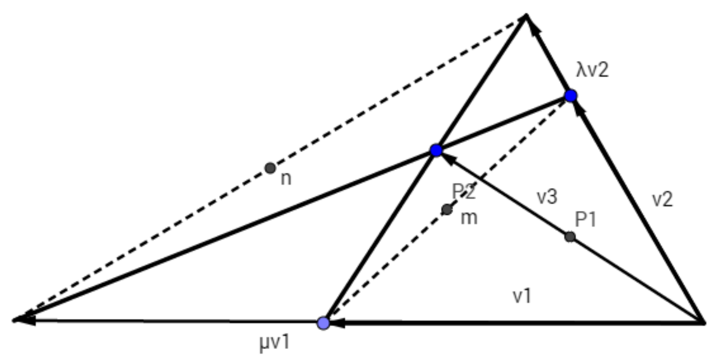

Figure 1. Ex13

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\left[(1-r)v_1 + (1-s)v_2.\right]$$

Portanto

$$P_3 - P_2 = \frac{s+r-1}{(1-s)(1-r)}(P_2 - P_1),$$

de onde se conclui que os pontos P_1, P_2 e P_3 estão alinhados.